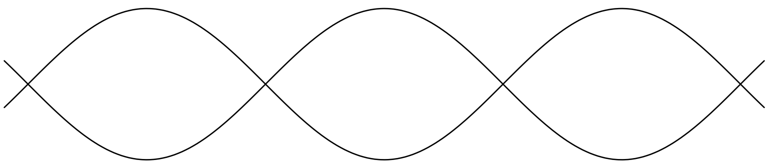
Lukion matemaattisen analyysin mestarikurssi



$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right)$$

Markku Halmetoja   Jorma Merikoski

Sisältö

Esipuhe

Matematiikan harrastajalla saattaa jo lukiolaisena olla halua ja kykyä ymmärtää, mitä matemaattisen analyysin peruskäsitteet (reaaliluvut, raja-arvo, jatkuvuus, derivaatta, integraali) oikeasti ovat ja miten tämän alan väitteitä kunnolla todistetaan. Näin saavutettu ”lukion matemaattisen analyysin mestarin” taso antaisi hyvän lähtökohdan matematiikan jatko-opintoihin.

Tämä kirja sopii näille lukiolaisille tarkoitetun analyysin erikoiskurssin oppimateriaaliksi. Se ehditään käydä läpi yhden kurssin aikana, kun tähdellä merkityt kohdat sivuutetaan. Kirja sopii myös analyysin tavanomaisten lukiokurssien lisämateriaaliksi ja analyysin yliopistokurssien tukimateriaaliksi.

Kirjan metodinen pääpointti on ”ε-δ-tekniikka”, joka tuottaa monille yliopisto-opiskelijoille joskus suuriakin vaikeuksia. Onko siis realistista yrittää opettaa sitä lukiolaisille? Mielestämme on. Nimittäin tärkein syy yliopisto-opiskelijoiden vaikeuksiin lienee se, ettei tämän tekniikan opiskeluun ehditä käyttää tarpeeksi aikaa, kun taas ”mestarikurssilla” sitä voidaan opiskella kiireettömästi.

Asioiden käsittelyjärjestys ei täysin noudata tavanomaista matematiikan kirjojen systematiikkaa, sillä oletamme jo kirjan alussa lukion matematiikan pakollisen oppimäärän tunnetuksi. Tekemällä näin voimme esimerkiksi puhua luvussa 4 potenssisarjan derivoimisesta termeittäin, vaikka määrittelemme derivaatan täsmällisesti vasta luvussa 5.

Määrittelemme lukujonon raja-arvon palauttamalla sen funktion raja-arvoon. Johdamme derivoimissäännöt käyttämällä erotusosamäärien sijasta ”ϕ-temppua”. Sen mukaan välillä I määritelty funktio f on derivoituva pisteessä $a \in I$, jos ja vain jos

$$f(x) - f(a) = \phi(x)(x-a),$$

missä ϕ on tietty I:ssä määritelty a:ssa jatkuva funktio. Tällöin johdot lyhenevät ja myös yhdistetyn funktion derivoimissääntö voidaan johtaa.

Tarkastelemme seuraavaksi tähdellä merkittyä ainesta.

Osaluvun 1.1 sivuuttaminen ei juurikaan haittaa kokonaisuutta. Aihe on kylläkin tärkeä mutta helpohko, joten se voidaan jättää itseopiskeltavaksi.

Osaluvussa 3.2 esitettävää vaikeaa tasaisen jatkuvuuden käsitettä tarvitaan jatkuvan funktion integroituvuuden todistamisessa. Tämän osaluvun pois jättämisestä ei ole sen kummempia seurauksia kuin että todistuksen tietty kohta jää hieman hämäräksi.

Osaluvuissa 4.2–3 määrittelemme eksponentti-, sini- ja kosinifunktion potenssisarjoina. Tätä aihetta ei ehdittäne käsitellä kurssilla, mutta jo pelkkä tieto siitä, että näin voidaan menetellä, on kiinnostava. Tarvittavat potenssisarjojen ominaisuudet tyydymme antamaan todistamatta, sillä todistukset tekisivät kirjasta liian laajan ja veisivät sen liian kauas lukiotasosta.

Lukua 7 ei varmaankaan ehditä käsitellä, mutta osaluvuissa 7.2–4 esitetyt lauseet kuuluvat lukion oppimäärään ilman todistuksia. Vaikka tämä luku jäisikin itseopiskelun varaan, näiden tärkeiden lauseiden merkitys korostuu, kun ne todistetaan tässä.

Osa sisällöstä on peräisin kirjoista [2] ja [5]. Ensisijaiset lähteemme ovat Browderin [1], Myrbergin [7, 8] ja Rudinin [9] kirjat, mutta myös Lindelöfin monumentaaliseen kirjasarjaan kuuluvat [3] ja [4] ansaitsevat tulla tässä mainituiksi.

Kirjassa on paljon harjoitustehtäviä. Koska vaikeisiin tehtäviin on ohjeita ja koska vain harvat tehtävät ovat sellaisia ”laskutehtäviä”, joiden vastauksista on hyötyä, vastaus- ja ohjeluetteloa ei tarvita. Kaikkien tehtävien täydelliset ratkaisut ovat meiltä saatavissa. Niiden pyytäjän on vakuutettava, ettei hän ole oppilaana kurssilla, jossa käytetään tätä kirjaa. Kurssin suorittamista tavoitteleva itseopiskelija saa tietenkin ratkaisut.

Matematiikkaa oppii tekemällä sitä itse ja vain siten. Siksi harjoitustehtävien ratkaiseminen on erittäin tärkeää, mutta vähintään yhtä tärkeää on varsinaisen tekstin huolellinen läpikäyminen. Monissa todistuksissa kysytään ”miksi?” tai annetaan tiettyjä yksityiskohtia harjoitustehtäviksi. Lukijan kannattaa vastata näihin kysymyksiin ja ratkaista annetut tehtävät.

Otamme mielellämme vastaan virheiden korjauksia ja muita kommentteja. Mahdollisesti julkaisemme myöhemmin analyysin teorian alkeista laajemman kirjan, joka on tarkoitettu enemmän yliopistoon kuin lukioon. Myös tätä hanketta koskevat ehdotukset ovat tervetulleita.

Tampereella joulukuussa 2016

Markku Halmetoja — Jorma Merikoski

`markku.halmetoja@kapsi.fi` — `jorma.merikoski@uta.fi`

Korjattu ja päivitetty maaliskuussa 2017.

1 Reaaliluvut

1.1 Reaalilukujen ominaisuuksia ($\star$)

Reaalilukujen välisten yhtälöiden käsittely perustuu reaalilukujen *algebrallisiin ominaisuuksiin.*

Reaalilukujen algebralliset ominaisuudet

(A1) *Vaihdantalait.* Kaikilla $a, b \in \mathbb{R}$ on

$$a + b = b + a, \quad ab = ba.$$

(A2) *Liitäntälait.* Kaikilla $a, b, c \in \mathbb{R}$ on

$$a + (b + c) = (a + b) + c, \quad a(bc) = (ab)c.$$

(A3) *Nolla ja ykkönen.* On olemassa sellaiset (toisistaan eroavat) reaaliluvut 0 ja 1, että

$$0 + a = a, \quad 1 \cdot a = a$$

kaikilla $a \in \mathbb{R}$.

(A4) *Vastaluku ja käänteisluku.* Jokaisella reaaliluvulla a on vastaluku $-a$, jolle

$$a + (-a) = 0.$$

Jokaisella reaaliluvulla $a \neq 0$ on käänteisluku a^{-1}, jolle

$$a \cdot a^{-1} = 1.$$

(A5) *Osittelulaki.* Kaikilla $a, b, c \in \mathbb{R}$ on

$$a(b + c) = ab + ac.$$

Nollan ja ykkösen yksikäsitteisyys. Jos $0'$ on sellainen reaaliluku, että (i) $0' + a = a$ kaikilla $a \in \mathbb{R}$, niin $0' = 0$. Nimittäin

$0 = 0' + 0 \quad (\text{i}, a = 0)$,

$0' + 0 = 0 + 0' \quad (\text{A1})$,

$0 + 0' = 0' \quad (\text{A3}, a = 0')$.

Ykkösen yksikäsitteisyys osoitetaan vastaavasti (teht 1a).

Vastaluvun ja käänteisluvun yksikäsitteisyys. Olkoon $a \in \mathbb{R}$. Jos $\bar{a}$ on sellainen reaaliluku, että (ii) $a + \bar{a} = 0$, niin $\bar{a} = -a$. Nimittäin

$\bar{a} = \bar{a} + 0 \quad$ (A3, A1),
$\bar{a} + 0 = \bar{a} + (a + (-a)) \quad$ (A4),
$\bar{a} + (a + (-a)) = a + \bar{a} + (-a) \quad$ (A1, A2),
$a + \bar{a} + (-a) = 0 + (-a) \quad$ (ii),
$0 + (-a) = -a \quad$ (A4).

Vähemmällä pyörityksellä päästään lisäämällä $-a$ yhtälöön (ii). Jos kuitenkin jokainen yksityiskohta on perusteltava, niin joudutaan tekemään samat työt kuin edellä. Esimerkiksi alussa on todettava, että yhteenlaskun vaihdantalain nojalla on yhdentekevää, lisätäänkö $-a$ vasemmalta vai oikealta. Käänteisluvun yksikäsitteisyys osoitetaan vastaavasti (teht 1 b).

Yhtälöt $a+x=b$ ja $ax=b$. Ratkaisemme näistä x:n. Lisäämme $(-a)$:n yhtälöön $a+x=b$ (ja sivuutamme yksityiskohdat), jolloin saamme $x = b+(-a) = b-a$. Olemme kuitenkin nyt todistaneet vain: Jos (iii) $a+x=b$, niin (iv) $x = b-a$. Toisin sanoen yhtälöllä (iii) ei voi olla muita ratkaisuja kuin mahdollisesti (iv). Meidän on vielä näytettävä, että (iv) toteuttaa tämän yhtälön, mikä sujuu joko sijoittamalla tai lisäämällä a yhtälöön (iv). Yhtälö $ax=b$ ratkaistaan vastaavasti (teht. 1 c), mutta tapaus $a=0$ täytyy käsitellä erikseen.

Reaalilukujen välisten epäyhtälöiden käsittely perustuu reaalilukujen *järjestysominaisuuksiin.* Voimme esittää ne tarkastelemalla joko *järjestystä* (oikeastaan *järjestysrelaatiota*) $\leq$ tai *tiukkaa järjestystä* $<$.

Reaalilukujen järjestysominaisuudet

(J1) *Refleksiivisyys.* Kaikilla $a \in \mathbb{R}$ pätee $a \leq a$.

Irreflksiivisyys. Millään $a \in \mathbb{R}$ ei päde $a < a$.

(J2) *Antisymmetrisyys.* Jos $a \leq b$ ja $b \leq a$, niin $a = b$.

(J3) *Transitiivisuus.* Jos $a \leq b$ ja $b \leq c$, niin $a \leq c$.

Jos $a < b$ ja $b \leq c$ tai jos $a \leq b$ ja $b < c$, niin $a < c$.

(J4) *Dikotomisuus.* Kaikilla $a, b \in \mathbb{R}$ pätee $a \leq b$ tai $b \leq a$.

Trikotomisuus. Kaikilla $a, b \in \mathbb{R}$ pätee vaihtoehdoista $a < b$, $b < a$ ja $a = b$ täsmälleen yksi.

(J5) *Järjestyksen säilyminen yhteenlaskussa.* Jos $a \leq b$, niin $a + c \leq b + c$ kaikilla $c \in \mathbb{R}$. Jos $a < b$, niin $a + c < b + c$ kaikilla $c \in \mathbb{R}$.

(J6) *Ei-negatiivisuuden ja positiivisuuden säilyminen kertolaskussa.* Jos $a, b \geq 0$, niin $ab \geq 0$. Jos $a, b > 0$, niin $ab > 0$.

Tarkastelemme ominaisuuden (J5) alkuosaa

$$a \leq b \Longrightarrow a + c \leq b + c.$$

Jotta voisimme käyttää tätä epäyhtälöiden ratkaisemiseen, meidän on näytettävä, että itse asiassa

$$a \leq b \iff a + c \leq b + c. \tag{1}$$

Lisäämällä oikeanpuoliseen epäyhtälöön $(-c)$:n saamme vasemmanpuolisen. Sama huomautus koskee loppuosaa.

Meidän on vielä selvitettävä, miten epäyhtälöitä voidaan kertoa käyttämällä ominaisuutta (J6). Olkoon $c > 0$. Tällöin

$$a \leq b \iff ca \leq cb. \tag{2}$$

Nimittäin

$$\begin{aligned}
a \leq b &\implies b - a \geq 0 \quad (\text{J5}, \ c = -a),\\
b - a \geq 0 &\implies c(b - a) \geq 0 \quad (\text{J6}),\\
c(b - a) \geq 0 &\implies cb \geq ca \quad (\text{A5}, \text{J5}, \text{teht. } 5).
\end{aligned}$$

Tässä implikaatioketjussa voidaan edetä myös lopusta alkuun, joten (2) seuraa. Erisuuruus $<$ voidaan käsitellä vastaavasti.

Epäyhtälöt $a + x \leq b$ ja $a + x < b$. Nämä saamme ratkaistuiksi yhtäpitävyyden (1) ja relaatiota $<$ koskevan vastaavan yhtäpitävyyden perusteella (teht. 7).

Epäyhtälöt $ax \leq b$ ja $ax < b$. Oletamme, että $a > 0$, ja jätämme tapauksen $a \leq 0$ harjoitustehtäväksi (teht. 8). Koska $a^{-1} > 0$ (teht. 6 b), on yhtäpitävyyden (2) ja vastaavan relaatiota $<$ koskevan yhtäpitävyyden perusteella

$$ax \leq b \iff x \leq a^{-1}b, \qquad ax < b \iff x < a^{-1}b.$$

Harjoitustehtäviä

1. Todista:

a) Jos $1'$ on sellainen reaaliluku, että $1' \cdot a = a$ kaikilla $a \in \mathbb{R}$, niin $1' = 1$.

b) Jos reaaliluku $a \neq 0$ ja jos a' on sellainen reaaliluku, että $a \cdot a' = 1$, niin $a' = a^{-1}$.

c) Olkoot a ja b annettuja reaalilukuja. Ratkaise yhtälö $ax = b$.
Ohje: Tarvitset tulon nollasääntöä (teht. 4).

2. Olkoon $a \in \mathbb{R}$. Todista:

a) $-(-a) = a$.

b) Jos $a \neq 0$, niin $(a^{-1})^{-1} = a$.

Ohje a-kohtaan: Tarkastele yhtälöä $a + (-a) = 0$ ”$(-a)$:n kannalta”.

3. Olkoon $a, b \in \mathbb{R}$. Todista:

a) $-(a + b) = (-a) + (-b)$.

b) Jos $a, b \neq 0$, niin $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$.

Ohje a-kohtaan: Osoita, että $(-a)+(-b)$ toteuttaa $(a+b)$:n vastalukua koskevan ehdon.

4. Olkoon $a, b \in \mathbb{R}$. Todista *tulon nollasääntö*: Tulo $ab = 0$, jos ja vain jos $a = 0$ tai $b = 0$. Ohjeita: Esitä ”jos”-suunta muodossa $0b = 0$. Kirjoita

$$0 + 0b = 0b = (0 + 0)b = 0b + 0b$$

(perustele välivaiheet). Miten jatkat? ”Vain jos”-suunnassa tee vastaoletus, että löytyy sellaiset $a, b \neq 0$, joille $ab = 0$. Näytä, että silloin olisi $1 = 0$.

5. Olkoon $a, b \in \mathbb{R}$. Todista *tulon merkkisäännöt*

$$a(-b) = -ab, \quad (-a)(-b) = ab.$$

Ohjeita: Kirjoita aluksi $a0 = a(b + (-b))$.

6. Olkoon $a \in \mathbb{R}$. Todista:

a) $a \geq 0 \iff -a \leq 0, \quad a > 0 \iff -a < 0,$

b) $a > 0 \iff a^{-1} > 0, \quad a < 0 \iff a^{-1} < 0.$

7. Olkoot a ja b annettuja reaalilukuja. Ratkaise epäyhtälö

a) $a + x \leq b,$ **b)** $a + x < b.$

8. Olkoot $a \leq 0$ ja b annettuja reaalilukuja. Ratkaise epäyhtälö

a) $ax \leq b,$ **b)** $ax > b.$

9. Olkoon $a \in \mathbb{R}$. Todista

a) $a^2 \geq 0,$ **b)** $a \neq 0 \implies a^2 > 0,$ **c)** $1 > 0.$

10. Olkoon $a, b \in \mathbb{R}$. Määritellään itseisarvo tavanomaisesti (siis miten?). Todista:

a) $|ab| = |a||b|,$ **b)** $|a|^2 = a^2,$ **c)** $-|a| \leq a \leq |a|.$

1.2 Reaalilukujen täydellisyysominaisuus

Reaalilukujoukko A on *ylhäältä rajoitettu*, jos on olemassa sellainen reaaliluku m, että $x \leq m$ kaikilla $x \in A$. Tällöin m on joukon A *yläraja*. Tämä joukko on *alhaalta rajoitettu*, jos on olemassa sellainen reaaliluku m, että $x \geq m$ kaikilla $x \in A$, jolloin m on A:n *alaraja*. Joukko on *rajoitettu*, jos se on sekä alhaalta että ylhäältä rajoitettu. Jos joukossa A on suurin luku $\max A$ (vastaavasti pienin luku $\min A$), niin tämä joukko on ylhäältä (vastaavasti alhaalta) rajoitettu. Tyhjä joukko $\emptyset$ on rajoitettu. Nimittäin muussa tapauksessa $\emptyset$ sisältäisi mielivaltaisen suuria tai mielivaltaisen pieniä lukuja, mikä on mahdotonta, koska joukko on tyhjä.

Jos joukon A ylärajojen joukossa on pienin luku s, niin se on tämän joukon *pienin yläraja*, jolloin merkitään $s = \sup A$. Joukon A *suurin alaraja* $\inf A$ määritellään vastaavasti. Jos joukossa on suurin luku (vastaavasti pienin luku), niin se on tämän joukon pienin yläraja (vastaavasti suurin alaraja).

Jos joukko A ei ole ylhäältä (vastaavasti alhaalta) rajoitettu, niin voidaan käyttää merkintää $\sup A = \infty$ (vastaavasti $\inf A = -\infty$), vaikka $\sup A$ (vastaavasti $\inf A$) ei ole olemassa.

Esimerkki 1 Joukko

$$A = \left\{1 - \frac{1}{n} \,\Big|\, n \in \mathbb{Z}_+\right\} = \left\{0, \tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{3}{4}, \dots\right\}$$

on rajoitettu, sillä kaikilla $x \in A$ pätee

$$0 \le x < 1.$$

Kaikki ei-positiiviset luvut ovat A:n alarajoja. Koska pienin alkio $\min A = 0$, myös suurin alaraja $\inf A = 0$. Kaikki ne luvut m, joille $m \ge 1$, ovat A:n ylärajoja. Osoitamme, ettei A:lla ole muita ylärajoja. Teemme vastaoletuksen, että A:lla on yläraja $m < 1$. Tällöin $x \le m < 1$ kaikilla $x \in A$ eli

$$1 - \frac{1}{n} \le m < 1$$

kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$. Koska

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

saadaan $1/n$ mielivaltaisen lähelle nollaa valitsemalla tarpeeksi suuri n. Mutta $1-1/n$ saadaan silloin mielivaltaisen lähelle ykköstä. Erityisesti se saadaan suuremmaksi kuin m, jolloin syntyy ristiriita. Näin ollen A:n pienin yläraja $\sup A = 1$. Suurinta alkiota $\max A$ ei ole.

Esimerkki 2 Olkoon a_n luvun $\sqrt{2}$ n-desimaalinen alalikiarvo ja

$$\begin{aligned} A &= \{a_n \,|\, n \in \mathbb{Z}_+\} = \{1{,}4;\ 1{,}41;\ 1{,}414;\ 1{,}4142; \dots\}, \\ B &= \{x \in \mathbb{Q} \,|\, x < \sqrt{2}\},\ C = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x < \sqrt{2}\}. \end{aligned}$$

Tällöin $\sup A = \sup B = \sup C = \sqrt{2}$ (teht. 20).

Epätyhjällä ylhäältä rajoitetulla rationaalilukujoukolla ei välttämättä ole rationaalista pienintä ylärajaa (joukot A ja B esimerkissä 2). Sen sijaan kaikilla tällaisilla reaalilukujoukoilla on reaalinen pienin yläraja. Tämä *täydellisyysominaisuus* on joukolla $\mathbb{R}$ mutta ei ole joukolla $\mathbb{Q}$.

Reaalilukujen täydellisyysominaisuus

(T) Jokaisella epätyhjällä ylhäältä rajoitetulla reaalilukujoukolla on pienin yläraja.

Vastaavasti jokaisella epätyhjällä alhaalta rajoitetulla reaalilukujoukolla on suurin alaraja. Ominaisuudet (A1)–(A5), (J1)–(J6) ja (T) luonnehtivat reaalilukuja täysin, joten ne voidaan ottaa reaalilukujen aksiomaattiseksi määritelmäksi.

Lause 1 (Pienimmän ylärajan ”epsilon-ominaisuus”) *Olkoon $A \neq \emptyset$ ylhäältä rajoitettu joukko reaalilukuja ja olkoon s sen yläraja. Seuraavat ehdot ovat yhtäpitävät.*

(a) $s = \sup A$.

(b) *Jokaista positiivilukua ε vastaa joukon A sellainen alkio x_ε, että*

$$x_\varepsilon > s - \varepsilon. \tag{1}$$

Havainnollisesti b-kohta tarkoittaa, että A:n alkioita on ”mielivaltaisen lähellä” s:ää.

Todistus (a)$\Rightarrow$(b). Teemme vastaoletuksen, että (b) on epätosi, jolloin on olemassa sellainen $\varepsilon_0 > 0$, että (1) ei toteudu. Silloin $x \leq s - \varepsilon_0$ kaikilla $x \in A$, joten myös $\sup A \leq s - \varepsilon_0 < s$, mikä on ristiriidassa (a):n kanssa.

(b)$\Rightarrow$(a). Teemme vastaoletuksen, että (a) on epätosi, jolloin A:lla on s:ää pienempi yläraja t. Valitsemme $\varepsilon_0 = s - t$. Kaikilla $x \in A$ on

$$x \leq t = s - (s - t) = s - \varepsilon_0 < s,$$

mikä on ristiriidassa (b):n kanssa. ■

Esimerkki 1, jatkoa Todistimme, että joukon A yläraja $s = 1$ on tämän joukon pienin yläraja. Varmistamme, että luvulla $s = 1$ on epsilon-ominaisuus. Olkoon $\varepsilon > 0$. Meidän on näytettävä, että löytyy sellainen $n \in \mathbb{Z}_+$, jolle

$$1 - \frac{1}{n} > 1 - \varepsilon.$$

Tämän epäyhtälön ratkaisu on

$$n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Siis x_ε:ksi kelpaa mikä tahansa sellainen $1 - 1/n$, jossa $n > 1/\varepsilon$.

Esimerkki 3 Kun $\emptyset \neq A, B \subseteq \mathbb{R}$, määritellään

$$A + B = \{a + b \,|\, a \in A,\, b \in B\}.$$

Todista: Jos A ja B ovat ylhäältä rajoitettuja, niin

$$\sup\,(A + B) = \sup A + \sup B.$$

Merkitsemme $s = \sup A$, $t = \sup B$. Olkoon $x \in A + B$. Koska $x = a + b$, missä $a \in A$ ja $b \in B$, ja koska $a \leq s$, $b \leq t$, on $x \leq s + t$. Siis $s + t$ on joukon $A + B$ yläraja. Osoitamme, että sillä on epsilon-ominaisuus. Olkoon $\varepsilon > 0$. Koska s:llä on A:ta koskeva ε-ominaisuus, sillä on myös "$\frac{1}{2}\varepsilon$-ominaisuus". On siis olemassa $a_{\frac{\varepsilon}{2}} \in A$, jolle $a_{\frac{\varepsilon}{2}} > s - \frac{1}{2}\varepsilon$. Vastaavasti on olemassa $b_{\frac{\varepsilon}{2}} \in B$, jolle $b_{\frac{\varepsilon}{2}} > t - \frac{1}{2}\varepsilon$. Luku $x_\varepsilon = a_{\frac{\varepsilon}{2}} + b_{\frac{\varepsilon}{2}}$ toteuttaa $(A + B)$:tä koskevan ehdon (1), sillä

$$x_\varepsilon > s - \tfrac{1}{2}\varepsilon + t - \tfrac{1}{2}\varepsilon = s + t - \varepsilon.$$

Harjoitustehtäviä

11. Määritä $\max A$, $\min A$, $\sup A$ ja $\inf A$ (mikäli ne ovat olemassa), kun

$$\textbf{a)}\ A = \left\{ (-1)^n + \frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}_+ \right\}, \quad \textbf{b)}\ A = \left\{ \frac{2n}{4n+1} \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}_+ \right\}.$$

12. Todista: Jos $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ ja A on rajoitettu, niin $\inf A \leq \sup A$.

13. Mitä voidaan sanoa joukosta A, jos $\inf A = \sup A$?

14. Kirjoita ja todista suurimman alarajan "epsilon-ominaisuutta" koskeva lause.

15. Todista: Jos $\emptyset \neq A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$ ja jos B on rajoitettu, niin $\inf A \geq \inf B$ ja $\sup A \leq \sup B$.

16. Kun $\emptyset \neq A, B \subseteq \mathbb{R}$, määritellään

$$AB = \{ab \,|\, a \in A,\ b \in B\}.$$

Muodosta (mikäli mahdollista) sellaiset rajoitetut joukot A ja B, joille

a) $\sup AB = \sup A \sup B$,

b) $\sup AB < \sup A \sup B$,

c) $\sup AB > \sup A \sup B$.

17. Kun $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, määritellään $-A = \{-a \,|\, a \in A\}$. Todista: Jos A on rajoitettu, niin

$$\inf A = -\sup(-A).$$

18. Muodosta (mikäli mahdollista) sellainen suppeneva jono (a_n) reaalilukuja, jolle

$$\textbf{a)} \lim_{n\to\infty} a_n = \sup A, \quad \textbf{b)} \lim_{n\to\infty} a_n < \sup A, \quad \textbf{c)} \lim_{n\to\infty} a_n > \sup A,$$

kun $A = \{a_n \,|\, n \in \mathbb{Z}_+\}$.

19. Muodosta (mikäli mahdollista) sellainen funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jolle $\lim_{x\to\infty} f(x)$ on olemassa ja

$$\textbf{a)} \lim_{x\to\infty} f(x) = \sup A_f, \quad \textbf{b)} \lim_{x\to\infty} f(x) < \sup A_f, \quad \textbf{c)} \lim_{x\to\infty} f(x) > \sup A_f.$$

Tässä A_f tarkoittaa f:n arvojoukkoa.

20. Olkoot A, B ja C kuten esimerkissä 2.

a) Osoita, että $\sup A = \sup B = \sup C = \sqrt{2}$. Ohjeita: Luku $\sqrt{2}$ on selvästi näiden joukkojen yläraja, joten näytettäväksi jää, että sillä on ε-ominaisuus kaikkien näiden joukkojen suhteen. Riittää tarkastella (miksi?) joukkoa A. Käytä hyväksi sitä, että $\sqrt{2}$:lle löytyy mielivaltaisen tarkka "päättyvän desimaaliluvun" muotoinen alalikiarvo.

b) Kun reaaliluvut määritellään aksioomilla (A1)–(A5), (J1)–(J6), (T) (s. 8), niiden desimaalikehitelmät eivät ole välittömästi käytettävissä. Tällöin a-kohdan mukaista päättelyä täytyy täsmentää. Todista aluksi reaalilukujen *Arkhimedeen ominaisuus*: Jos $a, b > 0$, niin on olemassa sellainen $n \in \mathbb{Z}_+$, että $na > b$. (Myös kaikki "itsestään selvältä" tuntuvat väitteet on nyt todistettava.) Ohjeita: Tee vastaoletus, ettei tällaista n:ää ole. Silloin joukko $S = \{na \,|\, n \in \mathbb{Z}_+\}$ on (epätyhjä ja) ylhäältä rajoitettu, joten $s = \sup S$ on olemassa. Koska $s - a$ ei ole S:n yläraja (miksei?), on olemassa (miksi?) sellainen $k \in \mathbb{Z}_+$, että $ka > s - a$. Miten saat nyt ristiriidan?

c) Joukko $S \subseteq \mathbb{R}$ on *tiheä* (joukossa $\mathbb{R}$), jos seuraava pätee: Kun on annettu $\varepsilon > 0$ ja $x \in \mathbb{R}$, löytyy sellainen $a \in S$, että $|a - x| < \varepsilon$. Osoita, että joukko $\mathbb{Q}$ on tiheä. Ohjeita: Arkhimedeen ominaisuuden perusteella on olemassa sellainen $n \in \mathbb{Z}_+$, että $n\varepsilon > 1$ eli $1/n < \varepsilon$. Valitse $m =$ suurin kokonaisluku, joka $\leq nx$. Miten jatkat?

d) Todista c-kohdan väitettä vahvempi (miksi vahvempi ?) väite: Päättyvien desimaalilukujen joukko on tiheä.

e) Totea d-kohdan perusteella, että $\sqrt{2}$:lla on ε-ominaisuus joukon A suhteen, joten $\sup A = \sqrt{2}$.

1.3 Kolmioepäyhtälö

Kolmion kahden sivun summa on suurempi ja erotus pienempi kuin kolmas sivu. Otamme mukaan myös sellaiset "kolmiot", joiden kärkipisteet ovat samalla suoralla, jolloin yhtäsuuruus voidaan saavuttaa. Jos siis kolmion OAB sivuvektorit ovat $\vec{OA} = \mathbf{a}$, $\vec{AB} = \mathbf{b}$ ja $\vec{OB} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, niin on voimassa *kolmioepäyhtälö*

$$||\mathbf{a}| - |\mathbf{b}|| \leq |\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|,$$

missä $|\cdot|$ tarkoittaa sekä luvun itseisarvoa että vektorin pituutta.

Käsittelemme tässä vain "yksiulotteisia vektoreita" eli reaalilukuja. Reaalilukujen a ja b välinen kolmioepäyhtälö on siis

$$||a| - |b|| \leq |a + b| \leq |a| + |b|.$$

Lemma 1 *Olkoot a ja b ei-negatiivisia reaalilukuja.*

(a) *Jos ja vain jos $a \geq b$, niin $a^2 \geq b^2$.*

(b) *Jos ja vain jos $a > b$, niin $a^2 > b^2$.*

(c) *Jos ja vain jos $a = b$, niin $a^2 = b^2$.*

Todistus Todistamme a-kohdan ja jätämme muut kohdat harjoitustehtäväksi (teht. 21). Jos $a \geq b$, niin

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) \geq 0$$

ominaisuuden (J6) perusteella, sillä kumpikin tulontekijä on ei-negatiivinen. Jos $a < b$, niin $a - b < 0$ ja $a + b > 0$, joten tulon merkkisäännön (teht. 5) perusteella $a^2 - b^2 < 0$. ∎

Nyt voimme todistaa reaalilukujen kolmioepäyhtälön.

Lause 2 *Olkoon $a, b \in \mathbb{R}$. Tällöin*

$$||a| - |b|| \leq |a + b| \leq |a| + |b|.$$

Yhtäsuuruus saavutetaan edellisessä osassa, jos ja vain jos a ja b ovat erimerkkiset tai ainakin toinen niistä on nolla. Se saavutetaan jälkimmäisessä osassa, jos ja vain jos a ja b ovat samanmerkkiset tai ainakin toinen niistä on nolla.

Todistus Saamme yhtäpitävästi

$$\begin{aligned}
||a|-|b|| \;&\le\; |a+b| \;\le\; |a|+|b|,\\
(|a|-|b|)^2 \;&\le\; |a+b|^2 \;\le\; (|a|+|b|)^2 \quad \text{(lemma 1)},\\
(|a|-|b|)^2 \;&\le\; (a+b)^2 \;\le\; (|a|+|b|)^2 \quad \text{(teht. 10 b)},\\
|a|^2-2|a||b|+|b|^2 \;&\le\; a^2+2ab+b^2 \;\le\; |a|^2+2|a||b|+|b|^2 \quad \text{(A1, A2, A5)},\\
a^2-2|a||b|+b^2 \;&\le\; a^2+2ab+b^2 \;\le\; a^2+2|a||b|+b^2 \quad \text{(teht. 10 b)},\\
-2|a||b| \;&\le\; 2ab \;\le\; 2|a||b| \quad \text{(J5, A1, A2)},\\
-|a||b| \;&\le\; ab \;\le\; |a||b| \quad \text{(J6)},\\
-|ab| \;&\le\; ab \;\le\; |ab|.
\end{aligned}$$

Viimeinen epäyhtälö on tosi (teht. 10 c), joten myös ensimmäinen on. Yhtäsuuruusehdon perustelun jätämme harjoitustehtäväksi (teht. 22). ■

Jos tunnetaan rajat lausekkeen muuttujille ja halutaan löytää rajat lausekkeelle (sen arvolle), niin kolmioepäyhtälöstä on usein hyötyä.

Esimerkki 1 Tiedetään, että $|x| \le a$ ja $|y| \le b$. Määritä lausekkeelle $2x-3y$ rajat.

Tapa 1. Tehtävän 10 c ja kolmioepäyhtälön perusteella saamme ylärajan

$$2x-3y \le |2x-3y| = |2x+(-3y)| \le |2x|+|-3y| = 2|x|+3|y| \le 2a+3b.$$

Tapa 2. Teemme $(2x)$:n mahdollismman suureksi, mikä tapahtuu, kun $x=a$. Teemme $(3y)$:n mahdollisimman pieneksi, mikä tapahtuu, kun $y=-b$. Täten

$$2x-3y \le 2a-3(-b) = 2a+3b.$$

Yhtäsuuruus saavutetaan, kun $x=a$ ja $y=-b$. Täten $2a+3b$ on $(2x-3y)$:n pienin yläraja eli ”paras mahdollinen” yläraja. Alarajan jätämme harjoitustehtäväksi (teht. 25).

Esimerkki 2 Tiedetään, että $|x-y| \leq a$ ja $|x-z| \leq b$. Määritä lausekkeelle $|y-z|$ rajat.

Kolmioepäyhtälön perusteella saamme ylärajan

$$|y-z| = |(y-x)+(x-z)| \leq |y-x| + |x-z| \leq a+b.$$

Alaraja on triviaalisti 0. Nämä rajat ovat parhaat mahdolliset (teht. 26).

Jotkin itseisarvoyhtälöt ja -epäyhtälöt ratkeavat mukavasti kolmioepäyhtälön avulla.

Esimerkki 3 Ratkaise yhtälö

$$|x-1| + |x-3| = 1.$$

Kolmioepäyhtälön mukaan

$$|x-1| + |x-3| = |x-1| + |3-x| \geq |(x-1)+(3-x)| = |2| = 2,$$

joten vasen puoli ei voi olla 1. Siis yhtälöllä ei ole ratkaisua. Ks. myös teht. 27.

Olemme yllä käyttäneet vain kolmioepäyhtälön jälkimmäistä osaa. Sitä sovelletaankin useammin kuin edellistä osaa. Käsittelemme lopuksi esimerkin, jossa käytetään edellistä osaa.

Esimerkki 4 Tiedetään, että $|x| \geq a$. Määritä lausekkeelle $|x-1|$ alaraja.

Jos $a \leq 1$, niin $x = 1$ on mahdollinen, jolloin meidän täytyy tyytyä trivaaliin alarajaan 0. Jos $a > 1$, niin kolmioepäyhtälön mukaan

$$|x-1| \geq ||x|-1|.$$

Koska $|x| \geq a > 1$, on $||x|-1| = |x|-1 \geq a-1$. Näin ollen

$$|x-1| \geq a-1.$$

Saatu alaraja on kummassakin tapauksessa paras mahdollinen.

Harjoitustehtäviä

21. Todista lemman 1 b- ja c-kohdat.

22. Täydennä lauseen 2 todistus perustelemalla yhtäsuuruusehto.

23. Esitä kolmioepäyhtälölle vaihtoehtoinen todistus laskemalla yhteen epäyhtälöt $-|a| \leq a \leq |a|$ ja $-|b| \leq b \leq |b|$, jolloin saat (miten?) kolmioepäyhtälön jälkimmäisen osan. Edellisen osan saamiseksi sijoita tähän a:n paikalle $a+b$ ja b:n paikalle $-b$. Miten jatkat?

24. Esitä kolmioepäyhtälölle toinen vahtoehtoinen todistus käsittelemällä erikseen tapaukset (1) $a = 0$ tai $b = 0$, (2) a ja b ovat samanmerkkiset, (3) a ja b ovat erimerkkiset.

25. Käsittele esimerkin 1 alarajaa koskeva osa.

26. Osoita, että esimerkissä 2 saadut rajat ovat parhaat mahdolliset.

27. Osoita yksinkertaisella geometrisella tarkastelulla, että esimerkin 3 yhtälöllä ei ole ratkaisua.

28. Todista:

a) Jos $|x - a| < r$ ja $|a| < 1$, niin $|x + 3a| < r + 4$.

b) Jos lisäksi $|x - a| > s$, niin $|x + 3a| > s - 4$.

29. Ratkaise yhtälö

a) $|x + 1| + |x + 2| + |x + 3| = |3x + 6|$,

b) $|x + 1| + |x + 2| + |x - 3| = 3|x|$.

30. Todista: Jos $|x| < \frac{1}{2}$, niin

$$\left|\frac{x}{1-x}\right| < 1.$$

1.4 Reaalifunktioista

Olkoot X ja Y epätyhjiä reaalilukujoukkoja. (Oikeastaan ne saavat olla mitä tahansa epätyhjiä joukkoja, mutta me rajoitumme reaaliarvoisiin yhden muuttujan reaalifunktioihin.) *Funktio* $f : X \to Y$ liittää *määrittelyjoukon* X jokaiseen alkioon x *maalijoukon* Y täsmälleen yhden alkion y, jolloin merkitsemme $y = f(x)$. Sanomme, että y on x:n *kuva* ja x on y:n *alkukuva*. Sanomme myös, että x *kuvautuu* y:lle. Määrittelyjoukon jokaisella alkiolla on siis täsmälleen yksi kuva, kun taas maalijoukon alkiolla voi olla alkukuvia yksi tai enemmän tai ei yhtään. Sanomme vielä, että x on *muuttujan arvo* ja y on *funktion arvo*.

Joukon $A \subseteq X$ *kuva* $f(A)$ on sen alkioiden kuvien joukko

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}.$$

Funktion f *arvojoukko* on määrittelyjoukon kuva

$$f(X) = \{f(x) \,|\, x \in X\}.$$

Arvojoukko on siis funktion kaikkien arvojen joukko ja se on maalijoukon (mahdollisesti aito) osajoukko.

Funktiolla voi olla *sääntö*, joka ilmoittaa, miten $f(x)$ saadaan, kun x on annettu. Koulumatematiikassa tarkastellaan enimmäkseen sellaisia funktioita, joiden sääntö voidaan esittää analyyttisena lausekkeena, kuten esimerkiksi $f(x) = 2x + 3$. Näin ei kuitenkaan aina ole, jolloin sääntö saattaa olla esitettävissä muunlaisella *algoritmilla*. Tällaisia funktioita ovat esimerkiksi *lattiafunktio* $\lfloor x \rfloor$ = suurin kokonaisluku, joka $\leq x$, ja *Dirichlet'n funktio* $f(x) = 1$, kun $x \in \mathbb{Q}$, $f(x) = 0$, kun $x \notin \mathbb{Q}$.

Onko kaikilla funktioilla sääntö? Toisin sanoen, voidaanko jokainen ”vastaavuus” esittää algoritmilla? Meidän on ensiksi pohdittava, mitä ”vastaavuus” oikeastaan tarkoittaa. Tarkastelemme tulojoukon $X \times Y$ sellaista osajoukkoa f, jolle pätee: Kaikilla $x \in X$ on täsmälleen yksi sellainen $y \in Y$, että $(x, y) \in f$. Määrittelemme, että funktio $f : X \to Y$ on tämä osajoukko f, jolloin ”vastaavuudesta” ei tarvitse puhua mitään. Tämä on funktion täsmällinen määritelmä. Siis funktio tulee tavallaan määritellyksi ”kuvaajan kautta”.

Kaikki (tietyn kieliset äärelliset) algoritmit muodostavat numeroituvan joukon, kun taas esimerkiksi kaikkien funktioiden $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ joukko on ylinumeroituva. Määrittelemme nämä käsitteet tehtävässä 40. Havainnollisesti numeroituvuus tarkoittaa sitä, että joukon alkioille voidaan antaa ”järjestysnumerot” 1, 2, 3, jne, joita mahdollisesti tarvitaan ääretön määrä. Ylinumeroituvuus puolestaan tarkoittaa sitä, että näin ei voida menetellä, koska alkioita on ”liikaa”. Koska funktioita on siis ”enemmän” kuin algoritmeja, kaikilla funktioilla ei ole sääntöä.

Määrittelemme nyt kolme tärkeää funktion $f : X \to Y$ lajia.

Injektio. Funktio f on *injektio*, jos eri alkiot kuvautuvat eri alkioille eli

$$x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Toisin sanoen

$$f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2.$$

Tällöin Y:n jokainen alkio on X:n *enintään* yhden alkion kuva. Jos f ei ole injektio, niin valitsemalla sopiva $X' \subset X$ saadaan injektio $f' : X' \to Y$: $f'(x) = f(x)$. Sanomme, että f' on f:n *rajoittuma* joukkoon X'.

Surjektio. Funktio f on *surjektio*, jos sen arvojoukko on sama kuin maalijoukko eli

$$Y = f(X).$$

Tällöin Y:n jokainen alkio on X:n *vähintään* yhden alkion kuva. Jos f ei ole surjektio, niin valitsemalla sopiva $Y' \subset Y$ saadaan surjektio $f' : X \to Y' : f'(x) = f(x)$.

Bijektio. Funktio f on *bijektio*, jos se on sekä injektio että surjektio. Tällöin Y:n jokainen alkio on X:n *täsmälleen* yhden alkion kuva. Toisin sanoen jokaista $y \in Y$ vastaa täsmälleen yksi sellainen $x \in X$, että $y = f(x)$. Tämä vastaavuus määrittelee funktion f *käänteisfunktion* $f^{-1} : Y \to X$, jolloin

$$x = f^{-1}(y) \iff y = f(x).$$

Esimerkki 1 *Neliöfunktio* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = x^2$ ei ole injektio, sillä esimerkiksi $f(1) = f(-1)$. Funktion f rajoittuma ei-negatiivisten reaalilukujen joukkoon $\mathbb{R}_{+0}$ eli funktio $g(x) : \mathbb{R}_{+0} \to \mathbb{R} : g(x) = f(x)$ on injektio. Funktio f ei myöskään ole surjektio, sillä esimerkiksi -1 ei ole minkään alkion kuva. Funktio $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{+0} : h(x) = f(x)$ on surjektio. Funktio $k : \mathbb{R}_{+0} \to \mathbb{R}_{+0} : k(x) = f(x)$ on bijektio. Määrittelemme, että *neliöjuurifunktio* on k:n käänteisfunktio $k^{-1} : \mathbb{R}_{+0} \to \mathbb{R}_{+0} : x = y^2$, ja merkitsemme $y = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = y^2$ $(x, y \geq 0)$.

Jos $f : X \to Y$ on surjektio, niin on tapana sanoa, että f on funktio jouko*lta* X jouko*lle* Y. Yleisessä tapauksessa f on funktio jouko*lta* X joukk*oon* Y. Sanomme myös, että f on jouko*ssa* X määritelty reaalifunktio, mutta jos X on väli I, niin puhummekin väli*llä* I määritellystä reaalifunktiosta.

Määrittelemme kasvavan, vähenevän, aidosti kasvavan, aidosti vähenevän, monotonisen ja rajoitetun funktion käsitteet tavanomaisesti. Siis miten?

Lause 3 *Välillä I määritelty jatkuva reaalifunktio f on injektio, jos ja vain jos se on aidosti monotoninen.*

Todistus ”Jos”-suunta. Oletamme, että f on aidosti monotoninen, ja väitämme, että se on injektio. Olkoon $x_1, x_2 \in I$, $x_1 \neq x_2$. Yleisyyttä rajoittamatta voimme sopia, että $x_1 < x_2$. Tällöin $f(x_1) < f(x_2)$, jos f on aidosti kasvava, ja $f(x_1) > f(x_2)$, jos f on aidosti vähenevä. Kummassakin tapauksessa $f(x_1) \neq f(x_2)$, joten f on injektio.

”Vain jos”-suunta. Oletamme, että f on injektio, ja väitämme, että se on aidosti monotoninen. Käytämme epäsuoraa todistusta. Teemme vastaoletuksen, että f ei ole aidosti monotoninen. Tällöin on olemassa sellaiset

$x_1, x_2, x_3 \in I$, että $x_1 < x_2 < x_3$ ja $f(x_2) \leq f(x_1), f(x_3)$ tai $f(x_2) \geq f(x_1), f(x_3)$. Jos yksikin yhtäsuuruus pätee, niin f ei ole injektio, joten joko $f(x_2) < f(x_1), f(x_3)$ tai $f(x_2) > f(x_1), f(x_3)$. Voimme rajoitukset-ta olettaa edellisen, sillä saamme jälkimmäisen palautetuksi siihen tarkastelemalla funktiota $-f$. Olkoon m pienempi luvuista $(f(x_1) + f(x_2))/2$ ja $(f(x_2) + f(x_3))/2$. Jatkuvana funktiona f saa välillä $]x_1, x_2[$ arvoikseen (ainakin) kaikki välin $]f(x_2), f(x_1)[$ luvut ja välillä $]x_2, x_3[$ välin $]f(x_2), f(x_3)[$ luvut. Koska m kuuluu kumpaankin väliin ja koska nämä välit ovat erilliset, f saa arvon m (ainakin) kahdella x:n arvolla. Siis f ei ole injektio, mikä on ristiriidassa oletuksen kanssa. ■

Lause 4 *Jatkuva funktio $f : I \to \mathbb{R}$, missä I on väli, on surjektio, jos ja vain jos se ei ole ylhäältä eikä alhaalta rajoitettu.*

Todistus *"Jos"-suunta.* Olkoon $y \in \mathbb{R}$. Osoitamme, että on olemassa $x \in \mathbb{R}$, jolle $y = f(x)$. Oletuksen mukaan f saavuttaa jonkin y:tä suuremman arvon M ja jonkin y:tä pienemmän arvon m. Jatkuvana funktiona f saa kaikki välin $[m, M]$ arvot, erityisesti arvon y, koska se on tällä välillä.

"Vain jos"-suunta. Surjektiona f saa kaikki reaaliarvot, joten tämä suunta on triviaalisti voimassa. ■

Esimerkki 2 *Kuutiofunktio* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = x^3$ on injektio. Nimittäin $f'(x) = 3x^2 \geq 0$ ja yhtäsuuruus pätee vain yksittäisessä pisteessä $x = 0$, joten f on aidosti kasvava. Tämä funktio on myös surjektio, sillä se on jatkuva ja saa mielivaltaisen suuria ja pieniä arvoja, koska $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ ja $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. Määrittelemme, että *kuutiojuurifunktio* on f:n käänteisfunktio $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x = y^3$, ja merkitsemme $y = \sqrt[3]{x} \Leftrightarrow x = y^3$.

Harjoitustehtäviä

31. Olkoon $X = [2, \infty[$ ja $Y = [0, \infty[$ Osoita, että funktio

$$f : X \to Y : f(x) = x^2 - 4x + 4$$

on bijektio, ja määritä sen käänteisfunktio.

32. **a)** Osoita, että lause 3 ei ole voimassa, jos f:ää ei oleteta jatkuvaksi.

b) Onko se silloin voimassa jompaankumpaan suuntaan?

33. Kuten edellinen tehtävä, mutta tarkastellaan lausetta 4.

34. Yleistä esimerkit 1 ja 2 koskemaan *potenssifunktiota* $f(x) = x^n$, missä **a)** $n \in \mathbb{Z}_+$, **b)** $n \in \mathbb{Z}_-$.

35. Joukon $X(\neq \emptyset)$ *identtinen funktio* on $\mathrm{id}_X : X \to X : \mathrm{id}_X(x) = x$.

a) Jos $f : X \to Y$ on funktio, niin mitä on i) $f \circ \mathrm{id}_X$, ii) $\mathrm{id}_Y \circ f$?

b) Jos $f : X \to Y$ on bijektio, niin mitä on i) $f \circ f^{-1}$, ii) $f^{-1} \circ f$?

Tässä $\circ$ tarkoittaa funktioiden yhdistämistä.

36. Olkoot $f : X \to Y$ ja $g : Y \to Z$ bijektioita. Osoita, että

a) $(f^{-1})^{-1} = f$, **b)** $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

37. Anna esimerkki sellaisesta bijektiosta $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, joka $\neq \mathrm{id}_\mathbb{R}$ ja jolle $f = f^{-1}$.

38. Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijektio. Mitä voidaan sanoa käyristä

a) $y = f(x)$ ja $x = f^{-1}(y)$, **b)** $y = f(x)$ ja $y = f^{-1}(x)$

toisiinsa verrattuina?

39. Todista oikeaksi tai vääräksi

a) Jos f ja g ovat bijektioita $X \to Y$, niin myös i) $f + g$, ii) fg on bijektio $X \to Y$.

b) Jos f on bijektio $X \to Y$ ja g on bijektio $Y \to Z$, niin $g \circ f$ on bijektio $X \to Z$.

40. Joukko A on *numeroituva*, jos se on äärellinen tai jos on olemassa bijektio $A \to \mathbb{Z}_+$. Muulloin A on *ylinumeroituva*.

a) Osoita, että joukko $\mathbb{Z}$ on numeroituva. (Siis muodosta bijektio $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_+$.)

b) Selvitä kirjallisuuden perusteella (esim. [1, 6, 9]), miten todistetaan, että joukko i) $\mathbb{Q}$ on numeroituva, ii) $\mathbb{R}$ on ylinumeroituva.

2 Funktion raja-arvo

2.1 Raja-arvon määritelmä

Sovimme, että (ellei toisin mainita) yhden muuttujan lausekkeen esittämän funktion f määrittelyjoukko M_f on laajin sellainen reaalilukujoukko, jossa tämä lauseke on määritelty. Jos esimerkiksi $f(x) = 1/x$, niin $M_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Olkoon $a \in \mathbb{R}$ ja $r > 0$. Pisteen (siis x-akselin pisteen) a *r-säteinen ympäristö* eli lyhemmin *r-ympäristö* on väli $]a-r, a+r[= \{x \in \mathbb{R} \mid |x-a| < r\}$. Tämän pisteen *oikeanpuolinen* (vastaavasti *vasemmanpuolinen*) *r-ympäristö* on väli $[a, a+r[$ (vastaavasti $]a-r, a]$).

Olkoon funktio f määritelty pisteen a eräässä ympäristössä tätä pistettä mahdollisesti lukuunottamatta. Havainnollinen määritelmä sille, että funktion f raja-arvo $\lim_{x\to a} f(x) = b$, on, että $f(x)$ saadaan "mielivaltaisen lähelle" b:tä aina, kun $x(\neq a)$ valitaan "tarpeeksi läheltä" a:ta. Toisin sanoen $f(x)$:n ja b:n välinen *etäisyys* $|f(x) - b|$ saadaan tällöin "mielivaltaisen pieneksi".

Täsmällisen määritelmän esittämistä varten palautamme aluksi mieleen pienimmän ylärajan $s = \sup A$ epsilon-ominaisuuden: Kun $\varepsilon > 0$ on annettu, löytyy sellainen $x_\varepsilon \in A$, että $x_\varepsilon > s - \varepsilon$. Havainnollisesti tämä tarkoittaa sitä, että A:n alkioita on "mielivaltaisen lähellä" lukua s. Voimme kirjoittaa tämän myös muotoon (α) $s - x_\varepsilon < \varepsilon$.

Jos s ei olekaan A:n yläraja, niin sen, että A:n alkioita on "mielivaltaisen lähellä" s:ää, täsmällinen ilmaisu on muuten sama kuin edellä paitsi epäyhtälön (α) tilalla on (β) $|x_\varepsilon - s| < \varepsilon$. Jos $s \in A$, niin triviaalisti $x_\varepsilon = s$ kelpaa kaikille ε:lle. Jos $s \notin A$, niin tilanne on kiinnostavampi, jolloin x_ε riippuu ε:sta. Tällöin epäyhtälö (β) tarkentuu muotoon $0 < |x_\varepsilon - s| < \varepsilon$.

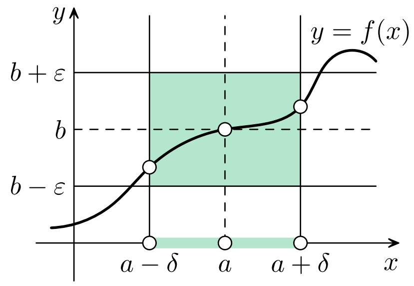
Se, että $f(x)$ saadaan "mielivaltaisen lähelle" b:tä, täsmennetään vastaavasti. Näin saamme raja-arvolle seuraavan määritelmän, jonka alkuosa on täsmällinen. Kun $\varepsilon > 0$ on annettu, on $|f(x) - b| < \varepsilon$ aina, kun $x(\neq a)$ on "tarpeeksi lähellä" a:ta. "Tarpeeksi lähellä" puolestaan tarkoittaa täsmällisesti, että x rajataan a:n tiettyyn ympäristöön, jonka säde δ_ε riippuu yleensä ε:sta (mitä pienempi ε sitä pienempi δ_ε). Täsmennämme loppuosan tällä tavalla.

Funktion raja-arvo. Olkoon funktio f määritelty pisteen a eräässä ympäristössä tätä pistettä mahdollisesti lukuunottamatta. Tällä funktiolla on pisteessä a *raja-arvo* $\lim_{x\to a} f(x) = b$, jos seuraavat toimenpiteet voidaan aina tehdä:

1. Valitaan mielivaltainen positiiviluku ε.

2. Etsitään sellainen positiiviluku δ_ε, että kaikki ne x:n arvot, jotka toteuttavat kaksoisepäyhtälön $0 < |x - a| < \delta_\varepsilon$, toteuttavat myös epäyhtälön $|f(x) - b| < \varepsilon$. Toisin sanoen

$$0 < |x - a| < \delta_\varepsilon \Longrightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$



Esimerkki 1 Osoita, että

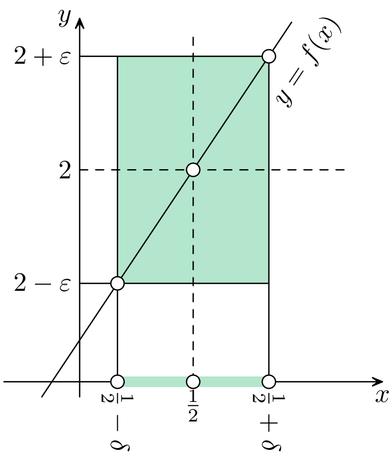
$$\lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{4x^2 - 1}{2x - 1} = 2.$$

Tarkastelemme siis funktiota

$$f(x) = \frac{4x^2 - 1}{2x - 1},$$

jolle $M_f = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$. Koska $4x^2 - 1 = (2x - 1)(2x + 1)$, voimme esittää f:n säännön myös muodossa

$$f(x) = 2x + 1 \quad (x \neq \tfrac{1}{2}).$$



1. Valitsemme mielivaltaisen positiiviluvun ε. Sama lyhyesti: Olkoon $\varepsilon > 0$.

2. Etsimme sellaisen positiiviluvun δ_ε, että

$$0 < |x - \tfrac{1}{2}| < \delta_\varepsilon \Longrightarrow |(2x+1) - 2| = |2x - 1| < \varepsilon.$$

Kyseessä ei ole sen kummempi asia kuin epäyhtälön $|2x - 1| < \varepsilon$ ratkaiseminen. Saamme (ilman ehtoa $x \neq \frac{1}{2}$)

$$|2x - 1| < \varepsilon \iff -\varepsilon < 2x - 1 < \varepsilon \iff -\tfrac{1}{2}\varepsilon < x - \tfrac{1}{2} < \tfrac{1}{2}\varepsilon \iff |x - \tfrac{1}{2}| < \tfrac{1}{2}\varepsilon.$$

Etenemme tässä ekvivalenssiketjussa oikealta vasemmalle ehdolla $x \neq \frac{1}{2}$. Meidän on korvattava epäyhtälö $|x - \frac{1}{2}| < \frac{1}{2}\varepsilon$ kaksoisepäyhtälöllä

$$0 < |x - \tfrac{1}{2}| < \tfrac{1}{2}\varepsilon.$$

Tällöin ekvivalenssiketju muuttuu implikaatioketjuksi, josta saamme

$$0 < |x - \tfrac{1}{2}| < \tfrac{1}{2}\varepsilon \implies |2x - 1| < \varepsilon.$$

Siis $\delta_\varepsilon = \frac{1}{2}\varepsilon$ kelpaa. Yhtä hyvin kelpaa mikä tahansa tätä pienempi positiiviluku.

Esimerkki 2 Osoita, että

$$\lim_{x \to 5} \frac{x+1}{2} = 3.$$

Funktion $f(x) = \frac{1}{2}(x+1)$ jatkuvuudesta seuraisi triviaalisti, että tämä raja-arvo on $f(5) = 3$. Meillä on kuitenkin toistaiseksi käytettävissä vain raja-arvon määritelmä, joten todistuksen täytyy perustua siihen. Olkoon $\varepsilon > 0$. Etsimme vaadittavan δ_ε:n. Vaikka se riippuu ε:sta, on tapana jättää alaindeksi kirjoittamatta ja siis merkitä tätä lukua δ:lla. Koska

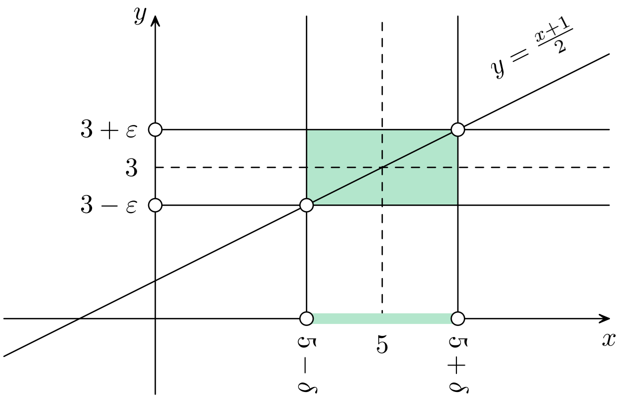
$$\left|\frac{x+1}{2} - 3\right| < \varepsilon \iff \left|\frac{x-5}{2}\right| < \varepsilon \iff \frac{|x-5|}{2} < \varepsilon \iff |x - 5| < 2\varepsilon,$$

meille kelpaa $\delta = 2\varepsilon$, jolloin itse asiassa pätee yhtäpitävyys

$$|x - 5| < 2\varepsilon \iff \left|\frac{x+1}{2} - 3\right| < \varepsilon.$$

Myös jokainen kaksoisepäyhtälön $0 < \delta < 2\varepsilon$ toteuttava luku δ kelpaa, jolloin

$$|x - 5| < \delta \Longrightarrow \left|\frac{x+1}{2} - 3\right| < \varepsilon.$$



Toispuoliset raja-arvot. Olkoon f nyt määritelty (ainakin) pisteen a eräässä oikeanpuolisessa (vastaavasti vasemmanpuolisessa) ympäristössä tätä pistettä mahdollisesti lukuunottamatta. Tällä funktiolla on pisteessä a *oikeanpuolinen* (vastaavasti *vasemmanpuolinen*) *raja-arvo* $\lim_{x\to a+} f(x) = b$ (vastaavasti $\lim_{x\to a-} f(x) = b$), jos seuraavat toimenpiteet voidaan aina tehdä.

1. Valitaan mielivaltainen positiiviluku ε.

2. Etsitään sellainen positiiviluku δ_ε, että kaikki ne x:n arvot, jotka toteuttavat kaksoisepäyhtälön $a < x < a+\delta_\varepsilon$ (vastaavasti $a-\delta_\varepsilon < x < a$), toteuttavat myös epäyhtälön $|f(x) - b| < \varepsilon$. Toisin sanoen

$$a < x < a + \delta_\varepsilon \Longrightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

(vastaavasti

$$a - \delta_\varepsilon < x < a \Longrightarrow |f(x) - b| < \varepsilon).$$

Tavanomaisessa määritelmässä ”tarpeeksi lähellä” tarkoittaa ehdon

$$0 < |x - a| < \delta_\varepsilon$$

toteutumista. Nyt rajoitumme niihin pisteisiin, jotka toteuttavat tämän ehdon ja ovat a:n oikealla (vastaavasti vasemmalla) puolella. Näin saamme lievemmät ehdot.

Esimerkki 3 Todista:

a) Raja-arvo

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{|x|}$$

ei ole olemassa.

b) Vastaavat toispuoliset raja-arvot ovat

$$\lim_{x\to 0-} \frac{x}{|x|} = -1, \quad \lim_{x\to 0+} \frac{x}{|x|} = 1.$$

Tarkasteltava funktio

$$f(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} -1, & \text{kun}\, x < 0, \\ 1, & \text{kun}\, x > 0. \end{cases}$$

a) Teemme vastaoletuksen, että $b = \lim_{x\to 0} f(x)$ on olemassa. Valitsemme raja-arvon määritelmässä $\varepsilon = 1$, jolloin löytyy sellainen $\delta > 0$, että

$$0 < |x - 0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - b| < 1$$

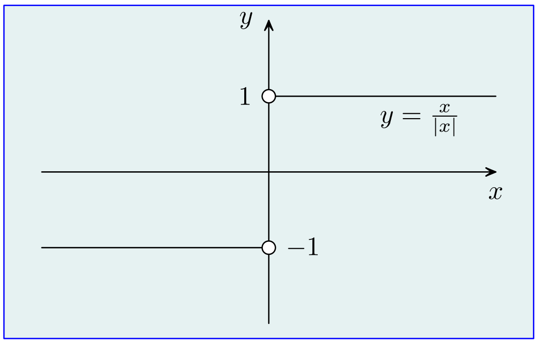
eli

$$x \neq 0 \wedge |x| < \delta \Longrightarrow |f(x) - b| < 1.$$

Tämä pätee erityisesti luvuille $x = \pm\delta/2$, joten

$$2 = |1 - (-1)| = |f(\frac{\delta}{2}) - f(-\frac{\delta}{2})| = |f(\frac{\delta}{2}) - b + b - f(-\frac{\delta}{2})| \leq$$
$$|f(\frac{\delta}{2}) - b| + |b - f(-\frac{\delta}{2})| < 1 + 1 = 2$$

(perustele yksityiskohdat), mikä sisältää ristiriidan $2 < 2$.



b) Olkoon $\varepsilon > 0$. Olipa $\delta > 0$ mikä tahansa, saamme

$$-\delta < x < 0 \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - (-1)| = |(-1) - (-1)| = 0 < \varepsilon,$$

$$0 < x < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - 1)| = |1 - 1| = 0 < \varepsilon,$$

mistä väitös seuraa.

Harjoitustehtäviä

41. Todista:

a) Vakiofunktion $f(x) = c$ raja-arvo jokaisessa pisteessä on c.

b) Identtisen funktion $f(x) = x$ raja-arvo pisteessä a on a.

42. Määritä raja-arvo

$$\textbf{a)}\ \lim_{x\to 5}(x-2), \quad \textbf{b)}\ \lim_{x\to -3} 7x, \quad \textbf{c)}\ \lim_{x\to -2}(2x+1),$$

$$\textbf{d)}\ \lim_{x\to -2}(-3x+4), \quad \textbf{e)}\ \lim_{x\to 2}\frac{x}{3}.$$

Todista tulokset raja-arvon määritelmän perusteella.

43. Kuten edellinen tehtävä, mutta tarkastellaan raja-arvoja

$$\textbf{a)}\ \lim_{x\to -2}\frac{3-5x}{4}, \quad \textbf{b)}\ \lim_{x\to a}(x+b), \quad \textbf{c)}\ \lim_{x\to a}(x-a),$$

$$\textbf{d)}\ \lim_{x\to 0} x^2, \quad \textbf{e)}\ \lim_{x\to 0+}\sqrt{x}.$$

44. Olkoon funktio f määritelty pisteen a eräässä ympäristössä tätä pistettä mahdollisesti lukuunottamatta. Todista: Jos f:llä on raja-arvo pisteessä a, niin se on yksikäsitteinen. Toisin sanoen: Jos $\lim_{x\to a} f(x) = b$ ja $\lim_{x\to a} f(x) = c$, niin $b = c$. Ohjeita: Tee vastaoletus, että $b \neq c$. Valitse $\varepsilon = \frac{1}{2}|b-c|$. Tällöin on olemassa sellaiset positiiviluvut δ_1 ja δ_2, että

$$0 < |x-a| < \delta_1 \Longrightarrow |f(x)-b| < \tfrac{1}{2}|b-c|,$$
$$0 < |x-a| < \delta_2 \Longrightarrow |f(x)-c| < \tfrac{1}{2}|b-c|.$$

Merkitse $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Kun $0 < |x-a| < \delta$, saat ristiriidan. Miten?

45. Olkoon f kuten edellä. Osoita, että

$$\lim_{x\to a} f(x) = b,$$

jos ja vain jos

$$\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a-} f(x) = b.$$

46. Olkoon f kuten edellä. Todista: Jos $\lim_{x\to a} f(x)$ on olemassa, niin a:lla on sellainen ympäristö (mahdollisesti a poistettuna), jossa f on rajoitettu. Ohjeita: Olkoon b tämä raja-arvo. Valitse raja-arvon määritelmässä $\varepsilon = 1$. Osoita, että löytyy sellainen a:n ympäristö (mahdollisesti a poistettuna), jossa $|f(x)| \leq |b| + 1$.

47. Osoita, että raja-arvo

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$$

ei ole olemassa. Ohje: Näytä, että funktio $f(x) = 1/x$ ei ole rajoitettu missään origon ympäristössä (josta on poistettu origo). Väitös seuraa silloin edellisestä tehtävästä.

48. Olkoon f kuten tehtävässä 44. Oletetaan, että $b = \lim_{x\to a} f(x)$ on olemassa. Todista:

a) Jos $b > 0$, niin pisteellä a on sellainen ympäristö, jossa (tätä pistettä mahdollisesti lukuunottamatta) $f(x) > 0$.

b) Jos $b \neq 0$, niin vastaavasti $f(x) \neq 0$.

49. Olkoot funktiot f ja g kuten tehtävässä 44.

a) Todista *epäyhtälön säilymislause*: Jos eräässä a:n ympäristössä (a:ta mahdollisesti lukuunottamatta) on $f(x) \leq g(x)$, niin

$$\lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} g(x),$$

mikäli nämä raja-arvot ovat olemassa.

b) Anna esimerkki tapauksesta, jossa $f(x) < g(x)$ tuossa ympäristössä, mutta

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x).$$

Perustelussa voit käyttää tavanomaisia raja-arvon laskusääntöjä.

50. Anna esimerkki sellaisesta joukossa $\mathbb{R}$ määritellystä funktiosta, jolla

a) ei ole raja-arvoa missään pisteessä,

b) on raja-arvo origossa mutta ei missään muualla.

2.2 Raja-arvon laskusääntöjä

Olemme nyt määritelleet funktion raja-arvon täsmällisesti, joten voimme todistaa sen tavanomaiset laskusäännöt.

Lause 5 *Olkoot funktiot f ja g määritellyt pisteen $a \in \mathbb{R}$ eräässä ympäristössä (paitsi mahdollisesti tässä pisteessä), ja olkoon*

$$\lim_{x \to a} f(x) = b, \quad \lim_{x \to a} g(x) = d.$$

Tällöin ovat voimassa seuraavat säännöt.
Summan raja-arvo on raja-arvojen summa

$$\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = b + d.$$

Tulon raja-arvo on raja-arvojen tulo

$$\lim_{x \to a} f(x)g(x) = bd.$$

Tämän erikoistapaus on vakiotekijän siirtosääntö

$$\lim_{x \to a} cf(x) = cb,$$

missä $c \in \mathbb{R}$.
Osamäärän raja-arvo on raja-arvojen osamäärä

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{d},$$

kun $d \neq 0$.

Todistus Todistamme summan ja tulon säännöt. Jätämme osamäärän säännön harjoitustehtäväksi (teht. 53).

Aloitamme summasta. Teemme ensiksi ”suttupaperiversion”. Lähdemme liikkeelle soveltamalla raja-arvon määritelmää funktioihin f ja g, jolloin voimme arvioida ylöspäin poikkeamaa $e = |f(x) + g(x) - (b + d)|$. Huomaamme, että se saadaan mielivaltaisen pieneksi, kun ollaan tarpeeksi lähellä a:ta. Sitten kirjoitamme todistuksen puhtaaksi ja siirrymme käsittelemään tuloa.

Summan suttupaperiversio. Olkoon $\varepsilon > 0$. Raja-arvon määritelmän mukaan on olemassa sellainen $\delta_1 > 0$, että $0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$. Vastaavasti on olemassa sellainen $\delta_2 > 0$, että $0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - d| < \varepsilon$.

Olkoon $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Kun $0 < |x-a| < \delta$, on $|f(x)-b| < \varepsilon$ ja $|g(x)-b| < \varepsilon$, joten kolmioepäyhtälön perusteella

$$\begin{aligned} e &= |f(x) + g(x) - (b+d)| \\ &= |f(x) - b + g(x) - d| \\ &\leq |f(x) - b| + |g(x) - d| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Emme siis saaneet e:tä raja-arvon määritelmän mukaisesti pienemmäksi kuin ε, vaan sille tuli karkeampi yläraja 2ε. Tämä ei haittaa, sillä mielivaltaisen pientä positiivilukua voidaan merkitä yhtä hyvin 2ε:lla kuin ε:lla. On kuitenkin tyylikkäämpää muotoilla todistus niin, että e tulee pienemmäksi kuin ε. Näin käy, kun järjestämme $f(x)$:n ja $g(x)$:n poikkeamat raja-arvoistaan pienemmiksi kuin $\frac{1}{2}\varepsilon$. Teemme siten puhtaaksikirjoituksessa. Samalla lisäämme todistuksen luettavuutta kirjoittamalla tärkeät kaavat omille riveilleen.

Summan lopullinen versio. Olkoon $\varepsilon > 0$. Raja-arvon määritelmän mukaan on olemassa sellainen $\delta_1 > 0$, että

$$0 < |x-a| < \delta_1 \implies |f(x) - b| < \tfrac{1}{2}\varepsilon.$$

Vastaavasti on olemassa sellainen $\delta_2 > 0$, että

$$0 < |x-a| < \delta_2 \implies |g(x) - d| < \tfrac{1}{2}\varepsilon.$$

Olkoon

$$\delta = \min(\delta_1, \delta_2).$$

Kun $0 < |x-a| < \delta$, on $|f(x) - b| < \frac{1}{2}\varepsilon$ ja $|g(x) - b| < \frac{1}{2}\varepsilon$, joten kolmioepäyhtälön perusteella

$$\begin{aligned} |f(x) + g(x) - (b+d)| &= |f(x) - b + g(x) - d| \\ &\leq |f(x) - b| + |g(x) - d| \\ &< \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon. \end{aligned}$$

Raja-arvon määritelmän vaatimukset ovat siis toteutetut.

Tulon suttupaperiversio. Aloitamme kuten edellä, mutta nyt joudumme arvioimaan poikkeamaa $e = |f(x)g(x) - bd|$. Summan tapauksessa pääsimme helposti eteenpäin kolmioepäyhtälön avulla, mutta miten voimme nyt hyödyntää sitä, että $|f(x)-b| < \varepsilon$ ja $|g(x)-d| < \varepsilon$, kun $0 < |x-a| < \min(\delta_1, \delta_2)$? Meidän on saatava tällaiset epäyhtälöt mukaan. Siksi lisäämme ja vähennämme e:n itseisarvomerkkien sisällä luvun $bg(x)$. Näin saamme

$$\begin{aligned} e = |f(x)g(x) - bd| &= |f(x)g(x) - bg(x) + bg(x) - bd| \\ &\leq |f(x)g(x) - bg(x)| + |bg(x) - bd| \\ &= |g(x)||f(x) - b| + |b||g(x) - d|. \end{aligned}$$

Jälkimmäinen yhteenlaskettava on ongelmaton, mutta edellisessä täytyy päästä eroon $|g(x)|$:ssä olevasta x:stä. Tämä onnistuu sillä (teht. 46) löytyy sellainen $\delta_0 > 0$, että $0 < |x-a| < \delta_0 \Rightarrow |g(x)| \leq |d| + 1$. Olkoot δ_1 ja δ_2 kuten summan suttupaperiversiossa, ja olkoon $\delta = \min(\delta_0, \delta_1, \delta_2)$. Kun $0 < |x-a| < \delta$, on

$$e < (|d| + 1)\varepsilon + |b|\varepsilon = (|b| + |d| + 1)\varepsilon,$$

ja $(|b| + |d| + 1)\varepsilon$ saadaan mielivaltaisen pieneksi.

Tulon lopullinen versio. Tehtävän 46 perusteella on olemassa sellainen $\delta_0 > 0$, että

$$0 < |x-a| < \delta_0 \implies |g(x)| \leq |d| + 1.$$

Olkoon $\varepsilon > 0$. Raja-arvon määritelmän mukaan löytyy sellaiset $\delta_1, \delta_2 > 0$, että

$$\begin{aligned} 0 < |x-a| < \delta_1 &\implies |f(x) - b| < \frac{\varepsilon}{2(|d|+1)}, \\ 0 < |x-a| < \delta_2 &\implies |g(x) - d| < \frac{\varepsilon}{2(|b|+1)}. \end{aligned}$$

(Jos viimeinen nimittäjä olisi $2|b|$, niin tapaus $b = 0$ pitäisi käsitellä erikseen.) Olkoon $\delta = \min(\delta_0, \delta_1, \delta_2)$. Kun $0 < |x-a| < \delta$, on

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - bd| &= |f(x)g(x) - bg(x) + bg(x) - bd| \\ &\leq |f(x)g(x) - bg(x)| + |bg(x) - bd| \\ &= |g(x)||f(x) - b| + |b||g(x) - d| \\ &< (|d|+1)\frac{\varepsilon}{2(|d|+1)} + |b|\frac{\varepsilon}{2(|b|+1)} \\ &< \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon, \end{aligned}$$

mikä oli todistettava. ■

Seurauslause 1 *Olkoon $a \in \mathbb{R}$, ja olkoot p ja q polynomifunktoita. Tällöin*

$$\lim_{x \to a} p(x) = p(a), \quad \lim_{x \to a} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(a)}{q(a)},$$

kun $q(a) \neq 0$.

Todistus Teht. 55. ■

Harjoitustehtäviä

51. Osoita raja-arvon **a)** täsmällisen määritelmän, **b)** laskusääntöjen perusteella, että
$$\lim_{x\to 0}\frac{2+x}{2-x}=1.$$

52. Vakiotekijän siirtosääntö on helppo todistaa erikseen (siis pitämättä sitä tulon raja-arvon säännön erikoistapauksena). Miten?

53. Todista osamäärän raja-arvon sääntö. Ohjeita: Ensiksi totea (teht. 48b), että $g(x)\neq 0$ eräässä a:n ympäristössä (paitsi mahdollisesti a:ssa). Toiseksi näytä, että
$$\lim_{x\to a}\frac{d}{g(x)}=1.$$
Kolmanneksi kirjoita
$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{1}{d}f(x)\frac{d}{g(x)}$$
ja käytä tulon raja-arvon sääntöä.

54. Olkoon $a\in\mathbb{R}$ ja $n\in\mathbb{Z}$. Osoita, että
$$\lim_{x\to a}x^n=a^n,$$
kun $a\neq 0$ tapauksessa $n\leq 0$. Ohje: Käsittele ensin tapaus $n\geq 0$ induktiolla ja sitten tapaus $n<0$ osamäärän raja-arvon säännöllä.

55. Todista seurauslause 1.

56. Lause 5 pätee myös toispuolisille raja-arvoille. Miten sen todistusta on tällöin muutettava?

57. Olkoon $a\in\mathbb{R}_+$. Osoita, että
$$\lim_{x\to a}\sqrt{x}=\sqrt{a}.$$
Ohje: Arvioidessasi poikkeamaa $|\sqrt{x}-\sqrt{a}|$ lavenna $(\sqrt{x}+\sqrt{a})$:lla.

58. Olkoon $a\in\mathbb{R}$. Osoita, että
$$\lim_{x\to a}|x|=|a|.$$
Ohje: Arvioidessasi poikkeamaa $\big||x|-|a|\big|$ käytä kolmioepäyhtälön edellistä osaa.

59. Määritä raja-arvo (mikäli se on olemassa)

$$\textbf{a)}\ \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}, \quad \textbf{b)}\ \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+|x|}-1}{x}.$$

60. Olkoot funktiot f ja g määritellyt pisteen $a \in \mathbb{R}$ eräässä ympäristössä (paitsi mahdollisesti a:ssa), ja olkoon

$$\lim_{x\to a} f(x) = b, \quad \lim_{x\to a} g(x) = 0.$$

a) Todista: Jos $b \neq 0$, niin raja-arvo

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

ei ole olemassa.

b) Jos $b = 0$, niin mitä voidaan sanoa tästä raja-arvosta vai voidaanko mitään?

2.3 Epäolennaiset raja-arvot

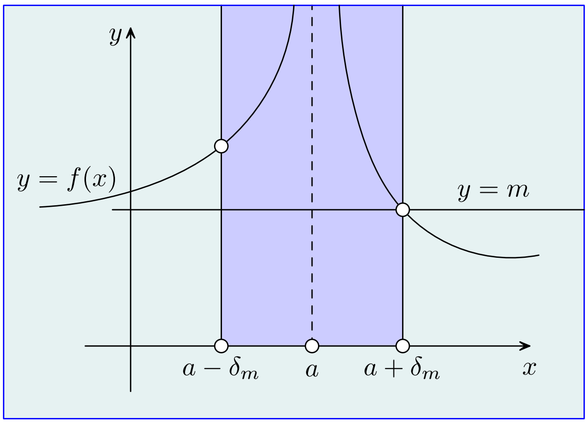
Raja-arvon täsmällisessä määritelmässä meidän piti selvittää, mitä tarkoittavat ”saadaan mielivaltaisen lähelle” ja ”on tarpeeksi lähellä”. Kun nyt määrittelemme epäolennaiset raja-arvot täsmällisesti, meidän on selvitettävä, mitä tarkoittavat ”saadaan mielivaltaisen suureksi (vastaavasti pieneksi)” ja ”on tarpeeksi suuri (vastaavasti pieni)”.

Olkoon funktio f määritelty pisteen a eräässä ympäristössä paitsi mahdollisesti tässä pisteessä. Se, että $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$, tarkoittaa havainnollisesti sitä, että $f(x)$ saadaan mielivaltaisen suureksi, kun ollaan tarpeeksi lähellä a:ta. ”Tarpeeksi lähellä” oleminen on meille jo tuttu. Se, että $f(x)$ saadaan ”mielivaltaisen suureksi”, puolestaan tarkoittaa sitä, että $f(x)$ saadaan suuremmaksi kuin mikä tahansa annettu positiiviluku. Näin saamme seuraavan määritelmän.

Raja-arvo ääretön. Olkoon funktio f määritelty pisteen a eräässä ympäristössä tätä pistettä mahdollisesti lukuunottamatta. Tällä funktiolla on pisteessä a *epäolennainen raja-arvo ääretön*, $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$, jos seuraavat toimenpiteet voidaan aina tehdä:

1. Valitaan mielivaltainen positiiviluku m.
2. Etsitään sellainen positiiviluku δ_m, että kaikki ne x:n arvot, jotka toteuttavat kaksoisepäyhtälön $0 < |x-a| < \delta_m$, toteuttavat myös epäyhtälön $f(x) > m$. Toisin sanoen

$$0 < |x-a| < \delta_m \implies f(x) > m.$$



Funktiolla f on tässä pisteessä *epäolennainen raja-arvo miinus ääretön*, $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$, jos $-f$:llä on siinä raja-arvo ääretön. Voimme jättää sanan "epäolennainen" pois, ellei väärinkäsityksen vaaraa ole. Vaikka siis voidaan puhua raja-arvoista $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ ja $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$, täytyy muistaa, ettei f:llä tällöin ole raja-arvoa pisteessä a.

Toispuoliset epäolennaiset raja-arvot ääretön ja miinus ääretön määritellään vastaavasti toispuolisten ympäristöjen avulla.

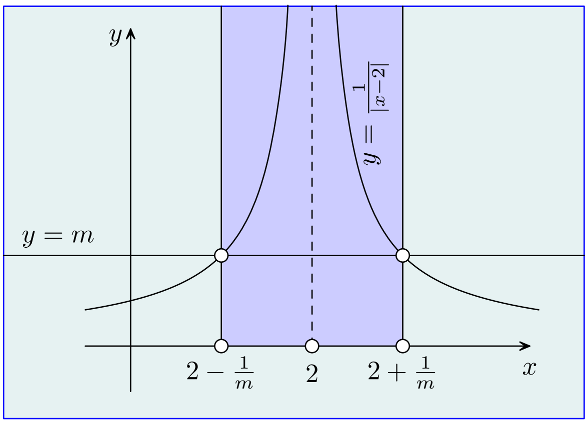
Esimerkki 1 Osoita, että

$$\textbf{a)} \lim_{x\to 2} \frac{1}{|x-2|} = \infty, \quad \textbf{b)} \lim_{x\to 2+} \frac{1}{x-2} = \infty, \quad \textbf{c)} \lim_{x\to 2-} \frac{1}{x-2} = -\infty.$$

a) Olkoon $m > 0$. Kun $x \neq 2$, on

$$\frac{1}{|x-2|} > m \iff 0 < |x-2| < \frac{1}{m},$$

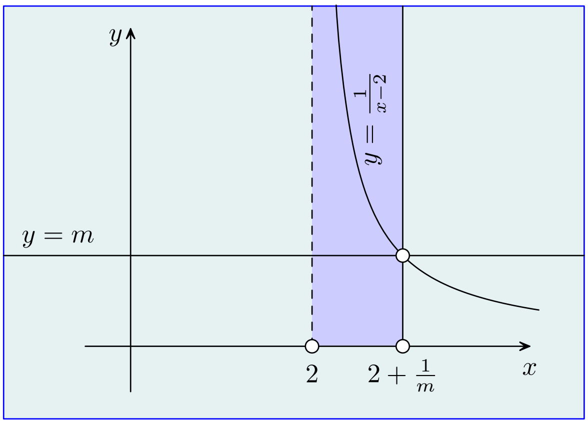
joten $\delta_m = \frac{1}{m}$ kelpaa. Yhtä hyvin kelpaa mikä tahansa tätä pienempi positiiviluku, jolloin ekvivalenssin tilalla on implikaatio oikealta vasemmalle.



b) Kun $x > 2$, on

$$\frac{1}{x-2} > m \iff 0 < x - 2 < \frac{1}{m} \iff 2 < x < 2 + \frac{1}{m},$$

joten $\delta_m = \frac{1}{m}$ kelpaa nytkin.



c) *Tapa 1.* Yhtäpitävä väite on, että

$$\lim_{x \to 2-} \frac{1}{2-x} = \infty.$$

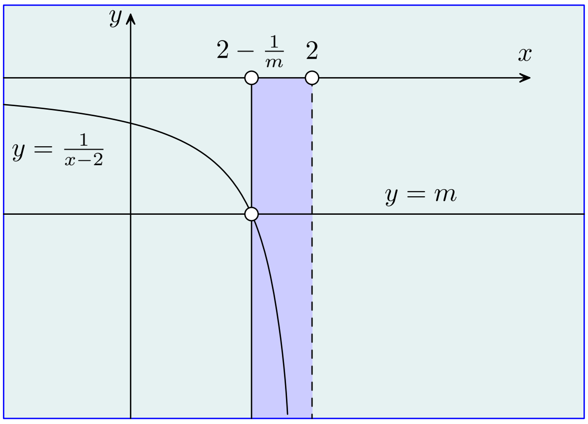
Sama δ_m kelpaa. Kun $x < 2$, on näet

$$\frac{1}{2-x} > m \iff 0 < 2 - x < \frac{1}{m} \iff 2 - \frac{1}{m} < x < 2.$$

Tapa 2. Yhtäpitävä väite on, että $1/(x-2)$ saadaan mielivaltaisen pieneksi, kun ollaan tarpeeksi lähellä pistettä $x = 2$ ja sen vasemmalla puolella. Olkoon $m < 0$. Kun $x < 2$, on

$$\frac{1}{x-2} < m \iff \frac{1}{2-x} > -m.$$

Jatketaan kuten edellä, mutta kirjoitetaan m:n paikalle luku $-m = |m|$.



Tarkastelemme seuraavaksi raja-arvoa äärettömässä. Olkoon funktio f määritelty kaikilla tiettyä lukua suuremmilla x:n arvoilla. Se, että

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b,$$

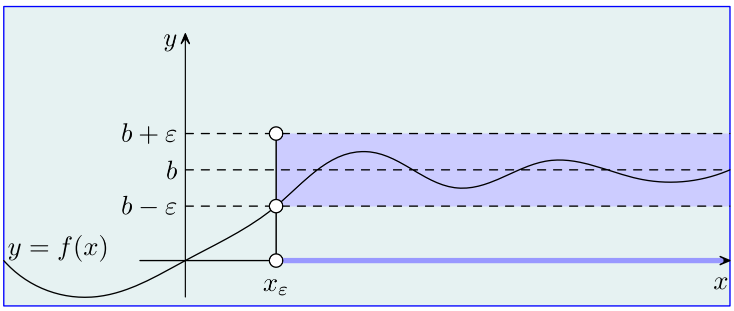
tarkoittaa havainnollisesti sitä, että $f(x)$ saadaan mielivaltaisen lähelle b:tä, kun x on tarpeeksi suuri. Täsmällinen määritelmä on siis seuraava.

Raja-arvo äärettömässä. Olkoon funktio f määritelty kaikilla tiettyä lukua suuremmilla x:n arvoilla. Tällä funktiolla on *äärettömässä epäolennainen raja-arvo* b, $\lim_{x\to\infty} f(x) = b$, jos seuraavat toimenpiteet voidaan aina tehdä.

1. Valitaan mielivaltainen positiiviluku ε.

2. Etsitään sellainen positiiviluku x_ε, että kaikki ne x:n arvot, jotka toteuttavat epäyhtälön $x > x_\varepsilon$, toteuttavat myös epäyhtälön $|f(x) - b| < \varepsilon$. Toisin sanoen

$$x > x_\varepsilon \implies |f(x) - b| < \varepsilon.$$



Funktiolla $g(x) = f(-x)$ on tällöin *miinus äärettömässä epäolennainen raja-arvo* b, $\lim_{x\to-\infty} g(x) = b$.

Jos $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = b$, niin merkitsemme lyhyesti

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) \;=\; b.$$

Esimerkki 2 Osoita, että

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{x+1} = 2.$$

Olkoon $\varepsilon > 0$. Tarkastelemme epäyhtälöä

$$\left|\frac{2x}{x+1} - 2\right| < \varepsilon$$

eli

$$\frac{2}{|x+1|} < \varepsilon,$$

jonka saamme vielä muotoon

$$|x+1| > \frac{2}{\varepsilon}.$$

Kun $x \geq -1$, on

$$|x+1| > \frac{2}{\varepsilon} \iff x+1 > \frac{2}{\varepsilon} \iff x > \frac{2}{\varepsilon} - 1.$$

Näin ollen $x_\varepsilon = 2/\varepsilon - 1$ kelpaa osoittamaan, että

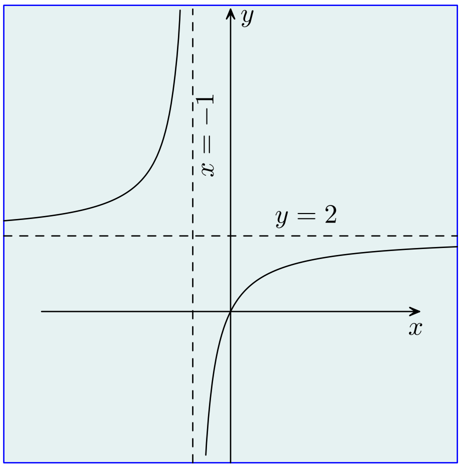
$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x}{x+1} = 2.$$

Kun $x \leq -1$, on puolestaan

$$|x+1| > \frac{2}{\varepsilon} \iff -x-1 > \frac{2}{\varepsilon} \iff x < -\frac{2}{\varepsilon} - 1.$$

Valitsemalla $x_\varepsilon = -2/\varepsilon - 1$ näemme siis, että

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{x+1} = 2.$$



Meidän on vielä määriteltävä epäolennaiset raja-arvot

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

(teht. 61).

Harjoitustehtäviä

61. Määrittele täsmällisesti se, että

a) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, **b)** $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$,

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$, **d)** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

62. Todista:

a) Vakiofunktiolle $f(x) = c$ on $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = c$.

b) Identtiselle funktiolle $f(x) = x$ on $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$, missä ylemmät merkit vastaavat toisiaan ja samoin alemmat.

63. Määritä epäolennainen raja-arvo

a) $\lim\limits_{x\to0+} \dfrac{1}{x}$, **b)** $\lim\limits_{x\to0-} \dfrac{1}{x}$, **c)** $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{x}$, **d)** $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^2$.

Todista tulokset määritelmän perusteella.

64. Kuten edellä, mutta tarkastellaan raja-arvoja

$$\textbf{a)}\ \lim_{x\to 2}\frac{1}{(x-2)^2},\quad \textbf{b)}\ \lim_{x\to 2+}\frac{1}{\sqrt{x-2}}.$$

65. Kuten edellä, mutta tarkastellaan raja-arvoja

$$\textbf{a)}\ \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{x+1},\quad \textbf{b)}\ \lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2}{x+1},\quad \textbf{c)}\ \lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x}{x^2+1}.$$

66. Todista: Jos funktiolla on raja-arvo äärettömässä, niin se on yksikäsitteinen. Vrt. teht. 44.

67. Olkoon funktio f määritelty kaikilla tiettyä lukua suuremmilla x:n arvoilla. Oletetaan, että $b = \lim_{x\to\infty} f(x)$ on olemassa. Todista:

a) Jos $b > 0$, niin on olemassa sellainen $x_0 > 0$, että

$$x > x_0 \implies f(x) > 0.$$

b) Jos $b \neq 0$, niin vastaavasti $f(x) \neq 0$.

Vrt. teht. 48.

68. Olkoot funktiot f ja g määritellyt kaikilla tiettyä lukua suuremmilla x:n arvoilla.

a) Todista: Jos $f(x) \leq g(x)$ kaikilla näillä arvoilla ja jos raja-arvot $\lim_{x\to\infty} f(x) = b$ ja $\lim_{x\to\infty} g(x) = c$ ovat olemassa, niin $b \leq c$.

b) Anna esimerkki tapauksesta, jossa $f(x) < g(x)$ kaikilla näillä arvoilla, mutta $b = c$.

Vrt. teht. 49.

69. Kuten teht. 68a, mutta **a)** $c = \infty$, **b)** $b = -\infty$. (Määrittele, että $-\infty < x < \infty$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$.)

70. Olkoon funktio f määritelty kaikilla tiettyä lukua suuremmilla x:n arvoilla, ja olkoon A sen arvojoukko.

a) Todista: Jos f on kasvava ja rajoitettu, niin $\lim_{x\to\infty} f(x) = \sup A$.

b) Mitä tapahtuu, jos f on kasvava mutta ei rajoitettu?

2.4 Epäolennaisten raja-arvojen laskusääntöjä

Vaikka merkinnöillä $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ ja $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = b$ on sisältö, "ääretön" ∞ ja "miinus ääretön" $-\infty$ eivät ole reaalilukuja, eivätkä ne sellaisinaan tarkoita toistaiseksi mitään. Kuitenkin olemme jo huomanneet (teht. 69), että määrittelemällä $-\infty < x < \infty$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$ saamme epäyhtälön säilymislauseen päteväksi myös raja-arvon ollessa $\pm\infty$ tai x:n lähestyessä "lukua" $\pm\infty$. Vastaavasti osoittautuu, että määrittelemällä näiden "lukujen" ja reaalilukujen väliset laskutoimitukset sopivasti saamme raja-arvon laskusäännöt päteviksi myös epäolennaisille raja-arvoille.

Täydennetty reaalilukujoukko. Joukko $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$ on *täydennetty reaalilukujoukko*, kun luvut *ääretön* ∞ ja *miinus ääretön* $-\infty$ (eli "äärettömät") määritellään seuraavilla aksioomilla.

(i) *Yhteenlasku reaalilukujen kanssa.* Kaikilla $a \in \mathbb{R}$ on

$$a + \infty = \infty + a = \infty, \quad a + (-\infty) = (-\infty) + a = -\infty.$$

(ii) *Kertolasku reaalilukujen kanssa.* Kaikilla $a \in \mathbb{R}_+$ on

$$a \cdot \infty = \infty \cdot a = \infty, \quad a \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot a = -\infty.$$

Kaikilla $a \in \mathbb{R}_-$ on

$$a \cdot \infty = \infty \cdot a = -\infty, \quad a \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot a = \infty.$$

Kertolaskut $0 \cdot (\pm\infty)$ ja $(\pm\infty) \cdot 0$ jätetään määrittelemättä.

(iii) *Reaaliluvun jakaminen äärettömillä.* Kaikilla $a \in \mathbb{R}$ on

$$\frac{a}{\infty} = \frac{a}{-\infty} = 0.$$

(iv) *Äärettömien yhteenlasku.*

$$\infty + \infty = \infty, \quad (-\infty) + (-\infty) = -\infty.$$

Yhteenlaskut $\infty + (-\infty)$ ja $(-\infty) + \infty$ jätetään määrittelemättä.

(v) *Äärettömien kertolasku.*

$$\infty \cdot \infty = (-\infty) \cdot (-\infty) = \infty, \quad \infty \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot \infty = -\infty.$$

Jakolaskut $(\pm\infty)/(\pm\infty)$ jätetään määrittelemättä.

Yleistäessämme raja-arvon laskusäännöt epäolennaisille raja-arvoille operoimme täydennetyssä reaalilukujoukossa $\bar{\mathbb{R}}$, joten meidän täytyy määritellä pisteiden $\pm\infty$ ympäristöt. Kun $r \in \mathbb{R}_+$, pisteen ∞ r-*ympäristö* on väli $]r, \infty] = \{x \in \bar{\mathbb{R}} \mid x > r\}$. Vastaavasti pisteen $-\infty$ r-ympäristö on $[-\infty, -r[= \{x \in \bar{\mathbb{R}} \mid x < -r\}$. (Miksi emme voi kutsua r:ää näiden ympäristöjen säteeksi?)

Yleistämme nyt lauseen 5.

Lause 6 *Olkoot funktiot f ja g määritellyt pisteen $a \in \bar{\mathbb{R}}$ eräässä ympäristössä (paitsi mahdollisesti tässä pisteessä), ja olkoon*

$$\lim_{x\to a} f(x) = b, \quad \lim_{x\to a} g(x) = d,$$

missä $b, d \in \bar{\mathbb{R}}$. Tällöin ovat voimassa seuraavat säännöt.

Summan raja-arvo on raja-arvojen summa

$$\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = b + d,$$

kun $\{b, d\} \neq \{-\infty, \infty\}$.
Tulon raja-arvo on raja-arvojen tulo

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = bd,$$

kun $\{b, d\} \neq \{0, -\infty\}, \{0, \infty\}$. Tämän erikoistapaus on vakiotekijän siirtosääntö

$$\lim_{x\to a} cf(x) = cb,$$

kun $\{b, c\} \neq \{0, -\infty\}, \{0, \infty\}$.

Osamäärän raja-arvo on raja-arvojen osamäärä

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{d},$$

kun $\{b, d\} \not\subseteq \{-\infty, \infty\}$ ja $d \neq 0$.

Todistus Kukin luvuista a, b ja d voi olla reaaliluku, ääretön tai miinus ääretön, joten jokaisen säännön todistuksessa pitäisi periaatteessa käydä läpi melkein $3^3 = 27$ eri vaihtoehtoa (miksi "melkein"?). Käytännössä monet vaihtoehdot muistuttavat toisiaan siinä määrin, että riittää käsitellä vain joitakin niistä. Todistamme summan säännön tapauksissa $a, b \in \mathbb{R}$, $d = \infty$ ja $a = \infty$, $b, d \in \mathbb{R}$. Käsittelemme pari muuta tapausta harjoitustehtävänä (teht. 71). Jätämme tulon ja osamäärän säännöt harjoitustehtäviksi (teht. 72–73).

Tapaus $a, b \in \mathbb{R}$, $d = \infty$. Väitämme siis: Jos

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \quad \text{ja} \quad \lim_{x\to a} g(x) = \infty,$$

niin

$$\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = \infty.$$

Olkoon $m > 0$. Koska $\lim_{x\to a} f(x) = b$, on olemassa sellainen $\delta_1 > 0$, että $0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - b| < 1$ eli $b - 1 < f(x) < b + 1$. (Valitsemme siis raja-arvon määritelmässä $\varepsilon = 1$.) Koska $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$, on olemassa sellainen $\delta_2 > 0$, että $0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow g(x) > m - (b - 1)$. (Kirjoitamme siis epäolennaisen raja-arvon määritelmässä m:n paikalle luvun $m - (b - 1)$.) Olkoon $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Kun $0 < |x - a| < \delta$, on

$$f(x) + g(x) > (b - 1) + m - (b - 1) = m,$$

joten väitös seuraa epäolennaisen raja-arvon määritelmästä.

Tapaus $a = \infty$, $b, d \in \mathbb{R}$. Olkoon $\varepsilon > 0$. Koska $\lim_{x\to\infty} f(x) = a$ ja $\lim_{x\to\infty} g(x) = b$, on olemassa sellaiset $x_1, x_2 > 0$, että

$$x > x_1 \implies |f(x) - b| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad x > x_2 \implies |g(x) - d| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Olkoon $x_0 = \max(x_1, x_2)$. Kun $x > x_0$, molemmat epäyhtälöt ovat toteutetut. Jatkamme kuten summan tavanomaisen säännön todistuksessa (s. 28).

■

Harjoitustehtäviä

71. Todista summan epäolennaisen raja-arvon sääntö tapauksessa

a) $a, b \in \mathbb{R},\ d = -\infty$, **b)** $a = b = d = \infty$.

72. Todista tulon epäolennaisen raja-arvon sääntö kahdessa sellaisessa lukuja a, b ja d koskevassa tapauksessa, joissa ainakin yksi näistä luvuista on $\pm\infty$.

73. Päteekö osamäärän raja-arvon säännön todistus (teht. 53) epäolennaisille raja-arvoille?

74. Olkoon $a \in \bar{\mathbb{R}}$ ja $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$. Anna esimerkki tapauksesta, jossa raja-arvo $\lim_{x\to a}(f(x) + g(x))$ **a)** on olemassa, **b)** ei ole mutta on epäolennaisena raja-arvona, **c)** ei ole edes epäolennaisena. (Siksi $\infty + (-\infty)$ kannattaa jättää määrittelemättä.)

75. Olkoon $a \in \bar{\mathbb{R}}$ ja $\lim_{x\to a} f(x) = 0$, $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$. Anna esimerkki tapauksesta, jossa raja-arvo $\lim_{x\to a} f(x)g(x)$ **a)** on olemassa, **b)** ei ole mutta on epäolennaisena raja-arvona, **c)** ei ole edes epäolennaisena. (Siksi $0 \cdot \infty$ kannattaa jättää määrittelemättä.)

76. Olkoon $a \in \bar{\mathbb{R}}$ ja $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty$. Anna esimerkki tapauksesta, jossa raja-arvo $\lim_{x\to a} f(x)/g(x)$ **a)** on olemassa, **b)** ei ole mutta on epäolennaisena raja-arvona, **c)** ei ole edes epäolennaisena. (Siksi ∞/∞ kannattaa jättää määrittelemättä.)

77. Olkoon $n \in \mathbb{Z}$. Määritä

$$\textbf{a)}\ \lim_{x\to\infty} x^n, \qquad \textbf{b)}\ \lim_{x\to-\infty} x^n.$$

78. Mitä tapahtuu toisen asteen yhtälön

$$ax^2 + bx + c = 0$$

ratkaisuille, kun $a \to 0$?

79. Osoita, että hyperbelin

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

asymptootit ovat suorat

$$y = \pm\frac{b}{a}x.$$

80. Olkoon $m, n \in \mathbb{Z}_+$, $a_0, \dots, a_m, b_0, \dots, b_n \in \mathbb{R}$, $a_m, b_n \neq 0$. Määritä

$$\textbf{a)}\ \lim_{x\to\infty} \frac{a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m}{b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n}, \quad \textbf{b)}\ \lim_{x\to-\infty} \frac{a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m}{b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n}.$$

3 Funktion jatkuvuus

3.1 Jatkuvuus

Määriteltyämme raja-arvon täsmällisesti voimme määritellä myös jatkuvuuden siten. Olkoon funktio f määritelty pisteen a eräässä ympäristössä. Se on *jatkuva pisteessä* a, jos $\lim_{x\to a} f(x)$ on olemassa ja $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Toisin sanoen kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa sellainen $\delta_\varepsilon > 0$, että

$$|x - a| < \delta_\varepsilon \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

(Implikaation alkuosa eroaa raja-arvon määritelmän vastaavasta osasta $0 < |x - a| < \delta_\varepsilon$, sillä nyt f:n täytyy olla määritelty a:ssa, kun taas raja-arvon määritelmässä niin ei tarvitse olla.) Muulloin f on *epäjatkuva pisteessä* a. Kuitenkin lähtökohdan (f on määritelty a:n eräässä ympäristössä) täytyy olla voimassa. Muussa tapauksessa f ei ole jatkuva eikä epäjatkuva a:ssa.

Toispuolinen jatkuvuus määritellään vastaavasti toispuolisilla raja-arvoilla. Tällöin riittää, että f on määritelty a:n eräässä toispuolisessa ympäristössä.

Olkoon nyt funktio f määritelty joukossa S, joka on väli tai voidaan esittää välien yhdisteenä. Tämä funktio on *jatkuva joukossa* S, jos se on jatkuva S:n jokaisessa pisteessä. Jos kuitenkin f on määritelty vain kyseisen pisteen jommallakummalla puolella, niin riittää vastaava toispuolinen jatkuvuus. Funktio f on *epäjatkuva joukossa* S, jos se ei ole siinä jatkuva (mutta on määritelty).

Jos funktio f on jatkuva koko määrittelyjoukossaan, niin sanomme lyhyesti, että se on *jatkuva*. Muulloin f on *epäjatkuva*.

Lause 7 *Olkoot funktiot f ja g jatkuvia pisteessä a. Tällöin funktiot $|f|$, $f + g$, ja fg ovat siinä jatkuvia. Jos lisäksi $g(a) \neq 0$, niin myös f/g on jatkuva tässä pisteessä.*

Todistus Lause seuraa raja-arvon vastaavista ominaisuuksista (teht. 58 ja lause 5). ∎

Lause 8 *Jatkuvan bijektion käänteisfunktio on jatkuva.*

Todistus Riittää (miksi?) tarkastella tapausta, jossa f on avoimella välillä I määritelty bijektio (arvojoukolleen $f(I)$). Tällöin f on aidosti monotoninen (lause 4). Voimme olettaa, että se on aidosti kasvava (ellei, tarkastelemme $-f$:ää). Tällöin myös f^{-1} on aidosti kasvava (teht. 81). Olkoon $b \in f(I)$. Osoitamme, että f^{-1} on siinä jatkuva.

Merkitsemme $a = f^{-1}(b)$ ja $x = f^{-1}(y)$ (eli $b = f(a)$ ja $y = f(x)$). Olkoon $\varepsilon > 0$ niin pieni, että $a \pm \varepsilon \in I$, ja olkoon

$$\delta_1 = b - f(a - \varepsilon), \quad \delta_2 = f(a + \varepsilon) - b.$$

Aidon kasvavuuden perusteella

$$b - \delta_1 < f(x) < b + \delta_2 \iff a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$$

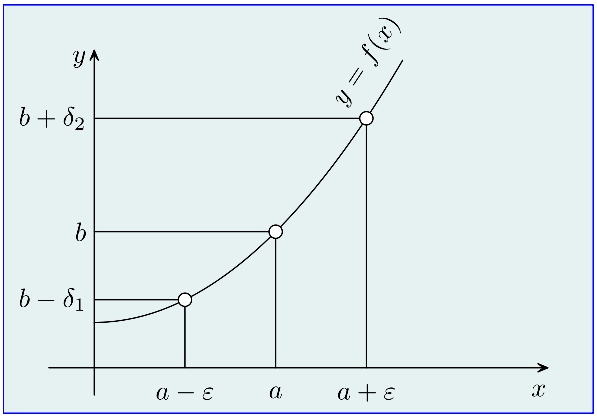
eli

$$b - \delta_1 < y < b + \delta_2 \iff f^{-1}(b) - \varepsilon < f^{-1}(y) < f^{-1}(b) + \varepsilon.$$

Olkoon $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Kun $|y - b| < \delta$, vasemmanpuolinen kaksoisepäyhtälö on voimassa. Kirjoitamme oikeanpuolisen kaksoisepäyhtälön muotoon $|f^{-1}(y) - f^{-1}(b)| < \varepsilon$. Näin saamme

$$|y - b| < \delta \implies |f^{-1}(y) - f^{-1}(b)| < \varepsilon,$$

ja väitös seuraa.



■

Lause 9 *Jatkuvien funktioiden yhdistetty funktio on jatkuva.*

Todistus Oletamme, että funktio f on jatkuva pisteessä a ja funktio g on jatkuva pisteessä $b = f(a)$.Väitämme, että funktio $g \circ f$ on jatkuva pisteessä a. Olkoon $\varepsilon > 0$. Funktion g jatkuvuuden perusteella on olemassa sellainen $\delta > 0$, että

$$|y - b| < \delta \implies |g(y) - g(b)| < \varepsilon.$$

Sovellamme seuraavaksi jatkuvuuden määritelmää funktioon g niin, että määritelmässä olevan ε:n paikalla on äsken löydetty δ. Täten löytyy sellainen $\eta > 0$, että

$$|x - a| < \eta \implies |f(x) - f(a)| < \delta.$$

Merkitsemme $y = f(x)$. Kun $|x-a| < \eta$, on edellisten implikaatioiden perusteella

$$|(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)| = |g(f(x)) - g(f(a))| = |g(y) - g(b)| < \varepsilon,$$

joten väitös seuraa. ■

Harjoitustehtäviä

81. Osoita, että aidosti kasvavan funktion käänteisfunktio on aidosti kasvava.

82. Osoita, että Dirichlet'n funktio (s. 16) on kaikkialla epäjatkuva.

83. Mitä voidaan sanoa pisteen a eräässä ympäristössä määritellystä funktiosta f jolle pätee: On olemassa sellainen $\delta > 0$, että kaikilla $\varepsilon > 0$

$$|x-a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon?$$

84. Voiko **a)** kahden epäjatkuvan, **b)** jatkuvan ja epäjatkuvan funktion i) summafunktio, ii) tulofunktio, iii) yhdistetty funktio olla jatkuva?

85. Anna esimerkki sellaisesta epäjatkuvasta funktiosta, jonka itseisarvofunktio on jatkuva.

86. **a)** Todista: Jos funktio f on jatkuva ja positiivinen pisteessä a, niin tällä pisteellä on sellainen ympäristö, jossa f on positiivinen.

b) Kuten edellä, mutta sana "positiivinen" korvataan sanoilla "nollasta eroava". Vrt. teht. 48.

87. Olkoon funktio f määritelty pisteen a eräässä ympäristössä, ja olkoon funktio g määritelty pisteen $f(a)$ eräässä ympäristössä. Todista: Jos $\lim_{x\to a} f(x)$ on olemassa ja g on jatkuva $f(a)$:ssa, niin

$$\lim_{x\to a} g(f(x)) = g(\lim_{x\to a} f(x)).$$

Tällöin siis "limes g:stä on g limeksestä".

88. Olkoon funktio f määritelty välillä I.

a) Todista: Jos

$$|f(u) - f(v)| \le |u - v|$$

kaikilla $u, v \in I$, niin f on jatkuva.

b) Päteekö "vain jos"-suunta?

89. Olkoon funktio f määritelty avoimella välillä I.

a) Todista: Jos f on jatkuva, niin

$$\lim_{h \to 0}(f(x+h) - f(x-h)) = 0$$

kaikilla $x \in I$.

b) Päteekö "vain jos"-suunta?

90. Olkoon f joukossa $\mathbb{R}$ määritelty funktio, joka on jatkuva origossa ja toteuttaa muualla epäyhtälön

$$|f(x)| \le \frac{1}{|x|}.$$

Todista, että f on rajoitettu.

3.2 Tasainen jatkuvuus ($\star$)

Olkoon funktio f määritelty pisteen a eräässä ympäristössä. Se on jatkuva täsä pisteessä, jos:

(A) *Kaikilla $\varepsilon > 0$ on sellainen $\delta_\varepsilon > 0$, että*

$$|x - a| < \delta_\varepsilon \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Siis δ_ε saa riippua ε:sta. Mutta entä jos se ei saa riippua eli jos saman δ:n on kelvattava kaikille ε:lle? Toisin sanoen:

(B) *On sellainen $\delta > 0$, että kaikilla $\varepsilon > 0$ pätee*

$$|x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Jos (B) on voimassa, niin erityisesti

$$|f(x) - f(a)| < \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

aina, kun $|x - a| < \delta$. Annamme $n \to \infty$, jolloin epäyhtälön säilymislauseen (teht. 68a) mukaan $|f(x) - f(a)| = 0$ eli

(B') $f(x) = f(a)$ *aina, kun* $|x - a| < \delta$.

Toisaalta selvästi (B')⇒(B). Näin ollen ehto (B) on toteutettu, jos ja vain jos f on vakio a:n eräässä ympäristössä.

Ehto (B) on vahvempi kuin (A). Toisin sanoen (B) voi olla epätosi vaikka (A) olisi tosi. Yleensäkin lauseesta "Kaikilla . . . on sellainen . . . , että . . . " muutettu lause "On sellainen . . . , että kaikilla . . . pätee . . . " on useimmiten alkuperäistä lausetta vahvempi mutta voi myös olla sen kanssa yhtäpitävä.

Esimerkki 1 Lause "Kaikilla $x \in \mathbb{R}$ on sellainen $y \in \mathbb{R}$, että $x + y = 0$" on tosi, sillä y:ksi kelpaa $-x$. Sen sijaan lause "On sellainen $y \in \mathbb{R}$, että kaikilla $x \in \mathbb{R}$ pätee $x + y = 0$" on epätosi (miksi?).

Esimerkki 2 Lause "Kaikilla $x \in \mathbb{R}$ on sellainen $y \in \mathbb{R}$, että $xy = 0$" on tosi, sillä y:ksi kelpaa 0. Se ei riipu x:stä, joten myös lause "On sellainen $y \in \mathbb{R}$, että kaikilla $x \in \mathbb{R}$ pätee $xy = 0$" on tosi.

Tarkastelemme nyt funktiota f, joka on jatkuva välillä I. Tämä väli voi olla avoin, puoliavoin tai suljettu. Se voi myös olla ääretön. Olkoon $\varepsilon > 0$ ja $x \in I$. Koska f on jatkuva x:ssä, löytyy sellainen $\delta_{\varepsilon,x} > 0$, että

$$|t - x| < \delta_{\varepsilon,x} \implies |f(t) - f(x)| < \varepsilon.$$

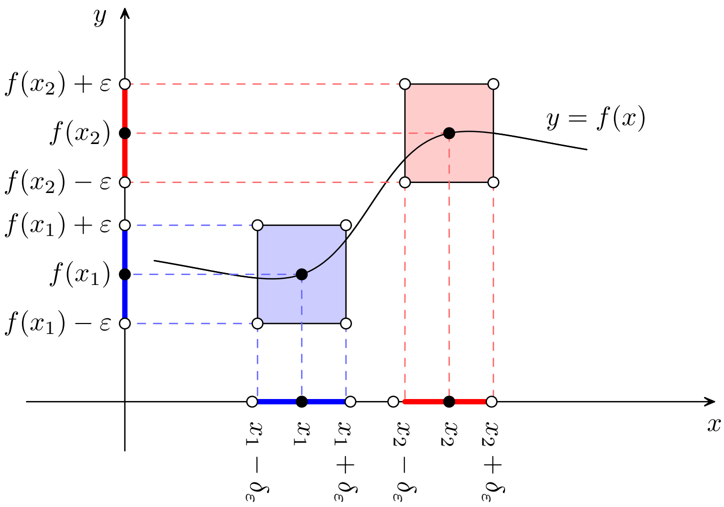
(Jos I on suljettu vasemman päätepisteensä osalta ja jos x on tämä piste, niin epäyhtälön $|t-x| < \delta_{\varepsilon,x}$ tilalla on $t < x+\delta_{\varepsilon,x}$. Vastaavasti oikean päätepisteen tapauksessa siinä on $t > x - \delta_{\varepsilon,x}$.) Siis $\delta_{\varepsilon,x}$ saa riippua paitsi ε:sta myös x:stä. Saattaa kuitenkin käydä niin, että sama $\delta_{\varepsilon,x}$ kelpaa kaikille x:lle eli riippuu vain ε:sta. Tällöin saamme tavanomaista jatkuvuutta vahvemman käsitteen.

Funktion tasainen jatkuvuus. Olkoon f kuten edellä. Se on välillä I *tasaisesti jatkuva*, jos seuraavat toimenpiteet voidaan aina tehdä:

1. Valitaan mielivaltainen positiiviluku ε.
2. Etsitään sellainen positiiviluku δ_ε, että voidaan jatkaa seuraavasti.
3. Valitaan väliltä I mielivaltainen luku x.
4. Kaikki ne arvot $t \in I$, jotka toteuttavat epäyhtälön $|t - x| < \delta_\varepsilon$, toteuttavat myös epäyhtälön $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$. Toisin sanoen

   $$|t - x| < \delta_\varepsilon \implies |f(t) - f(x)| < \varepsilon.$$

   (Päätepisteen tapauksessa menetellään kuten edellä.)



Esimerkki 3 Osoita, että funktio $f(x)=x^2$ **a)** on tasaisesti jatkuva jokaisella äärellisellä välillä I, mutta **b)** ei ole millään äärettömällä välillä I.

a) Koska I on äärellinen, löytyy sellainen $m>0$, että $I\subseteq]-m,m[$. Olkoon $\varepsilon>0$. Kaikilla $x,t\in I$

$$|f(t)-f(x)|=|t^2-x^2|=|t+x||t-x|\le(|t|+|x|)|t-x|<\\ (m+m)|t-x|=2m|t-x|<\varepsilon,$$

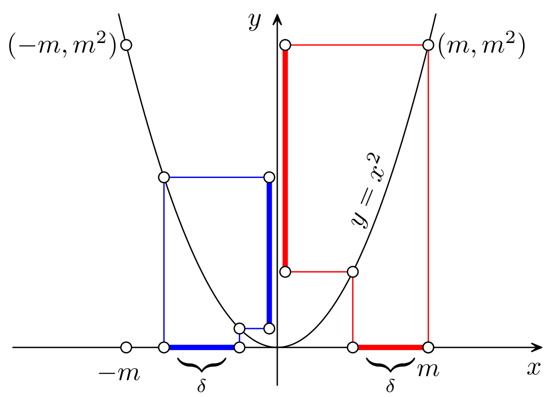
kun

$$|t-x|<\frac{\varepsilon}{2m}.$$

Näin ollen

$$\delta=\frac{\varepsilon}{2m}$$

kelpaa (kuten myös mikä tahansa sitä pienempi positiiviluku. Meidän ei tässä tarvitse korostaa indeksillä δ:n riippuvuutta ε:sta, sillä se näkyy muutenkin.)



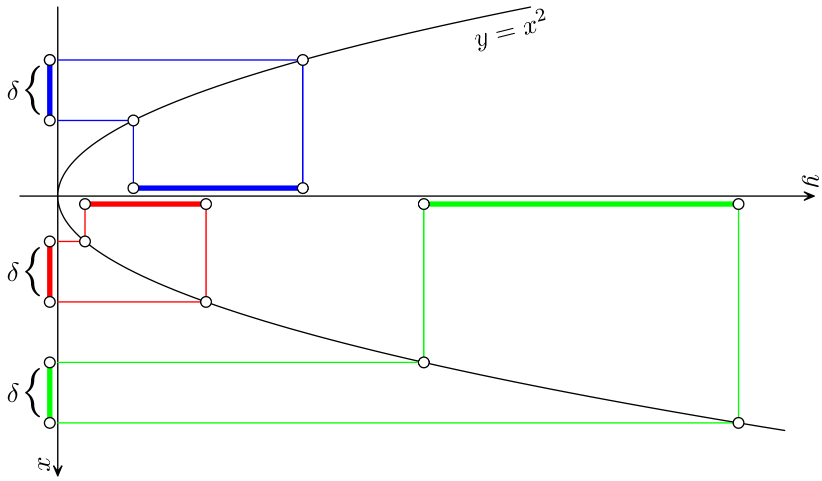
b) Koska I in ääretön, se sisältää itseisarvoltaan mielivaltaisen suuria lukuja. Koska $f(-x) = f(x)$, voimme sopia, että se sisältää mielivaltaisen suuria lukuja. Olkoon $\delta > 0$. Osoitamme, että olipa se miten pieni tahansa, löytyy sellaiset $x, t \in I$, että $|t - x| < \delta$ mutta $|f(t) - f(x)| > 1$. Tällöin tasaisen jatkuvuuden ehto ei päde tapauksessa $\varepsilon = 1$. Kun

$$x = \frac{1}{\delta}, \quad t = \frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2},$$

on $|t - x| < \delta$, mutta

$$|f(t) - f(x)| = f(t) - f(x) = \Big(\frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2}\Big)^2 - \frac{1}{\delta^2} = 1 + \frac{\delta^2}{4} > 1.$$

Itse asiassa f:n arvojen erotus δ:n pituisella välillä saadaan (miten?) mielivaltaisen suureksi olipa δ miten pieni tahansa. (Teknisistä syistä x-akselin suunta on kuviossa alaspäin ja y-akselin oikealle.)



Edellisessä esimerkissä funktio on tasaisesti jatkuva äärellisellä välillä mutta ei äärettömällä välillä. Seuraavassa esimerkissä käy päinvastoin.

Esimerkki 4 Osoita, että funktio $f(x) = 1/x$ **a)** on tasaisesti jatkuva välillä $I = [1, \infty[$, mutta **b)** ei ole välillä $I =]0, 1]$.

a) Olkoon $\varepsilon > 0$. Kaikilla $x, t \geq 1$

$$|f(t) - f(x)| = \Big|\frac{1}{t} - \frac{1}{x}\Big| = \Big|\frac{x - t}{xt}\Big| \leq |x - t| = |t - x| < \varepsilon,$$

kun $|t - x| < \varepsilon$. Siis $\delta = \varepsilon$ kelpaa.

b) Olkoon $\delta > 0$. Koska vain pienet δ:n arvot ovat kiinnostavia, voimme rajoittaa $\delta < 1$, jolloin $\delta, \delta/2 \in I$. Menettelemme vastaavasti kuin edellisen tehtävän b-kohdassa. Kun

$$x = \delta, \quad t = \frac{\delta}{2},$$

on $|t - x| < \delta$, mutta

$$|f(t) - f(x)| = f(t) - f(x) = \frac{2}{\delta} - \frac{1}{\delta} = \frac{1}{\delta} > 1.$$

Esimerkissä 3b väli I on ääretön. Esimerkissä 4b se on äärellinen, mutta funktio f on rajoittamaton. Johtuuko ei-tasainen jatkuvuus aina jommasta-kummasta syystä? Ei johdu, sillä jatkuva ja rajoitettu funktio voi olla äärellisellä välillä ei-tasaisesti jatkuva (teht. 100). Näin ei kuitenkaan käy, jos väli on suljettu. Siis jatkuva funktio on suljetulla välillä tasaisesti jatkuva (lause 36).

Harjoitustehtäviä

91. Olkoon

$$H = \{\text{hra } A_1, \text{ hra } A_2, \ldots, \text{ hra } A_n\}, \quad R = \{\text{rva } A_1, \text{ rva } A_2, \ldots, \text{ rva } A_n\}.$$

Jos x ja y ovat keskenään naimisissa, niin merkitään xNy. Onko lause

a) Kaikilla $x \in H$ on sellainen $y \in R$, että xNy,

b) On sellainen $y \in R$, että kaikilla $x \in H$ pätee xNy

tosi vai epätosi?

92. Onko lause

a) Kaikilla $x \in \mathbb{R}$ on sellainen $y \in \mathbb{R}$, että $x > y$,

b) On sellainen $y \in \mathbb{R}$, että kaikilla $x \in \mathbb{R}$ pätee $x > y$,

c) Kaikilla $x \in \mathbb{R}$ on sellainen $y \in \mathbb{R}$, että $|x| \geq |y|$,

d) On sellainen $y \in \mathbb{R}$, että kaikilla $x \in \mathbb{R}$ pätee $|x| \geq |y|$

tosi vai epätosi?

93. Olkoon f välillä I jatkuva funktio ja olkoon J tämän välin osaväli. Todista:

a) Jos f on tasaisesti jatkuva välillä I, niin se on tasaisesti jatkuva välillä J.

b) Jos f ei ole tasaisesti jatkuva välillä J, niin se ei ole tasaisesti jatkuva välillä I.

94. Osoita, että **a)** vakiofunktio $f(x) = c$, **b)** identtinen funktio $f(x) = x$ on tasaisesti jatkuva joukossa $\mathbb{R}$.

95. Osoita, että funktio $f(x) = x^3$

a) on tasaisesti jatkuva jokaisella äärellisellä välillä,

b) ei ole tasaisesti jatkuva millään äärettömällä välillä.

96. Osoita, että funktio $f(x) = 1/x^2$

a) on tasaisesti jatkuva välillä $[1, \infty[$,

b) ei ole tasaisesti jatkuva välillä $]0, 1]$.

97. Anna esimerkki joukossa $\mathbb{R}$ tasaisesti jatkuvasta funktiosta, joka ei ole rajoitettu.

98. Osoita, että äärellisellä välillä I tasaisesti jatkuva funktio on (tällä välillä) rajoitettu. Ohje: Tasaisen jatkuvuuden perusteella on olemassa sellainen $\delta > 0$, että

$$|x_1 - x_2| < \delta \implies |f(x_1) - f(x_2)| < 1.$$

Jaa I sellaisiin osiin, joiden kaikkien pituudet ovat $< \delta$. Miten jatkat?

99. Olkoot f ja g välillä I tasaisesti jatkuvia funktioita. Todista:

a) Summafunktio $f + g$ on (tällä välillä) tasaisesti jatkuva.

b) Tulofunktio fg ei välttämättä ole tasaisesti jatkuva.

c) Jos I on äärellinen, niin fg on tasaisesti jatkuva.

100. Osoita, että funktio

$$f(x) = \sin\frac{1}{x}$$

ei ole tasaisesti jatkuva välillä $]0, \frac{1}{\pi}[$. (Oletamme tässä sinifunktion tunnetuksi, vaikka emme ole vielä määritelleet sitä täsmällisesti.)

4 Potenssisarjoja ja alkeisfunktioita

4.1 Lukujonoista

Polynomifunktiot, rationaalifunktiot, potenssifunktio $y = x^n$, $n \in \mathbb{Z}$, ja juurifunktio $y = \sqrt[n]{x}$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, ovat välittömästi määriteltävissä (miten?). Eksponenttifunktion ja trigonometristen funktioiden määrittely ei suju yhtä helposti.

Eksponenttifunktiolle $y = a^x$, $a > 0$, määritellään tapauksessa $x \in \mathbb{Q}$, $x = m/n$, että $a^x = (\sqrt[n]{x})^m$. Jos $x \notin \mathbb{Q}$, niin koulumatematiikassa tyydytään sanomaan havainnollisesti, että a^x on se ”raja-arvo”, joka saadaan korvaamalla x yhä tarkemmilla rationaalisilla likiarvoillaan.

Trigonometriset funktiot määritellään koulumatematiikassa yksikköympyrän avulla. Jotta tämä määritelmä saataisiin täsmälliseksi, pitäisi ensiksi määritellä, mitä tarkoitetaan käyränkaarella ja sen pituudella. Niin voidaan tehdä, mutta on parempi menetellä toisin.

Määrittelemme eksponentti-, sini- ja kosinifunktion täsmällisesti potenssisarjoina. Sitä varten tarvitsemme lukujonoja ja potenssisarjoja koskevia lisätietoja, joihin perehdymme aluksi.

Lukujono on joukossa $\mathbb{Z}_+$ (tai joukossa $\mathbb{N}$ tai jossakin muussa vastaavassa joukossa) määritelty funktio f. Luku $a_n = f(n)$ on sen *n:s termi*. Havainnollisesti lukujono saadaan ”kirjoittamalla termit peräkkäin”: $(a_1, a_2, a_3, \dots)$. *Päättyvän lukujonon*, jota emme tässä käsittele, määrittelyjoukko on äärellinen joukko peräkkäisiä luonnollisia lukuja.

Meidän on mukavinta määritellä lukujonon raja-arvo palauttamalla se funktion raja-arvon käsitteeseen.

Olkoon f määritelty kaikilla tiettyä lukua suuremmilla x:n reaaliarvoilla. Jos

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b,$$

niin $f(x)$ saadaan mielivaltaisen lähelle b:tä (vastaavasti mielivaltaisen suureksi tai mielivaltaisen pieneksi), kun x valitaan tarpeeksi suureksi. Erityisesti näin käy, kun valitaan tarpeeksi suuri kokonaisluku eli kun ”mennään äärettömään kokonaislukujen kautta”. Siksi sanomme, että lukujono $(f(n))$ *suppenee* kohti raja-arvoa b ja *hajaantuu* muulloin. Jos $\lim_{x\to\infty} f(x) = \pm\infty$, niin tällä lukujonolla on epäolennainen raja-arvo $\pm\infty$.

Jos f on määritelty vain joukossa $\mathbb{Z}_+$, niin laajennamme sen määrittelyksi kaikilla reaaliluvuilla $x \geq 1$ käyttämällä *lineaarista interpolaatiota.* Kun $n \in \mathbb{Z}_+$ ja $n < x < n + 1$, määrittelemme

$$f(x) = f(n) + (f(n+1) - f(n))(x - n).$$

Tämän funktion kuvaaja on pisteet $(1, f(1)), (2, f(2)), \ldots$ yhdistävä murtoviiva. Saamme siis lukujonon raja-arvon määritelmän palautetuksi tässäkin tapauksessa funktion raja-arvon määritelmään.

Lukujonon raja-arvon laskusäännöt ja tietyt muutkin ominaisuudet seuraavat välittömästi funktion raja-arvon vastaavista ominaisuuksista.

Seuraavaksi tutkimme täsmällisesti *geometrisen jonon* $a_n = aq^n$ eli jonon $(aq^n) = (a, aq, aq^2, \ldots)$ suppenemista. Tässä $a, q \in \mathbb{R}$. Tapaus $a = 0$ on triviaali (miksi?). Jos $a \neq 0$, niin a:lla ei ole merkitystä (miksei?). Riittää siis tarkastella jonoa (q^n).

Lause 10 *Olkoon $q \in \mathbb{R}$. Jos ja vain jos $-1 < q \leq 1$, niin geometrinen jono (q^n) suppenee. Tällöin*

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0, & \text{kun } |q| < 1, \\ 1, & \text{kun } q = 1. \end{cases}$$

Todistus Jaamme todistuksen viiteen osaan.

1. $q > 1$. Osoitamme, että

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \infty,$$

joten jono hajaantuu. Merkitsemme $q = 1 + h$, missä $h > 0$. Olkoon $m > 0$. Etsimme sellaisen positiivisen kokonaisluvun n_m, että

$$n \geq n_m \implies q^n > m.$$

Koska

$$q^n > nh$$

(teht. 101), riittää, että

$$nh \geq m$$

eli

$$n \geq \frac{m}{h}.$$

Nyt kelpaa

$$n_m = \left\lceil \frac{m}{h} \right\rceil,$$

missä *kattofunktio* $\lceil x \rceil$ = pienin kokonaisluku, joka $\geq x$.

2. $q < -1$. Koska $|q| > 1$, on

$$\lim_{n\to\infty} |q|^n = \infty.$$

Koska jonon joka toinen termi on positiivinen ja joka toinen negatiivinen, jono "heilahtelee rajattomasti" ja siis hajaantuu.

3. $q = -1$. Joka toinen termi on 1 ja joka toinen -1, joten jono hajaantuu.

4. $q = 1$. Triviaali.

5. $|q| < 1$. Tapaus $q = 0$ on triviaali. Muulloin $q = 1/p$, missä $|p| > 1$. Osoitamme, että

$$\lim_{n\to\infty} |q|^n = 0,$$

mistä väitös seuraa. Olkoon $\varepsilon > 0$. Täytyy löytyä sellainen positiivinen kokonaisluku n_ε, että

$$n \geq n_\varepsilon \implies |q|^n < \varepsilon$$

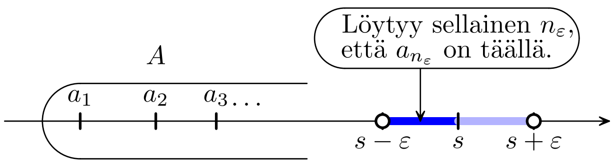
eli

$$n \geq n_\varepsilon \implies |p|^n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Koska $\lim_{n\to\infty} |p|^n = \infty$, se löytyy. ■

Lause 11 (Monotonisen lukujonon suppenemislause) *Kasvava ja ylhäältä rajoitettu reaalilukujono suppenee. Vähenevä ja alhaalta rajoitettu reaalilukujono suppenee.*

Todistus Todistamme ensiksi lauseen alkuosan. Olkoon (a_n) kasvava ja ylhäältä rajoitettu jono. Sen termien joukko A on epätyhjä ja ylhäältä rajoitettu, joten sillä on reaalilukujen täydellisyysominaisuuden perusteella pienin yläraja $s = \sup A$. Väitämme, että $\lim_{n\to\infty} a_n = s$. Olkoon $\varepsilon > 0$. Koska $s - \varepsilon$ ei ole A:n yläraja, on olemassa sellainen n_ε, että $a_{n_\varepsilon} > s - \varepsilon$.



Koska

$$n \geq n_\varepsilon \implies s - \varepsilon < a_{n_\varepsilon} < a_n < s \,(< \, s + \varepsilon)$$

(perustele yksityiskohdat), väitös seuraa raja-arvon määritelmästä.

Loppuosa voitaisiin todistaa tarkastelemalla vastaavasti suurinta alarajaa, mutta on mukavampi palauttaa se alkuosaan. Jos nimittäin jono (a_n) on vähenevä ja alhaalta rajoitettu, niin jono $(-a_n)$ on kasvava ja ylhäältä rajoitettu, joka suppenee alkuosan perusteella. Täten myös jono (a_n) suppenee. ■

Harjoitustehtäviä

101. Olkoon $h > 0$ ja $n \in \mathbb{Z}_+$, $n > 2$. Osoita, että

$$(1+h)^n > 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2}h^2.$$

102. Olkoon $a > 0$. Osoita, että

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

Ohjeita: Tapaus $a = 1$ on triviaali. Tapauksessa $a > 1$ merkitse $\sqrt[n]{a} = 1 + h_n$, missä $h_n > 0$ (miksi?). Koska $a = (1+h_n)^n > nh_n$ (miksi?), on

$$(0 <) h_n < \frac{a}{n}.$$

Miten jatkat? Miten käsittelet tapauksen $(0 <) a < 1$?

103. Osoita, että

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Ohjeita: Kun $n \geq 2$, merkitse $\sqrt[n]{n} = 1 + h_n$, missä $h_n > 0$ (miksi?). Koska

$$n = (1+h_n)^n > \frac{n(n-1)}{2}h_n^2$$

(miksi?), on

$$(0 <) h_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}}.$$

Miten jatkat?

104. Lukujonosta (a_n) oletetaan, että $\lim_{n\to\infty} a_n > 0$. Osoita, että vain äärellinen määrä sen termejä voi olla negatiivisia tai nollia.

105. Edellisen tehtävän yleistys. Todista: Lukujonolla on raja-arvo a, jos ja vain jos a:n jokaisen ympäristön ulkopuolella on vain äärellinen määrä tämän jonon termejä.

106. Lukujonosta (a_n) oletetaan, että $a_1 = 2$ ja $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.

a) Osoita, että sen termien joukossa on suurin luku.

b) Anna esimerkki sellaisesta suppenevasta lukujonosta, jonka termien joukossa ei ole suurinta lukua.

107. Olkoon $a > 1$. Lauseen 10 todistuksen mukaan $\lim_{n\to\infty} a^n = \infty$.

a) Todista vahvempi (miksi vahvempi?) väite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n} = \infty.$$

b) Olkoon $p \in \mathbb{Z}_+$. Todista edellistä vahvempi väite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n^p} = \infty.$$

Ohje: Merkitse $a = 1 + h$ ja käytä binomikaavaa.

108. Olkoon $a \in \mathbb{R}$. Osoita, että

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$$

Ohjeita: On olemassa (miksi?) sellainen $n_0 \in Z_+$, että

$$n > n_0 \implies \frac{|a|}{n+1} < 1.$$

Tällöin

$$\frac{a^n}{n!} = \frac{a_0^n}{n_0!} \frac{a}{n_0+1} \frac{a}{n_0+2} \cdots \frac{a}{n}$$

(miksi?). Miten jatkat?

109. Osoita, että *rekursiivinen lukujono*

$$a_0 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + a_n},$$

suppenee, ja määritä sen raja-arvo. Ohje: Näytä, että tämä jono on vähenevä ja alhaalta rajoitettu, joten voit käyttää monotonisen jonon suppenemislausetta.

110. Todista *sisäkkäisten välien lause*: Olkoot $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots$ sellaisia suljettuja reaalilukuvälejä, joille

$$[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq \dots \quad \text{ja} \quad \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0.$$

Tällöin on olemassa yksikäsitteinen reaaliluku c, joka kuuluu jokaiseen väliin $[a_n, b_n]$. Jos $x_n \in [a_n, b_n]$ kaikilla n:llä, niin $\lim_{n\to\infty} x_n = c$. Ohje: Sovella monotonisen jonon suppenemislausetta päätepisteiden jonoihin.

4.2 Potenssisarjoista ($\star$)

Lukujonoa (a_n) vastaa *summajono* (s_n),

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Jos summajono suppenee kohti raja-arvoa s, niin *sarja* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *suppenee* ja sen *summa* on s, jolloin merkitsemme $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$. Jos sarja ei suppene, niin se *hajaantuu*. Lukujonon (a_n) termit ovat sarjan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *termejä*. Summajonon (s_n) termit ovat sen *osasummia*.

Potenssisarjan yleinen muoto on

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots. \tag{1}$$

(Vielä yleisempi muoto

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$$

palautuu tähän muuttujanvaihdolla.) Potenssisarjan osasummat ovat siis polynomeja. Tunnemme jo *geometrisen sarjan*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x} \quad (|x| < 1). \tag{2}$$

Jos $x = 0$, niin yhtälön (1) vasemman puolen summalausekkeen ensimmäinen termi $a_0 \cdot 0^0$ ei ole määritelty, sillä 0^0 ei ole määritelty. Siis tämä lauseke pitäisi oikeastaan kirjoittaa muotoon

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n.$$

Kuitenkin on mukavampi sopia, että kun tarkastelemme tällaisia summalausekkeita, määritellään poikkeuksellisesti $0^0 = 1$.

Esitämme neljä tärkeää lausetta potenssisarjoista. Meidän on sivuutettava niiden todistukset. Ks. esim. [1, 3, 8, 9].

Jokainen potenssisarja suppenee ainakin origossa. Tutkimme suppenemista muualla.

Lause 12 *Olkoon S sellainen joukko, että potenssisarja* (1) *suppenee, kun $x \in S$, ja hajaantuu muulloin. Tällöin jokin seuraavista vaihtoehdoista pätee: $S = \mathbb{R}$, $S = [-r, r]$, $S = [-r, r[$, $S =]-r, r]$, $S =]-r, r[$, missä $r \geq 0$.*

Luku r on potenssisarjan (1) *suppenemissäde*. Jos $r = 0$, niin $S = \{0\}$, jolloin sarja suppenee vain origossa. Muulloin $I =]-r, r[$ on sarjan *suppenemisväli*. Sen päätepisteissä sarja voi supeta tai hajaantua. Jos $S = \mathbb{R}$ eli jos sarja suppenee kaikkialla, niin $r = \infty$.

Suppenemissäteen määrittämisessä on hyötyä seuraavasta lauseesta. Ks. myös teht. 118.

Lause 13 *Olkoon $a_n \neq 0$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Potenssisarjan* (1) *suppenemissäde*

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|,$$

mikäli kyseinen raja-arvo on olemassa.

Esimerkki 1 Määritä potenssisarjan

$$\textbf{a)} \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad \textbf{b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}, \quad \textbf{c)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

suppenemissäde r ja suppenemisväli I. Lisäksi määritä se joukko S, jossa sarja suppenee.

Kaikilla näillä sarjoilla on $r = 1$ (miksi?), joten $I =]-1, 1[$.

a) $S =]-1, 1[$ (miksi?).

b) Sarja suppenee pisteessä $x = 1$ yliharmonisena sarjana (teht. 117b) ja pisteessä $x = -1$ Leibnizin lauseen (teht. 116) perusteella. Siis $S = [-1, 1]$.

c) Sarja hajaantuu pisteessä $x = 1$ harmonisena sarjana (teht. 117a) mutta suppenee pisteessä $x = -1$ taaskin Leibnizin lauseen perusteella. Näin ollen $S = [-1, 1[$.

Potenssisarjan määrittelemä funktio on helppo derivoida ja integroida.

Lause 14 *Potenssisarjan* (1) *suppenemisvälillä* I *määritelty funktio*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

on jatkuva ja sillä on kaikkien kertalukujen derivaatat. Tämä sarja voidaan derivoida termeittäin eli

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

kaikilla $x \in I$*. Se voidaan myös integroida termeittäin* 0*:sta* x*:ään eli*

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

kaikilla $x \in I$*.*

Esimerkki 2 Derivoimme sarjan (2) termeittäin, jolloin saamme

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots = \frac{1}{(1-x)^2} \qquad (|x| < 1).$$

Seuraavassa esimerkissä oletamme logaritmifunktion tunnetuksi, vaikka emme ole vielä määritelleet sitä täsmällisesti.

Esimerkki 3 Kirjoitamme sarjassa (2) x:n paikalle t:n ja integroimme 0:sta x:ään. Näin saamme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \cdots = -\ln(1-x) \quad (|x| < 1). \tag{3}$$

Näin ollen (teht. 111)

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (|x| < 1). \tag{4}$$

Sarjojen kertolasku sujuu *Cauchyn kertosäännöllä*, jonka esitämme potenssisarjoille.

Lause 15 *Olkoon potenssisarjan* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *suppenemisväli* I *ja potenssisarjan* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ J*. Tällöin*

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n y^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k+l=n}^{n} a_k b_l x^k y^l \tag{5}$$

kaikilla $x, y \in I \cap J$. *Erityisesti*

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\Big) = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\Big)x^n \tag{6}$$

kaikilla $x \in I \cap J$.

Merkintä $\sum_{k+l=n} a_k b_l x^k y^l$ tarkoittaa summaamista kaikkien niiden indeksiparien (k, l) yli, joilla $k + l = n$. Esimerkiksi

$$\sum_{k+l=3} a_k b_l x^k y^l = a_3 b_0 x^3 + a_2 b_1 x^2 y + a_1 b_2 x y^2 + a_0 b_3 y^3.$$

Harjoitustehtäviä

111. Miten sarjakehitelmästä (3) seuraa (4)?

112. Miten yhtälöstä (5) seuraa (6)?

113. Anna esimerkki sellaisesta potenssisarjasta, joka suppenee **a)** vain origossa, **b)** kaikkialla.

114. Todista polynomeille Cauchyn kertosääntö

$$\Big(\sum_{n=0}^{m} a_n x^n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{m} b_n x^n\Big) = \sum_{n=0}^{2m}\Big(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\Big)x^n$$

a) tapauksessa $m = 3$, **b)** yleisesti.

115. Todista *integraalitesti*: Olkoon f välillä $[1, \infty[$ määritelty positiivinen, vähenevä ja jatkuva funktio. Tällöin sarja $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ suppenee, jos ja vain jos integraali $\int_1^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ suppenee (eli raja-arvo $\lim_{b\to\infty}\int_1^b f(x)\mathrm{d}x$ on olemassa). Ohje: Osoita aluksi, että

$$\sum_{k=2}^{n} f(k) \le \int_1^n f(x)\mathrm{d}x < \sum_{k=1}^{n} f(k)$$

kaikilla $n \ge 2$.

116. Todista *Leibnizin lause*: Olkoon (a_n) vähenevä nollaa kohti suppeneva jono positiivisia reaalilukuja. Tällöin sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots$$

suppenee. Ohjeita: Olkoon ensiksi n parillinen, $n = 2k$. Kirjoita osasumma s_{2k} muotoon

$$\begin{aligned} s_{2k} &= (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2k-1} - a_{2k}) \\ &= a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \cdots - (a_{k-2} - a_{k-1}) - a_k. \end{aligned}$$

Päättele tästä, että jono (s_{2k}) on kasvava ja ylhäältä rajoitettu, joten sillä on raja-arvo $\lim_{k\to\infty} s_{2k} = s$. Olkoon toiseksi n pariton, $n = 2k+1$. Kirjoittamalla

$$\begin{aligned} s_{2k+1} &= a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \cdots - (a_{2k} - a_{2k+1}) \\ &= (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2k-1} - a_{2k}) + a_{2k+1} \end{aligned}$$

päättele, että jono (s_{2k+1}) on vähenevä ja alhaalta rajoitettu, joten sillä on raja-arvo $\lim_{k\to\infty} s_{2k+1} = t$. Lopuksi näytä tarkastelemalla erotusta

$$s_{2k+1} - s_{2k} = a_{2k+1},$$

että $s = t$. Miten väitös seuraa tästä?

117. Todista:

a) *Harmoninen sarja*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \ldots$$

hajaantuu.

b) *Yliharmoninen sarja*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \ldots,$$

missä $s > 1$, suppenee.

Ohje: Käytä integraalitestiä. Vaihtoehtoinen tapa a-kohtaan on osoittaa, että osasumma

$$s_{2k} \geq 1 + \frac{k}{2}$$

kaikilla $k \in \mathbb{Z}_+$.

118. Anna esimerkki jonosta (a_n) positiivilukuja (tai osoita, ettei sellaista jonoa löydy), jolle

a) raja-arvo $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a_n}}$ on olemassa mutta $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}$ ei ole,

b) jälkimmäinen raja-arvo on mutta edellinen ei,

c) kumpikaan ei ole.

119. Esimerkin 3 mukaan sarjakehitelmä

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

pätee, kun $|x| < 1$. Se pätee myös pisteessä $x = 1$ [8, teht. 12.5.2]. Näin saadaan mielenkiintoinen sarjakehitelmä

$$\ln 2 = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \dots.$$

Totea kokeellisesti (laskemalla osasummia), että tämä sarja suppenee erittäin hitaasti, joten sitä ei kannata käyttää $\ln 2$:n likiarvon laskemiseen.

120. **a)** Muodosta yhtälön (3) perusteella sarjakehitelmä luvulle

$$\ln 2 = -\ln\tfrac{1}{2} = -\ln(1 - \tfrac{1}{2}).$$

b) Totea kokeellisesti, että saatu sarja suppenee paljon nopeammin kuin tehtävän 119 sarja.

4.3 Eksponentti- sini- ja kosinifunktio ($\star$)

Potenssi a^n määritellään koulussa peräkkäisillä kertolaskuilla, kun $n \in \mathbb{Z}_+$, ja muulloin tietyillä laajennuksilla (miten?), mutta meidän kannattaa menetellä toisin. Määrittelemme eksponenttifunktion tiettynä potenssisarjana ja potenssifunktion sen avulla. Yhteys ”koululaisen potenssikäsitteseen” selviää tehtävistä 128 ja 130.

Sini- ja kosinifunktio määritellään koulussa yksikköympyrän avulla. Jotta tämä määritelmä olisi täsmällinen, meidän pitäisi tietää, miten käyränkaaren pituus määritellään täsmällisesti ja miten se lasketaan. Siksi menettelemme tässäkin toisin ja määrittelemme nämäkin funktiot potenssisarjoilla. Yhteys ”koululaisen siniin ja kosiniin” selviää tehtävästä 127.

Osoitamme aluksi, että näiden funktioiden määritelmissä käyttämämme potenssisarjat suppenevat.

Lause 16 *Potenssisarjat*

$$\begin{aligned}
E(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots, \\
S(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots, \\
C(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots
\end{aligned}$$

suppenevat kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

Todistus Sarjan

$$E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad a_n = \frac{1}{n!},$$

suppenemissäde on lauseen 13 perusteella

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty.$$

Sarjat $S(x)$ ja $C(x)$ jätämme harjoitustehtäväksi (teht. 121a). ■

Määrittelemme *eksponenttifunktion* $\exp x = E(x)$, *sinifunktion* $\sin x = S(x)$ ja *kosinifunktion* $\cos x = C(x)$. Todistamme niiden yhteenlaskukaavat ja käsittelemme muita ominaisuuksia harjoitustehtävissä.

Lause 17 (Yhteenlaskukaavat) *Kaikilla* $x, y \in \mathbb{R}$ *on*

$$\begin{array}{rrcl}
\text{(i)} & E(x+y) & = & E(x)E(y), \\
\text{(ii)} & S(x+y) & = & S(x)C(y) + C(x)S(y), \\
\text{(iii)} & C(x+y) & = & C(x)C(y) - S(x)S(y).
\end{array}$$

Todistus (i) Binomikaavan perusteella vasen puoli

$$E(x+y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k+l=n} \binom{n}{k} x^k y^l = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k+l=n} \frac{1}{k!\,l!} x^k y^l.$$

Lauseen 15 perusteella oikea puoli

$$E(x)E(y) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k+l=n} \frac{x^k}{k!} \frac{x^l}{l!}.$$

(ii) Vasen puoli

$$\begin{aligned}
S(x+y) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(x+y)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \sum_{i+j=2k+1} \binom{2k+1}{i} x^i y^j \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \sum_{i+j=2k+1} \frac{1}{i!\,j!} x^i y^j.
\end{aligned}$$

Oikea puoli

$$
\begin{aligned}
S(x)C(y)+C(x)S(y) &= \Big(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\Big)\Big(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{y^{2k}}{(2k)!}\Big)+\\
&\quad \Big(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}\Big)\Big(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!}\Big)=\\
\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{p+q=k}&\Big[(-1)^{p+q}\frac{x^{2p+1}y^{2q}}{(2p+1)!((2q)!}+(-1)^{p+q}\frac{x^{2p}y^{2q+1}}{(2p)!(2q+1)!}\Big]=\\
&\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\sum_{p+q=k}\Big[\frac{x^{2p+1}y^{2q}}{(2p+1)!((2q)!}+\frac{x^{2p}y^{2q+1}}{(2p)!(2q+1)!}\Big].
\end{aligned}
$$

Hakasulkulausekkeen kummankin termin osoittaja on muotoa x^iy^j, missä $i+j=2p+2q+1=2k+1$. Edellisessä termissä i on pariton ja j parillinen ja jälkimmäisessä päinvastoin. Jos i ja j ovat molemmat parillisia tai molemmat parittomia, niiden summa ei ole $2k+1$. Siksi voimme yhdistää hakasulkulausekkeen termit muotoon

$$
\frac{x^iy^j}{i!\,j!},\quad i+j=2k+1,
$$

jolloin summalauske on sama kuin vasemman puolen tulos.

(iii) Voidaan menetellä vastaavasti. Ks. myös teht. 126. ∎

Määrittelemme *Neperin luvun*

$$
\mathrm{e}=E(1)=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots.
$$

Tavallisesti määritellään, että

$$
\mathrm{e}=\lim_{n\to\infty}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n,
$$

mutta nämä määritelmät ovat yhtäpitävät (teht. 123).

Määrittelemme *luvun* π niin, että

$\pi/2$ *on funktion* C *pienin positiivinen nollakohta.*

Meidän täytyy osoittaa, että C:llä on positiivisia nollakohtia ja että niiden joukossa on pienin.

Positiivisen nollakohdan olemassaolo. Teemme vastaoletuksen, ettei C:llä ole yhtään positiivista nollakohtaa. Koska $C(0)=1>0$, on tällöin $C(x)>0$ kaikilla $x>0$. Jos näet olisi $C(x)<0$ jollakin $x>0$, niin jatkuvana funktiona

C saisi arvon nolla välin $]1, x[$ jossakin pisteessä (teht. 207). Koska $S' = C$, funktio S on siis aidosti kasvava, kun $x \geq 0$. Edelleen, koska $S(0) = 0$, on $S(x) > 0$ kaikilla $x > 0$. Jos $0 < a < b$, niin

$$S(a)(b-a) < \int_a^b S(x)\mathrm{d}x = C(a) - C(b) \leq 2$$

(perustele yksityiskohdat). Tämä sisältää ristiriidan, sillä $S(a)(b-a)$ voidaan tehdä mielivaltaisen suureksi.

Pienimmän positiivisen nollakohdan olemassaolo. Olkoon A funkion C positiivisten nollakohtien joukko. Se on epätyhjä ja alhaalta rajoitettu, joten $a = \inf A \geq 0$ on olemassa. Näemme vastaavasti kuin lauseen 11 todistuksessa, että on olemassa sellainen jono (a_n) joukon A alkioita, jolle $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Koska C on jatkuva, on

$$C(a) = C(\lim_{n\to\infty} a_n) = \lim_{n\to\infty} C(a_n) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0,$$

joten a on nollakohta. Koska $\cos 0 = 1 > 0$, on $a > 0$. Siis a on pienin positiivinen nollakohta.

Harjoitustehtäviä

121. Todista

a) lauseen 16 sarjoja $S(x)$ ja $C(x)$ koskeva osa,

b) derivoimissäännöt $E' = E$, $S' = C$ ja $C' = -S$.

122. Todista:

a) $E(0) = 1$. **b)** $E(x)$ on kaikkialla positiivinen ja aidosti kasvava.

c) $\lim_{x\to\infty} E(x) = \infty$, **d)** $\lim_{x\to-\infty} E(x) = 0$.

e) (c-kohdan yleistys): $E(x)$ kasvaa nopeammin kuin mikä tahansa x:n potenssi eli

$$\lim_{x\to\infty} \frac{E(x)}{x^n} = \infty$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

123. Todista, että

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = E(1).$$

Ohjeita: Osoita, että kaikilla n:llä on

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right).$$

Tällä perusteella osoita, että jono $((1+1/n)^n)$ on kasvava ja että $(1+1/n)^n < E(1)$ kaikilla n:llä, joten tämä jono suppenee ja

$$\lim_{n\to\infty}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n \le E(1).$$

Olkoon sitten m kiinteä ja $n > m$, jolloin

$$\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n > 2+\sum_{k=2}^{m}\frac{1}{k!}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\Big(1-\frac{2}{n}\Big)\cdots\Big(1-\frac{k-1}{n}\Big)$$

(miksi?). Anna $n \to \infty$. Miten jatkat?

124. **a)** Todista: $S(-x) = -S(x)$, $C(-x) = C(x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

b) Todista, että $S(x)^2 + C(x)^2 = 1$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Ohje: Joko tutki vasemman puolen derivaattaa tai laske C:n yhteenlaskukaavan avulla $C(x-x)$.

c) Seurauksena totea, että $|S(x)| \le 1$ ja $|C(x)| \le 1$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

125. Todista:

a) $C(\frac{\pi}{2}) = 0$, $S(\frac{\pi}{2}) = 1$. Ohjeita: Ensimmäisessä väitteessä ei ole mitään todistettavaa (miksei?). Toisen väitteen todistamiseksi osoita, että $S(\frac{\pi}{2}) = \pm 1$ ja $S(\frac{\pi}{2}) > 0$.

b) $S(\pi) = 0$, $C(\pi) = -1$. Ohje: Käytä $C(2x)$:n ja $S(2x)$:n kaavoja, jotka saat yhteenlaskukaavoista.

c) Kaikilla $x \in \mathbb{R}$

i) $S(x\pm\pi) = -S(x)$, $S(x\pm 2\pi) = S(x)$,

ii) $C(x\pm\pi) = -C(x)$, $C(x\pm 2\pi) = C(x)$.

126. Tarkastellaan lauseketta

$$\Big[S(x+y)-\Big(S(x)C(y)+C(x)S(y)\Big)\Big]^2+\Big[C(x+y)-\Big(C(x)C(y)-S(x)S(y)\Big)\Big]^2.$$

Pidä x:ää vakiona ja y:tä muuttujana, jolloin kyseessä on y:n funktio. Tutkimalla sen derivaattaa esitä vaihtoehtoinen todistus S:n ja C:n yhteenlaskukaavoille.

127. Osoita, että yksikköympyrällä (eli origokeskisellä 1-säteisellä ympyrällä) K on parametrimuotoinen yhtälö

$$x = C(t),\ y = S(t), \quad 0 \le t < 2\pi. \tag{1}$$

Ohjeita: On helppo näyttää (miten?), että jokainen ehdon (1) toteuttava piste on K:lla. Olkoon käänteisesti $(x, y) \in K$, jolloin on näytettävä, että se toteuttaa ehdon (1). Olkoon $\tilde{C}$ funktion C rajoittuma välille $[0, \pi]$. Siis kyseessä on funktio $\tilde{C} : [0, \pi] \to [-1, 1]$, jonka sääntö on $\tilde{C}(x) = C(x)$. Osoita, että se on bijektio, joten sillä on käänteisfunktio $\tilde{C}^{-1} : [-1, 1] \to [0, \pi]$ (*arkuskosini*). On siis olemassa täsmälleen yksi sellainen $t \in [0, \pi]$, että $x = \tilde{C}(t)$. Miksi $\tilde{C}(t) = C(t)$? Miten jatkat?

Jotta S:n ja C:n yhteys "koululaisen siniin ja kosiniin" saataisiin täydelliseksi, pitäisi vielä osoittaa, että t:llä on geometrisena merkityksenä K:n tietyn kaaren (minkä?) pituus. Tätä emme voi tehdä, koska emme määrittele täsmällisesti käyrän pituutta (emmekä muitakaan geometrisia käsitteitä).

128. Olkoon $a > 0$. Määritellään rationaalipotenssi a^x tavanomaisesti (siis miten?). Todista:

a) $E(x) = \mathrm{e}^x$ kaikilla $x \in \mathbb{Q}$. Ohje: Käytä yhteenlaskukaavaa.

b) $E(x) = \sup\{\mathrm{e}^y \mid y \in \mathbb{Q}, y < x\}$ kaikilla $x \notin \mathbb{Q}$. Näin saadaan vaihtoehtoinen määritelmä $E(x)$:lle ja voidaan merkitä $E(x) = \mathrm{e}^x$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

129. Eksponenttifunktio E on bijektio $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ (miksi?). Sen käänteisfunktio on *logaritmifunktio* $L = E^{-1}$. Todista: Kaikilla $x, y > 0$

a) $L(xy) = L(x) + L(y)$,

b) $L'(x) = 1/x$.

130. Olkoon $a \in \mathbb{R}$. Määritellään *potenssifunktio*

$$P_a(x) = E(aL(x)), \quad x > 0.$$

Merkitsemällä $\ln x = L(x)$ saadaan tavanomainen muoto

$$P_a(x) = \mathrm{e}^{a \ln x} = x^a.$$

Todista: Kaikilla $x, y > 0$, $a, b \in \mathbb{R}$

a) $(xy)^a = x^a y^a$ **b)** $(x^a)^b = x^{ab}$

c) $x^a x^b = x^{a+b}$ **d)** $\mathrm{D}x^a = ax^{a-1}$

missä D tarkoittaa derivointia x:n suhteen.

5 Funktion derivaatta

5.1 Derivoituvuus ja differentioituvuus

Raja-arvon täsmällisen määritelmän kautta tulee myös derivaatta määritellyksi täsmällisesti. Olkoon funktio f määritelty pisteen a eräässä ympäristössä. Sen *erotusosamäärä* pisteestä a pisteeseen x on

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a},$$

kun $x \neq a$. Jos erotusosamäärän raja-arvo

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

on olemassa, niin f on *derivoituva pisteessä* a ja kyseinen raja-arvo on f:n *derivaatta* tässä pisteessä. Toispuolinen derivoituvuus määritellään vastaavasti toispuolisilla raja-arvoilla. Tällöin riittää, että f on määritelty a:n eräässä toispuolisessa ympäristössä. Jos f on derivoituva välin I jokaisessa pisteessä, niin se on *derivoituva välillä* I. Jos I sisältää päätepisteensä, niin siinä pisteessä riittää toispuolinen derivoituvuus.

Välillä I derivoituvan funktion f *derivaattafunktio* f' määritellään niin, että sen arvo on f:n derivaatta kussakin I:n pisteessä. Siis

$$f'(x) = \lim_{z\to x} \frac{f(z)-f(x)}{z-x}.$$

Myös derivaattafunktiota kutsutaan lyhyesti derivaataksi. Käytämme merkintöjä $f'(a-)$ ja $f'(a+)$ toispuolisille derivaatoille pisteessä a.

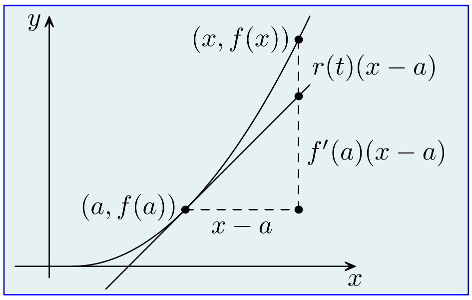
Olkoon f määritelty välillä I ja derivoituva pisteessä $a \in I$, ja olkoon $x \in I$, $x \neq a$. Jaamme erotuksen $f(x) - f(a)$ kahteen osaan

$$f(x) - f(a) = f'(a)(x-a) + r(x)(x-a),$$

missä

$$r(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a).$$

Kun $x \to a$, edellinen osa $f'(a)(x-a) \to 0$ ”lineaarisesti” sikäli, että se muuttuu samassa suhteessa kuin $x-a$. Jos esimerkiksi $x-a$ puolittuu, niin se puolittuu. Sen sijaan jälkimmäinen osa $r(x)(x-a) \to 0$ nopeammin, sillä kumpikin tulontekijä $\to 0$.



Voidaanko erotus $f(x) - f(a)$ jakaa muillakin tavoilla lineaariseen osaan ja nopeammin nollaa lähestyvään osaan? Entä voidaanko tällainen jako tehdä, vaikka f ei olisi derivoituva a:ssa? Vastauksia varten määrittelemme tällaisen jaon täsmällisesti. Tarkastelemme funktiota f, joka on määritelty välillä I. Se on *differentioituva pisteessä* $a \in I$, jos on olemassa sellainen vakio k ja a:ssa jatkuva funktio g, että $g(a) = 0$ ja

$$f(x) - f(a) = k(x - a) + g(x)(x - a)$$

kaikilla $x \in I$.

Lause 18 *Olkoon funktio f määritelty välillä I ja olkoon $a \in I$. Seuraavat ehdot ovat yhtäpitävät.*

(a) *f on differentioituva a:ssa,*

(b) *f on derivoituva a:ssa,*

(c) *on olemassa sellainen I:ssä määritelty a:ssa jatkuva funktio ϕ, että*

$$f(x) - f(a) = \phi(x)(x - a)$$

kaikilla $x \in I$.

Lisäksi $\phi(a) = f'(a)$.

Todistus (a)⇒(b). Jos f on differentioituva a:ssa, niin

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x\to a} (k + g(x)) = k + g(a) = k,$$

joten $f'(a) = k$. Siis f on derivoituva a:ssa.

(b)⇒(c). Jos f on derivoituva a:ssa, niin $\phi(x) = f'(a) + r(x)$ kelpaa.

(c)⇒(a). Jos ϕ löytyy, niin

$$\begin{aligned} f(x)-f(a) &= \phi(x)(x-a) \\ &= [\phi(a)+(\phi(x)-\phi(a))](x-a) \\ &= \phi(a)(x-a)+(\phi(x)-\phi(a))(x-a). \end{aligned}$$

Siis $k=\phi(a)$, $g(x)=\phi(x)-\phi(a)$ kelpaa. Lisäksi

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\phi(x)=\phi(a).$$

■

Kun $x\neq a$, funktio ϕ on aina yksikäsitteisesti olemassa, sillä $\phi(x)$ on f:n erotusosamäärä a:sta x:ään. Ominaisuuden (c) varsinainen sisältö on, että $\phi(a)$ voidaan määritellä niin, että ϕ tulee jatkuvaksi a:ssa. Tällöin $\phi(a)= f'(a)$.

Saimme (miksi?) siis kysymyksiimme kielteiset vastaukset. Mutta koska differentioituvuus on yhtäpitävä derivoituvuuden kanssa, mitä hyötyä on tästä uudesta käsitteestä? Ei mitään yhden muuttujan funktioille, mutta usean muuttujan funktiolle nämä käsitteet eivät ole yhtäpitäviä.

Derivoituvan funktion ominaisuus (c) on varsin hyödyllinen. Esimerkiksi siitä seuraa välittömästi (miten?), että derivoituva funktio on jatkuva. Lukiossa derivoimissäännöt johdetaan erotusosamäärän raja-arvojen kautta (tai jätetään johtamatta), mutta meidän on mukavampi käyttää (c):tä. Todistamme summan derivoimissäännön ja käsittelemme muita harjoitustehtävissä.

Olkoot f ja g välillä I derivoituvia funktioita ja olkoon $a\in I$. Lauseen 18 perusteella on olemassa sellaiset pisteessä a jatkuvat funktiot ϕ ja ψ, että

$$f(x)-f(a)=\phi(x)(x-a), \quad g(x)-g(a)=\psi(x)(x-a).$$

Summafunktiolle $h=f+g$ on

$$\begin{aligned} h(x)-h(a) &= f(x)+g(x)-f(a)-g(a) \\ &= f(x)-f(a)+g(x)-g(a) \\ &= \phi(x)(x-a)+\psi(x)(x-a) \\ &= (\phi(x)+\psi(x))(x-a). \end{aligned}$$

Funktio $\theta=\phi+\psi$ on jatkuva pisteessä a, koska ϕ ja ψ ovat siinä jatkuvia. Siin h on derivoituva lauseen 18 mukaan ja

$$h'(a)=\theta(a)=\phi(a)+\psi(a)=f'(a)+g'(a).$$

Harjoitustehtäviä

131. Johda vakiotekijän siirtosääntö

$$(cf)' = cf'$$

a) suoraan, **b)** tulon derivoimissäännön erikoistapauksena.

132. Johda tulon derivoimissääntö

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

Ohje: Kirjoita aluksi

$$f(x)g(x) - f(a)g(a) = f(x)g(x) - f(a)g(x) + f(a)g(x) - f(a)g(a).$$

133. Johda osamäärän derivoimissääntö

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2},$$

jolloin nimittäjä ei saa olla nolla. Ohje: Käsittele ensin tapaus $f(x) = 1$ ja sitten tulon derivoimissäännön avulla yleinen tapaus.

134. Johda potenssifunktion $f(x) = x^a$ derivoimissääntö $f'(x) = ax^{a-1}$, kun

a) $a \in \mathbb{N}$.

b) $a \in \mathbb{Z}$. Ohje: Tapauksessa $a < 0$ käytä osamäärän derivoimissääntöä.

c) $a \in \mathbb{Q}$. Ohjeita: Tapauksessa $a = m/n$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $n > 1$ johda ensin käänteisfunktion derivoimissäännön perusteella juurifunktion $f(x) = \sqrt[n]{x}$ derivoimissääntö. Totea, että tapaus $a = 1/n$ on nyt selvitetty. Sitten käsittele tapaus $a = m/n$ yhdistetyn funktion derivoimissäännön avulla.

d) $a \in \mathbb{R}$. Ohje: Tapauksessa $a \notin \mathbb{Q}$ kirjoita $x^a = \mathrm{e}^{a \ln x}$ ja käytä yhdistetyn funktion derivoimissäntöä.

Mitä ehtoja täytyy asettaa x:lle kussakin tapauksessa?

135. Olkoon funktio f derivoituva välillä I ja olkoon funktio g derivoituva välillä $f(I)$. Todista yhdistetyn funktion $h = g \circ f$ derivoimissääntö

$$h'(x) = g'(f(x))f'(x).$$

Ohjeita: Olkoon $a \in I$ ja $f(a) = b$. Kirjoita

$$f(x) - f(a) = \phi(x)(x - a), \quad g(y) - g(b) = \psi(y)(y - b),$$

jolloin $g(f(x)) - g(b) = \psi(f(x))(f(x) - b)$. Nyt on

$$h(x) - h(a) = \phi(x)\psi(f(x))(x - a)$$

(miksi?). Miten jatkat?

136. Olkoon f bijektio väliltä I välille J, jolloin sillä on käänteisfunktio $g = f^{-1} : J \to I$.

a) Oletetaan, että f ja g ovat derivoituvia ja että $f'(x) \neq 0$ kaikilla $x \in I$. Todista käänteisfunktion derivoimissääntö

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(g(y))},$$

missä $y = f(x)$, jolloin $x = g(y)$. Ohje: Derivoi yhtälön $g(f(x)) = x$ molemmat puolet.

b) Osoita, ettei g:n derivoituvuutta tarvitse olettaa, sillä se seuraa muista oletuksista. Ohjeita: Olkoon $a \in I$. Tarkastele lauseen 18 c mukaista hajotelmaa

$$f(x) - f(a) = \phi(x)(x - a).$$

Merkitsemällä kuten a-kohdassa ja lisäksi $b = f(a)$, jolloin $a = g(b)$, saat tämän muotoon

$$y - b = \phi(g(y))(g(y) - g(b)).$$

Miten jatkat?

137. **a)** Osoita, ettei raja-arvo

$$\lim_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$$

ole olemassa. Ohje: Näytä, että tarkasteltava funktio saa origon jokaisessa ympäristössä arvot 1 ja -1. Miten väitös seuraa tästä?

b) Totea a-kohdan seurauksena, ettei funktio

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, \text{ kun } x \neq 0, \\ 0, \text{ kun } x = 0, \end{cases}$$

ole jatkuva origossa.

138. Osoita, että funktio

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, \text{ kun } x \neq 0, \\ 0, \text{ kun } x = 0, \end{cases}$$

on origossa jatkuva mutta ei derivoituva.

139. Kun ajattelee derivaattaa tangentin kulmakertoimena, tuntuu siltä, että derivaatta on aina jatkuva. Jos näet funktion kuvaajalla on kaikkialla tangentti, niin sen kulmakerroin ei voi muuttua epäjatkuvasti. Tämän väärän vaikutelman antavat kuitenkin vain ”siistin näköiset” kuvaajat, ja muunkinlaisia kuvaajia on. Niinpä derivaatta voi olla epäjatkuva.

a) Osoita, että funktio

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, \text{ kun } x \neq 0, \\ 0, \text{ kun } x = 0, \end{cases}$$

on kaikkialla derivoituva, mutta f' on epäjatkuva origossa.

b) Miten tämä näkyy kuvaajasta?

140. Yhtälö $F(x, y) = 0$ saattaa määritellä y:n *implisiittisesti* x:n funktiona. Jos f on tämä *implisiittifunktio*, niin $f(x)$ on se luku, joka toteuttaa yhtälön $F(x, y) = 0$. Luvun y täytyy tällöin olla yksikäsitteisenä olemassa.

a) Osoita, että yhtälö

$$x^2 + y^2 - 1 = 0, \quad |x| \leq 1, \tag{1}$$

ei määrittele implisiittifunktiota $y = f(x)$ mutta määrittelee sen lisäehdolla $y \geq 0$.

b) *Implisiittisessä derivoinnissa* määritetään implisiittifunktion $y = f(x)$ derivaatta ratkaisematta yhtälöä $F(x, y) = 0$ y:n suhteen eli määrittämättä tätä funktiota *eksplisiittisesti*. Tällöin ajatellaan y:n paikalle sijoitetuksi $f(x)$ ja käytetään tavanomaisia derivoimissääntöjä. Yhtälön (1) tapauksessa tarkastellaan siis yhtälöä $x^2 + f(x)^2 - 1 = 0$, derivoidaan ja ratkaistaan $f(x)$. Kuitenkin on mukavampi säilyttää merkintä y ja käyttää $f'(x)$:n sijasta merkintää y'. Tällöin saadaan $2x + 2yy' = 0$, josta $y' = -x/y$.

Laske $f'(x)$ käyttämättä implisiittistä derivointia. Toisin sanoen ratkaise yhtälö (1) y:n suhteen ja derivoi saamasi funktio tavanomaisesti. Vertaa tuloksia.

5.2 Derivaatan nollakohtalause ja Rollen lause

Koska derivaatan geometrinen merkitys on funktion kuvaajan tangentin kulmakerroin, derivaatan avulla voidaan selvittää funktion ”kulku” eli millä tavalla funktion arvo muuttuu x:n muuttuessa. Ryhdymme nyt tutkimaan tätä aihetta täsmällisesti, jolloin geometrinen havainto ei kelpaa vaan väitteet on todistettava. Aloitamme kahdella derivaatan nollakohtaa koskevalla lauseella.

Olkoon funktio f määritelty välillä I. Piste $a \in I$ on f:n *paikallinen maksimipiste*, jos sen eräässä ympäristössä U on $f(x) \leq f(a)$. Tällöin $f(a)$ on f:n *paikallinen maksimi(arvo)*. Jos I sisältää päätepisteensä, niin päätepisteessä tarkastellaan vastaavaa puoliympäristöä. Jos $f(x) < f(a)$ kaikilla $x \in U \setminus \{a\}$, niin kyseessä on *aito* paikallinen maksimipiste ja maksimi(arvo). Määrittelemme *paikallisen minimipisteen* ja *minimi(arvo)n* vastaavasti epäyhtälöllä $f(x) \geq f(a)$. Käytämme näin määritellyistä käsitteistä yhteisiä nimityksiä *paikallinen ääriarvopiste* ja *paikallinen ääriarvo*. Ellei väärinkäsityksen vaaraa ole, sana ”paikallinen” voidaan jättää pois. (Vaaran saattaa aiheuttaa se, että ääriarvoiksi kutsutaan myös f:n suurinta ja pienintä arvoa ja ääriarvopisteiksi niitä pisteitä, joissa ne saavutetaan.)

Lause 19 (Derivaatan nollakohtalause) *Olkoon f kuten edellä. Jos I avoin ja a on f:n paikallinen ääriarvopiste sekä f on siinä derivoituva, niin $f'(a) = 0$.*

Todistus Oletamme, että a maksimipiste, ja jätämme minimipisteen käsittelyn harjoitustehtäväksi (teht. 141). Tällöin on olemassa sellainen $\delta > 0$, että $f(x) - f(a) \leq 0$ aina, kun $|x - a| < \delta$. Kun $a < x < a + \delta$, on

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0,$$

joten

$$f'(a) = \lim_{x \to a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0$$

(teht. 49a). Toisaalta, kun $a - \delta < x < a$, on

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0,$$

joten

$$f'(a) = \lim_{x \to a-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0.$$

Siis $f'(a) = 0$. ∎

Lause 20 (Rollen lause) *Oletetaan, että funktiolle f pätee:*

(a) *f on jatkuva suljetulla välillä $[a, b]$,*

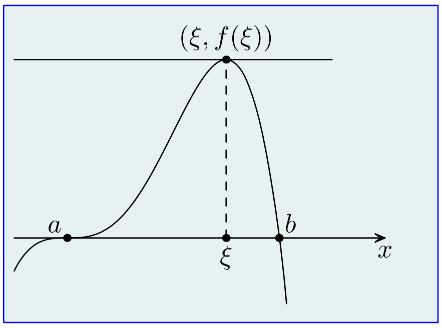
(b) *f on derivoituva avoimella välillä $]a, b[$,*

(c) *$f(a) = f(b) = 0$.*

Tällöin on olemassa ainakin yksi sellainen piste $\xi \in]a, b[$, jolle $f'(\xi) = 0$.

Todistus Jos $f(x) = 0$ kaikilla $x \in]a, b[$, niin mikä tahansa tämän välin piste kelpaa. Muulloin f saa sinakin yhden nollasta eroavan arvon (itse asiassa äärettömän monta nollasta eroavaa arvoa, miksi?) Oletamme, että se saa positiivisen arvon, ja jätämme harjoitustehtäväksi (teht. 142) tapauksen, jossa niin ei käy. Jatkuvan funktion ääriarvolauseen (lause 34) mukaan on olemassa ainakin yksi sellainen piste $\xi \in [a, b]$, jossa f saavuttaa suurimman arvonsa. Koska $f(\xi) > 0$, on $\xi \neq a, b$, joten $\xi \in]a, b[$. Koska ξ on myös paikallinen ääriarvopiste, on derivaatan nollakohtalauseen mukaan $f'(\xi) = 0$. ■

Rollen lauseella on yksinkertainen geometrinen merkitys: f:n kuvaajalla on vaakasuora tangentti ainakin yhdessä pisteessä.



Oikeastaan ehdon (c) sijasta riittää ehto

(c’) $f(a) = f(b)$

(teht. 143). Nollaksi edellyttäminen johtunee historiallisista syistä ja siitä, että Rollen lausetta sovelletaan useimmiten sellaisessa tilanteessa, jossa näin on.

Harjoitustehtäviä

141. Todista derivaatan nollakohtalause, kun a on f:n paikallinen minimipiste.

142. Todista Rollen lause, kun f:n kaikki nollasta eroavat arvot ovat negatiivisia.

143. Osoita, että Rollen lauseen ehdon (c) sijasta riittää (c').

144. Anna esimerkki sellaisesta funktiosta, joka toteuttaa Rollen lauseen ehdot

a) (a) ja (b) muttei ehtoa (c'),

b) (a) ja (c') muttei ehtoa (b),

c) (b) ja (c') muttei ehtoa (a),

ja jolle tämän lauseen mukaista pistettä ξ ei löydy.

145. Rollen lauseessa ei vaadita f:n derivoituvuutta välin $[a, b]$ päätepisteissä. Mutta seuraako se tämän lauseen oletuksista? Osoita, ettei välttämättä. Anna siis esimerkki sellaisesta funktiosta, joka toteuttaa Rollen lauseen oletukset, mutta

a) ei ole derivoituva a:ssa, kun taas on b:ssä,

b) ei ole derivoituva a:ssa eikä b:ssä.

146. Anna esimerkki sellaisesta funktioista, joka toteuttaa Rollen lauseen oletukset, mutta

a) a ei ole sen (toispuolinen paikallinen) ääriarvopiste, kun taas b on,

b) a ja b eivät ole ääriarvopisteitä.

147. Jos derivoituvalla funktiolla on n nollakohtaa, niin mitä voidaan sanoa derivaatan nollakohtien lukumäärästä?

148. Oletetaan, että funktio f toteuttaa Rollen lauseen oletukset ja on kahdesti derivoituva avoimella välillä $]a, b[$. Millä yksinkertaisella ehdolla $f''(\xi) = 0$ ainakin yhdessä pisteessä $\xi \in]a, b[$?

149. Todista: Jos $p > 0$, niin yhtälöllä

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0$$

on enintään kaksi (reaalista) ratkaisua.

150. Olkoon $n \in \mathbb{Z}_+$, $n \geq 2$. Tutki yhtälön

$$x^n + px + q = 0$$

(reaalisten) ratkaisujen lukumäärää.

5.3 Väliarvolause ja sen sovelluksia

Väliarvolauseella on keskeinen merkitys tutkittaessa funktion kulkua derivaatan avulla.

Lause 21 (Väliarvolause) *Oletetaan, että funktiolle f pätee:*

(a) *f on jatkuva suljetulla välillä $[a, b]$,*

(b) *f on derivoituva avoimella välillä $]a, b[$.*

Tällöin on olemassa ainakin yksi sellainen piste $\xi \in]a, b[$, jolle

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

eli

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

Todistus Funktio

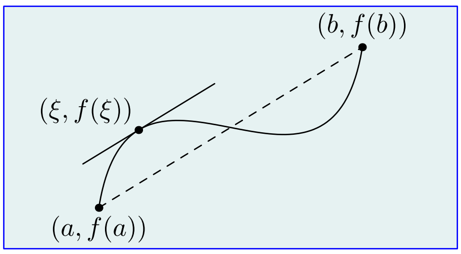
$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

toteuttaa Rollen lauseen oletukset. Siis on olemassa sellainen piste $\xi \in]a, b[$, että $g'(\xi) = 0$. Toisaalta

$$g'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

joten väitös seuraa. ■

Kuten Rollen lauseella, myös väliarvolauseella on yksinkertainen geometrinen merkitys: f:n kuvaajalla on pisteiden $(a, f(a))$ ja $(b, f(b))$ kautta kulkevan sekantin suuntainen tangentti ainakin yhdessä pisteessä.



Väliarvolausetta kutsutaan usein differentiaalilaskennan väliarvolauseeksi, sillä myös integraalilaskennassa on väliarvolause (teht. 175).

Lause 22 (Derivaatan merkkilause) *Olkoon funktio f jatkuva välillä $[a, b]$ ja derivoituva välillä $]a, b[$. Jos kaikilla $x \in]a, b[$*

$f'(x) \geq 0$, niin f on kasvava;

$f'(x) \geq 0$ ja $f'(x) = 0$ vain yksittäisissä pisteissä (eli ei millään välin $]a, b[$ osavälillä), niin f on aidosti kasvava;

$f'(x) \leq 0$, niin f on vähenevä;

$f'(x) \leq 0$ ja $f'(x) = 0$ vain yksittäisissä pisteissä, niin f on aidosti vähenevä.

Todistus Osoitamme kasvua koskevan alkuosan ja jätämme loppuosan harjoitustehtäväksi (teht. 151).

Oletamme, että $f'(x) \geq 0$ kaikilla $x \in]a, b[$. Olkoon $a \leq x_1 < x_2 \leq b$. Väliarvolauseen perusteella löytyy sellainen $\xi \in]x_1, x_2[$, jolle

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1).$$

Koska $f'(\xi) \geq 0$ ja $x_2 - x_1 > 0$, on $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$ eli $f(x_2) \geq f(x_1)$. Siis f on kasvava.

Oletamme nyt lisäksi, ettei $f'(x) = 0$ millään välin $]a, b[$ osavälillä, ja väitämme, että f:n kasvu on aitoa. Teemme vastaoletuksen, ettei näin ole. Toisin sanoen on olemassa pisteet x_1 ja x_2, joille $x_1 < x_2$ ja $f(x_1) = f(x_2)$. Koska f on kasvava, sillä täytyy olla sama arvo koko välillä $[x_1, x_2]$, mutta silloin $f'(x) = 0$ tällä välillä, mikä on vastoin oletusta. ■

Vakiofunktion derivaatta on nollafunktio. *Integraalilaskennan peruslauseen* mukaan käänteinen tulos pätee, jos tarkasteltavan funktion määrittelyjoukko on väli. Se ei päde yleisesti (teht. 152). Tämä lause ansaitsee nimensä, koska sen avulla löydetään funktion kaikki integraalifunktiot, kun tunnetaan yksi niistä (lause 29).

Lause 23 (Integraalilaskennan peruslause) *Olkoon funktio f derivoituva välillä I. Jos $f'(x) = 0$ kaikilla $x \in I$, niin f on vakiofunktio.*

Todistus Olkoon $x_1, x_2 \in I$ ja $x_1 < x_2$. Väliarvolauseen perusteella löytyy sellainen $\xi \in]x_1, x_2[$, jolle

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1).$$

Koska $f'(\xi) = 0$, on $f(x_2) - f(x_1) = 0$ eli $f(x_1) = f(x_2)$. Siis f:n arvot missä tahansa kahdessa annetussa pisteessä ovat samat, joten f on vakiofunktio. ■

Väliarvolauseen avulla voidaan arvioida funktiota, kun tunnetaan sen arvo yhdessä pisteessä ja derivaatan rajat.

Esimerkki 1 Tiedetään, että välillä $[0,2]$ jatkuvalle ja välillä $]0,2[$ derivoituvalle funktiolle f pätee $f(0)=1$ ja $-1 \leq f'(x) \leq 2$ kaikilla $x \in]0,2[$. **a)** Määritä rajat $f(1)$:lle. **b)** Sama tehtävä, kun tiedetään lisäksi, että $f(2)=4$.

a) Soveltamalla väliarvolausetta välillä $[0,1]$ saamme

$$f(1)-f(0)=f(1)-1=f'(\xi)(1-0)=f'(\xi),$$

missä $\xi \in]0,1[$. Täten

$$f(1)=f'(\xi)+1 \leq 2+1=3$$

ja

$$f(1)=f'(\xi)+1 \geq -1+1=0.$$

Toisin sanoen $0 \leq f(1) \leq 3$.

b) Sovellamme väliarvolausetta myös välillä [1,2], jolloin

$$f(2)-f(1)=4-f(1)=f'(\xi)(2-1)=f'(\xi),$$

missä $\xi \in]1,2[$. Täten

$$f(1)=4-f'(\xi) \leq 4-(-1)=5$$

ja

$$f(1)=4-f'(\xi) \geq 4-2=2.$$

Tiedämme siis myös, että $2 \leq f(1) \leq 5$. Meillä on nyt kaksi alarajaa ja kaksi ylärajaa. Valitsemme niistä paremmat, siis alarajoista suuremman ja ylärajoista pienemmän. Näin saamme $2 \leq f(1) \leq 3$.

Harjoitustehtäviä

151. Todista lauseen 22 funktion vähenemistä koskeva osa.

152. Anna esimerkki funktiosta f, joka ei ole vakiofunktio, vaikka f' on nollafunktio.

153. Tiedetään, että funktio f on kaikkialla derivoituva ja toteuttaa kaikilla x:n arvoilla epäyhtälön $|f'(x)| \leq |\sin x|$. Johda (x:stä riippuva) yläraja $|f(x)|$:lle, kun **a)** $f(0)=0$, **b)** $f(2)=-3$.

154. Oletetaan, että funktio f on derivoituva pisteen a eräässä ympäristössä ja $f'(a) = 0$.

a) Todista: Jos a:lla on sellainen ympäristö, jossa

$$(x < a \Rightarrow f'(x) > 0) \wedge (x > a \Rightarrow f'(x) < 0),$$

niin a on f:n aito maksimipiste.

b) Kirjoita ja todista minimipistettä koskeva vastaava lause.

155. Olkoon f kuten edellä ja lisäksi kahdesti derivoituva pisteessä a. Todista: Jos $f''(a) < 0$ (vastaavasti $f''(a) > 0$), niin a on f:n aito maksimipiste (vastaavasti minimipiste).

156. **a)** Tarkastellaan pisteen a tietyssä ympäristössä ”paloittain määriteltyä” funktiota

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & \text{kun}\, x \le a, \\ h(x), & \text{kun}\, x > a. \end{cases}$$

Kysytään, onko f derivoituva a:ssa, ja myönteisessä tapauksessa on määritettävä $f'(a)$. Tämä tehtävä voidaan ratkaista muodostamalla f:n ”vasemmanpuolinen erotusosamäärä” a:sta x:ään (jolloin $x < a$) ja "oikeanpuolinen erotusosamäärä” ($x > a$) sekä tutkimalla niiden raja-arvoja, kun $x \to a$. Mutta jos tiedetään, että f on derivoituva, kun $x \neq a$, niin onko seuraava vaihtoehtoinen menetelmä yleispätevä? Jos toispuoliset raja-arvot

$$\lim_{x \to a-} f'(x) = \lim_{x \to a-} g'(x) \quad \text{ja} \quad \lim_{x \to a+} f'(x) = \lim_{x \to a+} h'(x)$$

ovat olemassa ja yhtäsuuret, niin f on derivoituva a:ssa ja näin saadaan $f'(a)$. Toisin sanoen: Jos raja-arvo

$$c = \lim_{x \to a} f'(x)$$

on olemassa, niin f on derivoituva a:ssa ja $f'(a) = c$. Osoita, että vastaus on kielteinen. Sitä varten anna esimerkki sellaisesta funktiosta, jolla tämä raja-arvo on olemassa mutta joka ei ole a:ssa edes jatkuva.

b) Osoita tämä menetelmä oikeaksi, kun oletetaan lisäksi, että f on jatkuva a:ssa.

157. Välillä I määritelty funktio f toteuttaa *Lipschitzin ehdon*, jos on olemassa sellainen vakio k, että

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq k|x_1 - x_2|$$

kaikilla $x_1, x_2 \in I$.

a) Todista: Derivoituva funktio toteuttaa Lipschitzin ehdon, jos ja vain jos sen derivaatta on rajoitettu.

b) Anna esimerkki funktiosta, joka i) ei ole derivoituva mutta toteuttaa Lipschitzin ehdon, ii) on derivoituva mutta ei toteuta tätä ehtoa.

158. ”Nolla per nolla” -muotoisia raja-arvoja voidaan määrittää mukavasti *L'Hospitalin säännöllä*. Sen yleinen todistus on vaikea (teht. 160) mutta tämän tehtävän oletuksilla helppo.

a) Olkoot funktiot f ja g määriteltyjä pisteen a eräässä ympäristössä ja derivoituvia tässä pisteessä. Todista: Jos $f(a) = g(a) = 0$ ja $g'(a) \neq 0$, niin

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

Ohje: Kirjoita

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)}$$

ja sovella lausetta 18 c. Miten jatkat?

b) Määritä raja-arvo

$$\text{i)}\ \lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}, \quad \text{ii)}\ \lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x}, \quad \text{iii)}\ \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x},$$

$$\text{iv)}\ \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2 + a^2} - a}{\sqrt{x^2 + b^2} - b}, \quad \text{v)}\ \lim_{x \to 0} \frac{\sin(a + x) - \sin(a - x)}{x}.$$

Tässä a ja b ovat annettuja positiivisia reaalilukuja.

159. **a)** Todista *yleistetty väliarvolause*: Jos funktiot f ja g toteuttavat väliarvolauseen oletukset, niin on olemassa ainakin yksi sellainen piste $\xi \in]a, b[$, jolle

$$f'(\xi)(g(b) - g(a)) = g'(\xi)(f(b) - f(a)).$$

Ohje: Sovella funktioon

$$h(x) = (f(x) - f(a))(g(b) - g(a)) + (g(b) - g(x))(f(b) - f(a))$$

Rollen lausetta (oletuksella (c')).

b) Totea, että jos $g'(x) \neq 0$ kaikilla $x \in]a, b[$, niin tämä yhtälö voidaan kirjoittaa muotoon
$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

160. a) L'Hospitalin säännön helppo todistus (teht. 158) vaatii oletuksen $f(a) = g(a) = 0$. Oletetaan nyt vain, että

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0,$$

jolloin f:n ja g:n ei tarvitse olla edes määriteltyjä a:ssa. Toisaalta muutetaan oletus derivoituvuudesta kokemaan a:n erästä ympäristöä paitsi a:ta. Osoita siis, että tällöin

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

mikäli oikealla puolella oleva raja-arvo on olemassa.

Ohjeita: Tutki aluksi oikeanpuolisia raja-arvoja. Olkoon F funktio, joka on muuten sama kuin f paitsi $F(a) = 0$. Määrittele funktio G vastaavasti g:n avulla. Olkoon $x > a$ sellainen, että f ja g ovat määritellyt välillä $]a, x]$. Totea, että F ja G toteuttavat yleistetyn väliarvolauseen oletukset välillä $[a, x]$. Päättele, että

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)} = \frac{F'(\xi_x)}{G'(\xi_x)} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)},$$

missä $\xi_x \in]a, x[$. Mitä tapahtuu, kun $x \to a$?

Totea lopuksi, että vasemmanpuolisia raja-arvoja voidaan käsitellä vastaavasti.

Voidaan todistaa [1, 9], että L'Hospitalin sääntö pätee myös raja-arvolle äärettömässä ja "ääretön per ääretön" -muotoisille raja-arvoille.

b) Määritä raja-arvo

$$\text{i)}\ \lim_{x \to 0} x^{\sin x}, \quad \text{ii)}\ \lim_{x \to 1} (2 - x)^{\tan \frac{\pi x}{2}}, \quad \text{iii)}\ \lim_{x \to 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}},$$

missä a ja b ovat annettuja positiivilukuja. Ohje: Esitä kyseisten lausekkeiden logaritmit sopivalla tavalla osamäärän muodossa.

6 Funktion integraali

6.1 Integroituvuus

Tarkastelemme välillä $[a, b]$ rajoitettua funktiota f. Tämän välin *jako* on äärellinen joukko D välin pisteitä, johon kuuluvat a ja b. Olkoon $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, missä $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$. Jakoa D vastaa *alasumma*

$$s_D = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) =$$
$$m_1(x_1 - a) + m_2(x_2 - x_1) + \cdots + m_{n-1}(x_{n-1} - x_{n-2}) + m_n(b - x_{n-1}),$$

missä

$$m_i = \inf\{f(x) \,|\, x \in [x_{i-1}, x_i]\},$$

ja *yläsumma*

$$S_D = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) =$$
$$M_1(x_1 - a) + M_2(x_2 - x_1) + \cdots + M_{n-1}(x_{n-1} - x_{n-2}) + M_n(b - x_{n-1}),$$

missä

$$M_i = \sup\{f(x) \,|\, x \in [x_{i-1}, x_i]\}.$$

Lemma 2 *Jaon tihentäminen kasvattaa alasummaa ja vähentää yläsummaa. Jos siis $D \subset D'$, niin*

$$s_D \le s_{D'} \le S_{D'} \le S_D.$$

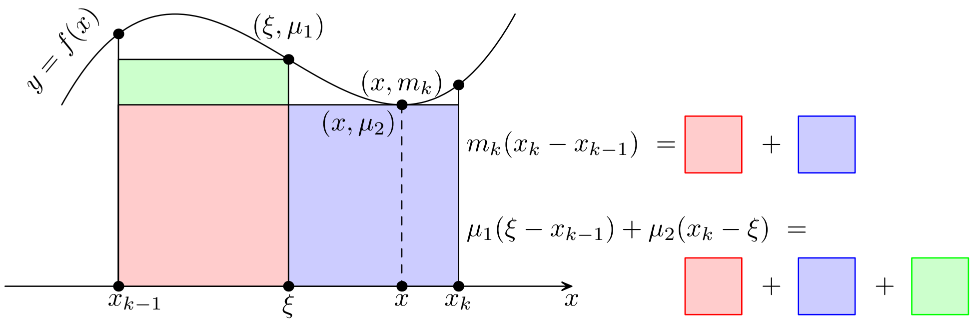
Todistus Riittää (miksi?) käsitellä tapaus, jossa D' sisältää yhden D:hen kuulumattoman pisteen; olkoon se $\xi \in]x_{k-1}, x_k[$. Merkitsemme

$$\mu_1 = \inf\{f(x) \,|\, x \in [x_{k-1}, \xi]\}, \quad \mu_2 = \inf\{f(x) \,|\, x \in [\xi, x_k]\}.$$

Koska $m_k \le \mu_1, \mu_2$ (miksi?), on s_D:n k:s termi

$$\begin{aligned} m_k(x_k - x_{k-1}) &= m_k(x_k - \xi) + m_k(\xi - x_{k-1}) \\ &\le \mu_2(x_k - \xi) + \mu_1(\xi - x_{k-1}) \\ &= \mu_1(\xi - x_{k-1}) + \mu_2(x_k - \xi), \end{aligned}$$

mikä puolestaan on $s_{D'}$:n k:nnen ja $(k+1)$:nnen termin summa. Näiden alasummien kaikki muut termit ovat samat, joten ensimmäinen epäyhtälö seuraa. Toinen epäyhtälö on selvä (miksi?). Kolmannen jätämme harjoitustehtäväksi (teht. 161). ∎



Lemma 3 *Mikä tahansa alasumma on enintään yhtäsuuri kuin mikä tahansa yläsumma. Jos siis D_1 ja D_2 ovat välin $[a, b]$ jakoja, niin*

$$s_{D_1} \leq S_{D_2}.$$

Todistus Olkoon $D = D_1 \cup D_2$. Lemman 2 perusteella

$$s_{D_1} \leq s_D \leq S_D \leq S_{D_2}.$$

■

Merkitsemme $\mathcal{D}$:llä välin $[a, b]$ kaikkien jakojen joukkoa.

Lemma 4 *Joukko $s = \{s_D \,|\, D \in \mathcal{D}\}$ on ylhäältä rajoitettu. Joukko $S = \{S_D \,|\, D \in \mathcal{D}\}$ on alhaalta rajoitettu.*

Todistus Joukon s ylärajaksi kelpaa lemman 3 mukaan mikä tahansa yläsumma. Vastaavasti joukon S alarajaksi kelpaa mikä tahansa alasumma. (Itse asiassa nämä joukot ovat rajoitettuja (teht. 161b).) ■

Merkitsemme

$$I_* = \sup\{s_D \,|\, D \in \mathcal{D}\}, \quad I^* = \inf\{S_D \,|\, D \in \mathcal{D}\}.$$

Lemman 4 perusteella nämä ovat olemassa. Jos

$$I_* = I^*,$$

niin f on *integroituva* yli välin $[a, b]$, ja luku $I = I_* = I^*$ on f:n (*Riemann-*) *integraali* yli tämän välin. Tällöin merkitsemme

$$I = \int_a^b f.$$

Jos f:n sääntö on ilmoitettu lausekkeena $f(x)$, niin tavanomainen merkintä

$$I = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

on kätevä.

Esimerkki 1 Vakiofunktio $f(x) = c$ on integroituva ja

$$\int_a^b f = c(b-a).$$

Nimittäin $s_D = S_D = c(b-a)$ kaikilla $D \in \mathcal{D}$ (miksi?), joten väitös seuraa (miksi?).

Funktion integroituvuuden osoittamisessa on hyötyä seuraavasta lauseesta.

Lause 24 (Integroituvuusehto) *Välillä $[a, b]$ rajoitettu funktio f on integroituva, jos ja vain jos kaikilla $\varepsilon > 0$ on sellainen $D \in \mathcal{D}$, että*

$$S_D - s_D < \varepsilon. \tag{1}$$

Todistus *"Jos"-suunta.* Kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$ on sellainen $D_n \in \mathcal{D}$, että

$$S_{D_n} - s_{D_n} < \frac{1}{n}.$$

Toisaalta

$$0 \leq I^* - I_* \leq S_{D_n} - s_{D_n},$$

joten

$$0 \leq I^* - I_* < \frac{1}{n}.$$

Kun $n \to \infty$, saamme $0 \leq I^* - I_* \leq 0$ eli $I^* = I_*$.

"Vain jos" -suunta. Olkoon $\varepsilon > 0$. Pienimmän ylärajan ja suurimman alarajan epsilon-ominaisuuden (lause 1 ja teht. 15) perusteella on olemassa sellaiset $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$, että

$$s_{D_1} > I_* - \frac{\varepsilon}{2} = I - \frac{\varepsilon}{2}, \quad S_{D_2} < I^* + \frac{\varepsilon}{2} = I + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Jaolle $D = D_1 \cup D_2$ pätee nyt lemman 2 mukaan

$$S_D - s_D \leq S_{D_2} - s_{D_1} < (I + \frac{\varepsilon}{2}) - (I - \frac{\varepsilon}{2}) = \varepsilon.$$

■

Sovellamme heti tätä lausetta.

Lause 25 *Suljetulla välillä jatkuva funktio on integroituva.*

Todistus (*) Olkoon funktio f jatkuva välillä $[a, b]$. Koska se on rajoitettu (lause 33), sen ylä- ja alasummat ovat määritellyt. Olkoon $\varepsilon > 0$. Koska f on tasaisesti jatkuva (lause 36), on olemassa sellainen $\delta > 0$, että

$$|u - v| < \delta \implies |f(u) - f(v)| < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

Tarkastelemme jakoa D, jonka jokaisen osavälin pituus $x_i - x_{i-1} < \delta$. Erotuksen $S_D - s_D$ k:s termi on $(M_k - m_k)(x_k - x_{k-1})$. Välillä $[x_{k-1}, x_k]$ jatkuvana funktiona f saavuttaa arvot M_k ja m_k tämän välin tietyissä pisteissä (teht. 207) u_k ja v_k. Koska $|u_k - v_k| \leq x_k - x_{k-1} < \delta$, on

$$M_k - m_k = f(u_k) - f(v_k) < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

Arvioimalla näin jokaisella osavälillä saamme

$$S_D - s_D = \sum_{i=0}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) <$$
$$\frac{\varepsilon}{b - a} \sum_{i=0}^{n} (x_i - x_{i-1}) = \frac{\varepsilon}{b - a}(b - a) = \varepsilon,$$

joten integroituvuusehto on toteutettu.

■

Harjoitustehtäviä

161. Osoita, että
a) lemmassa 2 on $S_{D'} \leq S_D$,
b) lemmassa 4 joukko s on alhaalta ja S ylhäältä rajoitettu.

162. Osoita, että funktio

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x \neq 0, \\ 1, & \text{kun } x = 0, \end{cases}$$

on integroituva yli jokaisen välin $[a, b]$ ja

$$\int_a^b f = 0.$$

163. Osoita, että Dirichlet'n funktio (s. 16) ei ole integroituva yli minkään välin.

164. Todista: Jos funktio f on integroituva yli välin $[a, b]$ ja $[c, d] \subset [a, b]$, niin f on integroituva yli välin $[c, d]$.

165. Osoita, että suljetulla välillä monotoninen funktio on integroituva.

166. Osoita, että suljetulla välillä rajoitettu funktio, joka on jatkuva yhtä pistettä lukuunottamatta, on integroituva.

167. Yleistä edellinen tehtävä tapaukseen, jossa epäjatkuvuuspisteitä on äärellinen määrä.

168. Onko olemassa integroituvaa funktiota, jolla on äärettömän monta epäjatkuvuuspistettä?

169. Voitaisiin ajatella, että on yksinkertaisempaa rajoittua välin $[a, b]$ tasavälisiin jakoihin $D_n = \{a, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, b\}$ (kuten lukiossa tehdään). Siis

$$x_1 - a = x_2 - x_1 = \cdots = x_{n-1} - x_{n-2} = b - x_{n-1} = \frac{b-a}{n}$$

ja

$$I^* = \inf\{S_{D_n} \mid n \in \mathbb{Z}_+\}, \quad I_* = \sup\{s_{D_n} \mid n \in \mathbb{Z}_+\}.$$

Miksei näin kuitenkaan kannata tehdä?

170. Välillä $[a, b]$ rajoitettu funktio f toteuttaa *Riemannin ehdon*, jos kaikilla $\varepsilon > 0$ ja kaikilla $\sigma > 0$ on sellainen jako $D \in \mathcal{D}$, että niiden osavälien $[x_{i-1}, x_i]$ pituuksien summa, joilla $M_i - m_i \geq \sigma$, on $< \varepsilon$. Osoita, että f on integroituva, jos ja vain jos se toteuttaa Riemannin ehdon.

6.2 Integraalin ominaisuuksia

”Määrätyn integraalin” ominaisuudet perustellaan lukiossa havainnollisesti pinta-aloilla. Todistamme ne nyt täsmällisesti. Merkitsemme $S_D(\phi)$:llä ja $s_D(\phi)$:llä funktion ϕ ylä- ja alasummaa jaossa $D \in \mathcal{D}$. Edelleen merkitsemme $I^*(\phi) = \inf\{S_D(\phi) \mid D \in \mathcal{D}\}$ ja $I_*(\phi) = \sup\{s_D(\phi) \mid D \in \mathcal{D}\}$.

Lause 26 *Jos f on yli välin $[a, b]$ integroituva funktio ja jos c on vakio, niin funktio cf on integroituva ja*

$$\int_a^b (cf) = c \int_a^b f.$$

Todistus Koska $S_D(cf) = cS_D(f)$ ja $s_D(cf) = cs_D(f)$ (miksi?), väitös seuraa (miten?). ∎

Lause 27 *Jos f ja g ovat yli välin $[a,b]$ integroituvia funktioita, niin funktio $f+g$ on integroituva ja*

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

Todistus Olkoon $D \in \mathcal{D}$. Koska

$$s_D(f) + s_D(g) \leq s_D(f+g) \leq S_D(f+g) \leq S_D(f) + S_D(g)$$

(miksi?), on

$$\int_a^b f + \int_a^b g = I_*(f) + I_*(g) \leq I_*(f+g) \leq$$
$$I^*(f+g) \leq I^*(f) + I^*(g) = \int_a^b f + \int_a^b g$$

(perustele yksityiskohdat), joten väitös seuraa (miksi?). ∎

Siis integraali on *additiivinen* integroitavan funktion suhteen. Se on myös additiivinen integroimisvälin suhteen. Toisin sanoen: Jos $c \in]a,b[$, niin

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Tämän todistamiseksi näytämme aluksi, että integraalin $\int_a^b f$ määritelmässä voidaan rajoittua niihin jakoihin, jotka sisältävät pisteen c.

Lemma 5 *Olkoon funktio f integroituva yli välin $[a,b]$ ja olkoon $c \in]a,b[$. Tällöin*

$$\int_a^b f = \sup\{s_D \,|\, D \in \mathcal{D}_c\} = \inf\{S_D \,|\, D \in \mathcal{D}_c\},$$

missä

$$\mathcal{D}_c = \{D \in \mathcal{D} \,|\, c \in D\}.$$

Todistus Koska $\mathcal{D}_c \subset \mathcal{D}$, on

$$\inf\{S_D \,|\, D \in \mathcal{D}_c\} \geq \inf\{S_D \,|\, D \in \mathcal{D}\}.$$

Toisaalta kaikilla $D \in \mathcal{D}$ on $D \subseteq D \cup \{c\}$, joten

$$\inf\{S_D \,|\, D \in \mathcal{D}\} \geq \inf\{S_{D\cup\{c\}} \,|\, D \in \mathcal{D}\} = \inf\{S_D \,|\, D \in \mathcal{D}_c\}.$$

Näin ollen

$$I^* = \inf\{S_D \,|\, D \in \mathcal{D}_c\}.$$

Vastaavasti

$$I_* = \sup\{s_D \,|\, D \in \mathcal{D}_c\}.$$

∎

Lause 28 *Olkoon funktio f integroituva yli välin $[a,b]$ ja olkoon $c\in]a,b[$. Tällöin f on integroituva yli välien $[a,c]$ ja $[c,b]$ ja*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Todistus Alkuosan todistus on harjoitustehtävänä (teht. 164). Todistamme loppuosan.

Merkitsemme $\mathcal{D}'$:lla välin $[a,c]$ jakojen ja $\mathcal{D}''$:lla välin $[c,b]$ jakojen joukkoa. Jos ja vain jos $D\in\mathcal{D}_c$, niin $D=D'\cup D''$, missä $D'\in\mathcal{D}'$ ja $D''\in\mathcal{D}''$. Tällöin $S_D=S_{D'}+S_{D''}$. Edelleen

$$\begin{aligned}\int_a^b f &= \inf\{S_D \mid D\in\mathcal{D}_c\} = \inf\{S_{D'}+S_{D''} \mid D'\in\mathcal{D}', D''\in\mathcal{D}''\}\\ &= \inf\{S_{D'} \mid D'\in\mathcal{D}'\} + \inf\{S_{D''} \mid D''\in\mathcal{D}''\} = \int_a^c f + \int_c^b f\end{aligned}$$

(perustele yksityiskohdat). ■

Harjoitustehtäviä

171. Olkoon funktio f integroituva yli välin $[a,b]$.

a) Osoita, että

$$m(b-a)\le \int_a^b f \le M(b-a),$$

missä

$$m=\inf\{f(x)\mid x\in[a,b]\},\quad M=\sup\{f(x)\mid x\in[a,b]\}.$$

b) Todista: Jos f on jatkuva eikä ole vakiofunktio, niin kumpikin erisuuruus on aito.

172. Olkoot funktiot f ja g integroituvia yli välin $[a,b]$. Todista:

a) Jos $f(x)\le g(x)$ kaikilla $x\in[a,b]$, niin

$$\int_a^b f \le \int_a^b g.$$

b) Jos f ja g ovat jatkuvia eri funktioita, niin erisuuruus on aito.

173. Olkoon f välillä $[a,b]$ jatkuva ei-negatiivinen funktio.

a) Todista: Jos $\int_a^b f = 0$, niin f on nollafunktio.

b) Näytä vastaesimerkillä, ettei tämä väite ole yleisesti tosi, jos f:sta oletetaan jatkuvuuden sijasta vain integroituvuus.

174. Todista: Jos funktio f on jatkuva välillä $[a,b]$, niin

$$\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|.$$

Itse asiassa f:n integroituvuus riittää, jolloin myös $|f|$ on integroituva [1, Corollary 5.19], [8, lause 8.6.7], [9, Theorem 6.13].

175. Kahden integroituvan funktion tulofunktio on integroituva, ks. [1, Theorem 5.24], [7, lause 8.6.8], [9, Theorem 6.13]. Tyydytään tapaukseen, jossa nämä funktiot ovat samat.

a) Todista: Jos funktio f on integroituva yli välin $[a,b]$, niin funktio f^2 on integroituva.

b) Näytä vastaesimerkillä, ettei käänteinen väite ole yleisesti tosi.

176. Todista *integraalilaskennan väliarvolause*: Jos funktio f jatkuva välillä $[a,b]$, niin olemassa sellainen piste $\xi \in]a,b[$, että

$$\int_a^b f = f(\xi)(b-a).$$

177. Todista *integraalilaskennan yleistetty väliarvolause*: Jos funktiot f ja g ovat jatkuvia välillä $[a,b]$ ja g ei muuta merkkiään tällä välillä, niin on olemassa sellainen piste $\xi \in]a,b[$, että

$$\int_a^b fg = f(\xi)\int_a^b g.$$

178. Olkoon funktio f jatkuva eräällä origon sisältävällä välillä.

a) Osoita, että

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} f = f(0).$$

b) Näytä vastaesimerkillä, ettei tämä väite ole yleisesti tosi, jos f:sta oletetaan vain integroituvuus.

179. Olkoon funktio f määritelty välillä $[a,b]$ ja jatkuva välillä $]a,b[$. Esitä yksinkertainen riittävä ehto sille, että f on integroituva yli välin $[a,b]$.

180. Todista: Jos funktio f on integroituva yli välin $[a,b]$, niin funktio

$$F(x) = \int_a^x f$$

on tällä välillä jatkuva.

6.3 Integraalifunktio

Olkoon funktio f määritelty välillä I, joka voi olla avoin, puoliavoin tai suljettu ja myös ääretön. Funktio F on f:n *integraalifunktio*, jos

$$F'(x) = f(x)$$

kaikilla $x \in I$.

Myös integraalifunktiota kutsutaan integraaliksi, ellei väärinkäsityksen vaaraa ole. Nämä käsitteet erotetaan silloin toisistaan kutsumalla integraalifunktiota ”määräämättömäksi integraaliksi” ja integraalia ”määrätyksi integraaliksi”. (Voidaan ajatella, että f:n kaikkien integraalifunktioiden F joukosta funktio $F(x) = \int_a^x f$ noudattaa ”määräystä” $F(a) = 0$.) Vaikka näillä käsitteillä on läheinen yhteys (lause 31), ne ovat aivan eri käsitteitä. Siksi termin ”integraalifunktio” sijasta käytetään myös termejä ”primitiivi”, ”kantafunktio” ja ”antiderivaatta”, mutta mikään niistä ei ole vakiintunut.

Lause 29 *Olkoon f kuten edellä ja olkoon F sen integraalifunktio. Tällöin kaikki funktiot $F+c$, missä c on vakio, ja vain ne ovat f:n integraalifunktioita.*

Todistus ”Kaikki”-osa. Jos $G = F + c$, niin $G' = F' + c' = f + 0 = f$, joten G on F:n integraalifunktio.

”Vain ne” -osa. Jos G on f:n integraalifunktio, niin $G' = f$. Toisaalta $F' = f$, joten $(G - F)' = G' - F' = f - f = 0$. Integraalilaskennan peruslauseen (lause 23) mukaan $G - F$ on vakiofunktio, mistä väitös seuraa. ■

Jos f:n sääntö on ilmoitettu lausekkeena $f(x)$, niin integraalifunktion tavanomainen merkintä

$$\int f(x)\mathrm{d}x$$

on kätevä. Oikeastaan kyseessä on f:n kaikkien integraalifunktioiden joukko. Esimerkiksi

$$\int x^2\mathrm{d}x = \tfrac{1}{3}x^3 + c$$

tarkoittaa, että funktion $f(x) = x^2$ integraalifunktioiden joukko koostuu funktioista $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + c$, kun c käy läpi kaikki reaaliluvut.

Välillä $[a, b]$ integroituvan funktion f *kertymäfunktio* K on f:n integraali ylärajansa funktiona. Siis

$$K(x) = \int_a^x f.$$

Lause 30 *Jos funktio f on jatkuva välillä I, niin sen kertymäfunktio on sen integraalifunktio. Toisin sanoen*

$$K' = f.$$

Todistus Olkoon $x, x+h \in I$, $h \neq 0$. Käyttämällä additiivisuutta integroimisvälin suhteen (lause 28, teht. 181) ja väliarvolausetta (lause 21) saamme

$$\begin{aligned} K(x+h) - K(x) &= \int_a^{x+h} f - \int_a^x f \\ &= \int_a^x f + \int_x^{x+h} f - \int_a^x f \\ &= \int_x^{x+h} f = f(\xi_h)h, \end{aligned}$$

missä ξ_h on x:n ja $(x+h)$:n välissä. Annamme $h \to 0$, jolloin $\xi_h \to x$, ja siis f:n jatkuvuuden perusteella $f(\xi_h) \to f(x)$. Nyt erotusosamäärä

$$\frac{K(x+h) - K(x)}{h} = f(\xi_h) \to f(x),$$

mistä väitös seuraa. ■

Lause 31 *Olkoon funktio f jatkuva välillä I ja olkoon F sen integraalifunktio. Tällöin kaikilla $a, b \in I$*

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

Todistus Myös kertymäfunktio K on f:n integraalifunktio, joten lauseen 29 perusteella $K(x) = F(x) + c$, missä c on tietty vakio. Määritämme sen sijoittamalla $x = a$. Koska $K(a) = \int_a^a f = 0$, on $c = K(a) - F(a) = -F(a)$, joten $K(x) = F(x) - F(a)$ kaikilla $x \in [a, b]$. Sijoittamalla $x = b$ saamme $K(b) = F(b) - F(a)$, mikä oli todistettava. ■

Lauseen 30 mukaan jokaisella jatkuvalla funktiolla on integraalifunktio. Epäjatkuvalla funktiolla ei yleensä ole integraalifunktiota (teht. 183), mutta tietyissä harvinaisissa tapauksissa on (teht. 184).

Harjoitustehtäviä

181. Olkoon funktio f integroituva yli välin $[a, b]$. Miksi kannattaa määritellä, että

$$\int_a^a f = 0 \quad \text{ja} \quad \int_b^a f = -\int_a^b f?$$

182. Olkoon funktio f integroituva yli välin $[\min\{a, b, c\}, \max\{a, b, c\}]$. Osoita, että

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f,$$

olipa pisteiden a, b ja c järjestys mikä tahansa.

183. Anna esimerkki sellaisesta epäjatkuvasta funktiosta, jolla ei ole integraalifunktiota.

184. Anna esimerkki sellaisesta epäjatkuvasta funktiosta, jolla on integraalifunktio. Ohje: Teht. 139.

185. Ovatko lauseet 30 ja 31 joissakin tapauksissa voimassa, vaikka f on epäjatkuva?

186. Määritä

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{x^2}^{x^3} \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Ohje: Integraalifunktiota $\int \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t$ ei kannata yrittää määrittää (miksei?).

187. **a)** Miksi laskun

$$\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \Big/_{-1}^{1}\left(-\frac{1}{x}\right) = -1 - 1 = -2.$$

vastaus on väärin?

b) Missä on virhe?

c) Mikä on oikea vastaus?

188. **a)** Mitä vaaditaan funktion $f(x) = 1/x$ integrointikaavassa

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + c$$

f:n määrittelyväliltä?

b) Miksi x:n ympärillä on itseisarvomerkit?

189. Esitä integraalilaskennan väliarvolauseeseen (teht. 176) perustuva vaihtoehtoinen todistus lauseelle 31. Ohjeita: Olkoon D välin $[a, b]$ jako. Näytä soveltamalla integraalilaskennan väliarvolausetta kuhunkin osaväliin, että $s_D \leq F(b) - F(a) \leq S_D$, missä s_D ja S_D tarkoittavat funktion f ala- ja yläsummia. Toisaalta $s_D \leq \int_a^b f \leq S_D$ (miksi?). Miten jatkat?

190. *Eulerin vakio*

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right).$$

a) Osoita, että tämä raja-arvo on olemassa. Ohjeita: Tarkastele integraalia

$$\int_1^n \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln n.$$

Määritä S_D ja s_D, kun $D = \{1, 2, 3, \ldots, n-1, n\}$. Niiden perusteella näytä, että jono

$$\gamma_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$$

on vähenevä ja alhaalta rajoitettu. Miten jatkat?

b) Osoita, että $\gamma \geq \frac{1}{2}$.

c) Harmoninen sarja hajaantuu erittäin hitaasti. Tutkittaessa tätä sarjaa tietokoneella tai ohjelmoitavalla laskimella joudutaan vaikeuksiin. Nimittäin täytyy käyttää liukulukuaritmetiikkaa, jolloin laskutoimituksen tulos yleensä sisältää pyöristysvirheen. (Miksei voida käyttää tarkkaa aritmetiikkaa?) Suurilla n:n arvoilla sarjan loppupään termit ovat n:nteen osasummaan verrattuina niin pieniä, että kone tulkitsee ne nolliksi. Koneen laskema osasumma ei silloin enää kasva n:n kasvaessa, joten sarjan hajaantumista ei voida päätellä. Kokeile tietokoneella tai ohjelmoitavalla laskimella, miten tässä käy.

d) Kun lasketaan kahden liukulukuaritmetiikalla saadun keskenään melkein yhtäsuuren luvun erotus, on vaarana, että oikeiden numeroiden kumoutuessa pyöristysvirheet korostuvat ja pahimmassa tapauksessa tulos on pelkkää pyöristysvirhettä. Miten käy γ:lle? Saatko sille kunnollisen likiarvon? Vertaa tulostasi oikeaan kahdeksandesimaaliseen likiarvoon $\gamma \approx 0{,}57721566$.

7 Jatkuvan funktion peruslauseet ($\star$)

7.1 Bolzanon-Weierstrassin lause

Jatkuvan funktion peruslauseet (”three hard theorems”) ovat:

1. Suljetulla välillä jatkuva funktio on rajoitettu.
2. Suljetulla välillä jatkuva funktio saa suurimman ja pienimmän arvon.
3. Jos jatkuva funktio saa erimerkkiset arvot, niin se saa myös arvon nolla.

Nämä lauseet esitetään lukiossa ilman todistusta. Oikeastaan ”jatkuvan funktion peruslauseen” statuksen ansaitsee myös:

4. Suljetulla välillä jatkuva funktio on tasaisesti jatkuva.

Voimme nyt todistaa nämä lauseet. Todistukset perustuvat tärkeään *Bolzanon-Weierstassin lauseeseen.*

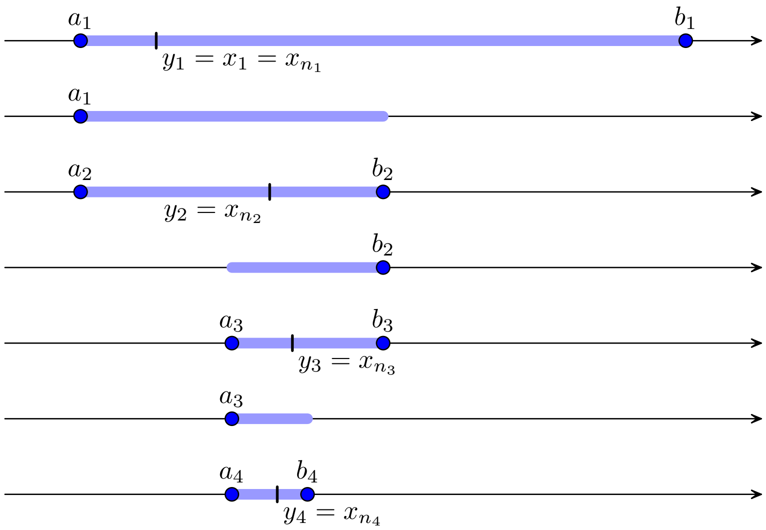
Lause 32 (Bolzanon-Weierstrassin lause) *Rajoitetulla reaalilukujonolla on suppeneva osajono. Toisin sanoen: Jos (x_n) on rajoitettu jono, niin on olemassa sellaiset indeksit $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$, että lukujono (y_k), missä $y_k = x_{n_k}$, suppenee.*

Todistus Koska jono (x_n) on rajoitettu, sen kaikki termit kuuluvat erääseen suljettuun väliin $[a_1, b_1]$. Asetamme $y_1 = x_1$ (eli $n_1 = 1$). Välin $[a_1, b_1]$ puolikkaista ainakin toinen sisältää äärettömän monta jonon (x_n) termiä. (Jos $x_i = x_j$, missä $i \neq j$, niin kyseessä on kaksi eri termiä, vaikka niiden arvot ovat samat.) Olkoon $[a_2, b_2]$ tällainen puolikas. Valitsemme termin $x_{n_2} \in [a_2, b_2]$, missä $n_2 > 1 (= n_1)$, ja asetamme $y_2 = x_{n_2}$. Myös välin $[a_2, b_2]$ puolikkaista ainakin toinen sisältää äärettömän monta termiä; olkoon $[a_3, b_3]$ sellainen. Valitsemme termin $x_{n_3} \in [a_3, b_3]$, missä $n_3 > n_2$, ja asetamme $y_3 = x_{n_3}$.

Jatkamalla samalla tavalla saamme jonon sisäkkäisiä välejä $[a_k, b_k]$ ja jonon (x_n) sellaisen osajonon $(x_{n_k}) = (y_k)$, että $y_k \in [a_k, b_k]$ kaikilla k:lla. Annamme $k \to \infty$, jolloin

$$b_k - a_k = \frac{b_1 - a_1}{2^{k-1}} \to 0.$$

Näin ollen jono (y_k) suppenee sisäkkäisten välien lauseen (teht. 110) perusteella.



■

Harjoitustehtäviä

191. Väli $[0, 1]$ jaetaan kolmeen yhtäsuureen osaan, joista valitaan arvalla yksi. Saatu osa jaetaan jälleen kolmeen yhtäsuureen osaan, joista arvotaan yksi. Näin jatketaan loputtomiin. Todista, että täsmälleen yksi reaaliluku pysyy mukana kaikissa arvotuissa väleissä.

192. **a)** Osoita, että lukujono (a_n),

$$a_n = \frac{n+1}{n+2}\left(\sin\frac{2n\pi}{3} + \cos\frac{2n\pi}{3}\right),$$

on rajoitettu, joten sillä on Bolzanon-Weierstrassin lauseen mukaan suppeneva osajono.

b) Muodosta jokin tällainen osajono.

193. **a)** Todista: Jos lukujonolle (a_n) on $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, niin myös sen jokaiselle osajonolle (a_{n_k}) on $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$.

b) Todista: Jos rajoitetun lukujonon jokainen suppeneva osajono suppenee kohti samaa raja-arvoa, niin myös koko jono suppenee kohti sitä.

194. Anna esimerkki sellaisesta rajoitetusta lukujonosta, jonka suppenevien osajonojen raja-arvojen lukumäärä on **a)** kaksi, **b)** kolme, **c)** ääretön.

195. Todista: Jos lukujono (a_n) on ylhäältä rajoittamaton, niin sillä on osajono (a_{n_k}), jolle $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \infty$.

196. Todista, että jokaisella reaalilukujonolla on monotoninen osajono. Ohjeita: Olkoon (a_n) tarkasteltava jono. Osoita, että jos se ei ole ylhäältä (vastaavasti alhaalta) rajoitettu, niin sillä on aidosti kasvava (vastaavasti vähenevä) osajono. Jos taas (a_n) on rajoitettu, niin sillä on suppeneva osajono $(a_{n_k}) = (b_k)$; olkoon $\lim_{k\to\infty} b_k = b$. Tällöin ainakin yksi seuraavista vaihtoehdoista on tosi: (1) Äärettömän monella k:lla on $b_k > b$. (2) Vastaavasti $b_k < b$, (3) Vastaavasti $b_k = b$. Osoita, että jonolla (b_k) on osajono, joka on tapauksessa (1) aidosti vähenevä, tapauksessa (2) aidosti kasvava ja tapauksessa (3) vakiojono.

197. Lukujonon (a_n) suppenemisen havainnollinen merkitys on, että termit saadaan mielivaltaisen lähelle raja-arvoa. Entä jos ne saadaan mielivaltaisen lähelle *toisiaan*? Silloin on toteutettu *Cauchyn yleinen suppenemisehto* eli lyhyesti *Cauchyn ehto*, jonka täsmällinen muotoilu on: Kaikilla $\varepsilon > 0$ on sellainen $n_\varepsilon \in \mathbb{Z}_+$, että

$$p, q \geq n_\varepsilon \implies |a_p - a_q| < \varepsilon.$$

Jono (a_n) on tällöin *Cauchyn jono*. Suppeneminen on yhtäpitävä Cauchyn ehdon toteutumisen kanssa. Toisin sanoen lukujono suppenee, jos ja vain jos se on Cauchyn jono. Todista ”vain jos” -osa: Suppeneva jono on Cauchyn jono. Ohjeita: Olkoon $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Valitse $\varepsilon > 0$. Tällöin on olemassa sellainen n_ε, että $p, q \geq n_\varepsilon \Rightarrow |a_p - a_q| < \frac{1}{2}\varepsilon$. Osoita, että $|a_p - a_q| < \varepsilon$.

198. Osoita, että Cauchyn jono on rajoitettu. Ohjeita: Olkoon (a_n) Cauchyn jono. Tällöin on olemassa sellainen n_1, että $p, q \geq n_1 \Rightarrow |a_p - a_q| < 1$. Kun $p \geq n_1$, näytä, että $|a_p| < 1 + |a_{n_1}|$.

199. Todista tehtävässä 197 esitetyn lauseen ”jos”-osa: Cauchyn jono suppenee. Ohjeita: Olkoon (a_n) Cauchyn jono. Sillä on (miksi?) suppeneva osajono (a_{n_k}); olkoon $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$. Osoita, että myös $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

200. Sarja *suppenee itseisesti*, jos sen termien itseisarvojen muodostama sarja suppenee.

a) Todista: Jos sarja suppenee itseisesti, niin se suppenee tavallisessa mielessä. Ohje: Osoita kolmioepäyhtälön ja Cauchyn yleisen suppenemisehdon perusteella, että tällaisen sarjan osasummien jono suppenee.

b) Anna esimerkki suppenevasta sarjasta, joka ei suppene itseisesti.

7.2 Rajoituslause

Kutsumme jatkuvan funktion ensimmäistä peruslausetta lyhyesti ”rajoituslauseeksi”.

Lause 33 (Rajoituslause) *Suljetulla välillä jatkuva funktio on rajoitettu.*

Todistus Olkoon f välillä $[a, b]$ jatkuva funktio. Teemme vastaoletuksen, ettei se ole rajoitettu. Voimme olettaa (miksi?), ettei se ole ylhäältä rajoitettu. Koska f saa mielivaltaisen suuria arvoja, jokaista positiivista kokonaislukua n vastaa sellainen $x_n \in [a, b]$, että $f(x_n) \geq n$. Bolzanon-Weierstrassin lauseen mukaan jonolla (x_n) on suppeneva osajono (x_{n_k}); olkoon $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0$, jolloin $x_0 \in [a, b]$ (miksi?). Nyt f:n jatkuvuuden perusteella

$$f(x_0) = f(\lim_{k\to\infty} x_{x_k}) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \infty,$$

mikä sisältää ristiriidan, koska $f(x_0)$ on tietty reaaliluku. ■

Harjoitustehtäviä

201. Anna esimerkki sellaisesta **a)** avoimella, **b)** puoliavoimella välillä jatkuvasta funktiosta, joka ei ole rajoitettu.

202. Miksei rajoituslauseen todistus onnistu, jos f:n määrittelyväli ei ole suljettu?

203. Osoita, että kaikkialla jatkuva jaksollinen funktio on rajoitettu.

204. Olkoon funktio f kaikkialla jatkuva. Todista: Jos raja-arvot $\lim_{x\to\infty} f(x)$ ja $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ ovat olemassa, niin f on rajoitettu.

205. Jos funktio f on derivoituva suljetulla välillä I, niin onko f' rajoitettu? Vastaesimerkki, jossa $f(x) = \sqrt{|x|}$ ja I on mikä tahansa origon sisältävä väli, ei kelpaa (miksei?). Koska f':n täytyy olla epäjatkuva (miksi?), kannattaa kokeilla tehtävän 139 funktiota f. Se ei kuitenkaan kelpaa (miksei?), mutta siitä on helppo muokata funktio

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2} & \text{kun } x \neq 0, \\ 0, & \text{kun } x = 0. \end{cases}$$

Olkoon I mikä tahansa origon sisältävä väli. Osoita, että f on tällä välillä derivoituva, mutta f' ei ole rajoitettu.

206. Funktion f epäjatkuvuuspiste on *yksinkertainen*, jos f:llä on siinä toispuoliset raja-arvot. (Jos f on määritelty vain kyseisen pisteen jommallakummalla puolella, niin vastaava toispuolinen raja-arvo riittää.) Anna esimerkki sellaisesta epäjatkuvuuspisteestä, joka ei ole yksinkertainen.

207. Olkoon f välillä $[a, b]$ määritelty funktio, jolla on äärellinen määrä epäjatkuvuuspisteitä ja kaikki ne ovat yksinkertaisia. Osoita, että f on rajoitettu.

208. Olkoon f välillä I määritelty funktio. Se on *ylhäältä puolijatkuva pisteessä* $a \in I$, jos kaikilla $\varepsilon > 0$ on sellainen $\delta_\varepsilon > 0$, että

$$|x - a| < \delta_\varepsilon \implies f(x) < f(a) + \varepsilon.$$

Jos a on I:n päätepiste, niin käytetään vastaavaa toispuolista ympäristöä.

a) Anna esimerkki tietyssä pisteessä epäjatkuvasta funktiosta, joka i) on, ii) ei ole siinä ylhäältä puolijatkuva.

b) Miten määritellään se, että f on *alhaalta puolijatkuva pisteessä* a?

c) Todista: Funktio on tietyssä pisteessä jatkuva, jos ja vain jos se on siinä sekä ylhäältä että alhaalta puolijatkuva.

209. Olkoon f kuten edellä. Se on *ylhäältä (vastaavasti alhaalta) puolijatkuva välillä* I, jos sillä on tämä ominaisuus kaikilla $a \in I$. Todista: Jos I on suljettu ja f on ylhäältä (vastaavasti alhaalta) puolijatkuva, niin f on ylhäältä (vastaavasti alhaalta) rajoitettu.

210. Anna esimerkki suljetulla välillä rajoitetusta funktiosta, joka ei ole ylhäältä eikä alhaalta puolijatkuva.

7.3 Ääriarvolause

Kutsumme jatkuvan funktion toista peruslausetta lyhyesti ”ääriarvolauseeksi”.

Lause 34 (Ääriarvolause) *Suljetulla välillä jatkuva funktio saa suurimman ja pienimmän arvon.*

Todistus Olkoon f välillä $[a, b]$ jatkuva funktio. Riittää osoittaa (miksi?), että se saa suurimman arvon. Teemme vastaoletuksen, ettei näin käy. Rajoituslauseen mukaan

$$s = \sup\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$$

on (äärellisenä) olemassa. Jos f saisi tämän arvon, niin kyseessä olisi f:n suurin arvo, mikä on vastaoletuksen perusteella mahdotonta. Siis $f(x) < s$ kaikilla $x \in [a, b]$. Tällöin funktio

$$g(x) = \frac{1}{s - f(x)}$$

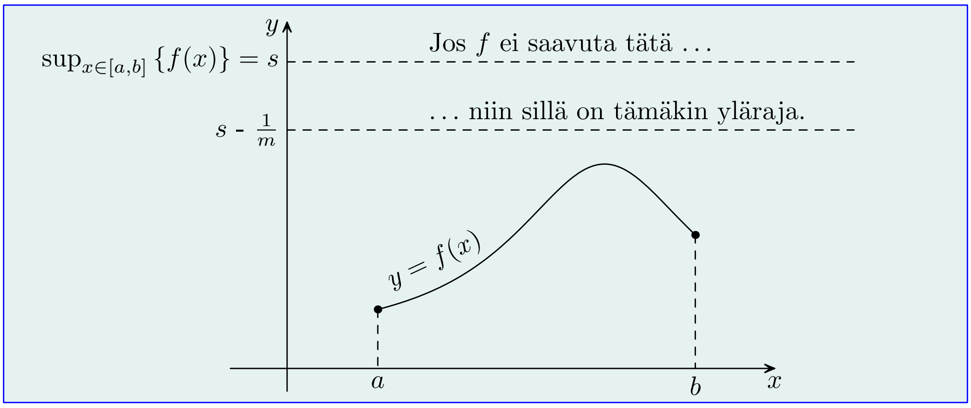
on välillä $[a, b]$ määritelty ja jatkuva. Rajoituslauseen mukaan on olemassa sellainen $m > 0$, että kaikilla $x \in [a, b]$ on $g(x) \leq m$ eli

$$\frac{1}{s - f(x)} \leq m,$$

minkä saamme myös muotoon

$$f(x) \leq s - \frac{1}{m}.$$

Siis $s - 1/m$ on f:n arvojen yläraja, mikä on ristiriidassa sen kanssa, että s on niiden pienin yläraja. ∎



Rajoituslause tietenkin seuraa ääriarvolauseesta, mutta se piti esittää ensin, koska sitä tarvitaan ääriarvolauseen todistuksessa.

Harjoitustehtäviä

211. Anna esimerkki suljetulla välillä rajoitetusta funktiosta, joka **a)** saa suurimman arvon muttei pienintä, **b)** ei saa suurinta eikä pienintä arvoa.

212. Osoita, että kaikkialla jatkuva jaksollinen funktio saa suurimman ja pienimmän arvon.

213. Olkoon f kaikkialla jatkuva funktio. Todista: Jos $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ ja f saa erimerkkisiä arvoja, niin se saa suurimman ja pienimmän arvon.

214. Poistetaan edellisestä tehtävästä erimerkkisiä arvoja koskeva oletus. Mitä voidaan nyt sanoa f:n suurimmasta ja pienimmästä arvosta?

215. Olkoon f kaikkialla jatkuva funktio. Todista: Jos $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \infty$, niin f saa pienimmän arvon.

216. Tarkastellaan polynomifunktiota

$$p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n, \quad a_0 > 0.$$

Todista:

a) Jos n on parillinen, niin p saa pienimmän arvon muttei suurinta.

b) Jos n on pariton, niin p ei saa suurinta eikä pienintä arvoa.

217. Olkoon funktio f integroituva yli välin $[a, b]$. Osoita, että tällä välillä määritelty funktio

$$K(x) = \int_a^x f$$

saa suurimman ja pienimmän arvon.

218. Jos funktio f toteuttaa tehtävän 204 oletukset, niin saako se suurimman ja pienimmän arvon?

219. Jos funktio f toteuttaa tehtävän 207 oletukset, niin saako se suurimman ja pienimmän arvon?

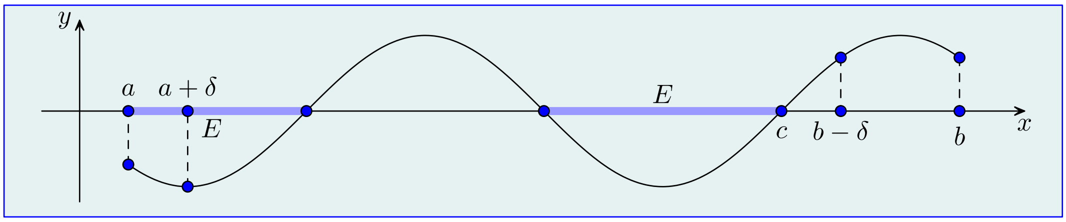
220. Jos funktio f toteuttaa tehtävän 209 oletukset, niin saako se suurimman (vastaavasti pienimmän) arvon?

7.4 Nollakohtalause

Kutsumme jatkuvan funktion kolmatta peruslausetta lyhyesti ”nollakohtalauseeksi”.

Lause 35 (Nollakohtalause) *Olkoon funktio f jatkuva välillä $[a, b]$. Jos $f(a)$ ja $f(b)$ ovat erimerkkiset, niin tällä funktiolla on ainakin yksi nollakohta välillä $]a, b[$.*

Todistus Voimme olettaa (miksi?), että $f(a) < 0$ ja $f(b) > 0$. Joukko $E = \{x \in [a,b] \mid f(x) < 0\}$ on epätyhjä ja ylhäältä rajoitettu, joten $c = \sup E$ on olemassa. Jatkuvuuden perusteella löytyy sellainen $\delta > 0$, että $f(x) < 0$ välillä $[a, a+\delta]$ ja $f(x) > 0$ välillä $[b-\delta, b]$. Näin ollen $a + \delta \leq c \leq b - \delta$, ja siis $a < c < b$.



Olkoon (u_n) sellainen jono joukon E lukuja ja (v_n) sellainen jono välin $[c,b]$ lukuja, että

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} v_n = c.$$

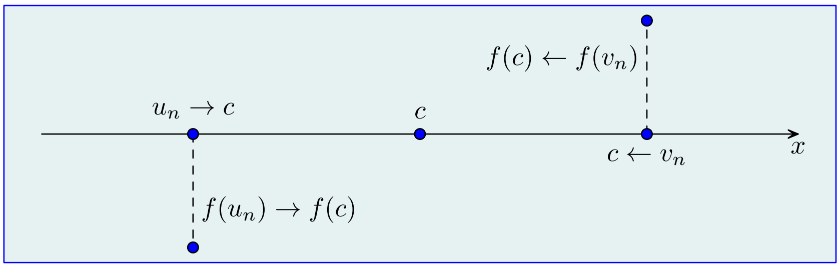
Nämä jonot ovat olemassa (teht. 221). Koska

$$f(c) = f(\lim_{n\to\infty} u_n) = \lim_{n\to\infty} f(u_n) \leq 0$$

ja

$$f(c) = f(\lim_{n\to\infty} v_n) = \lim_{n\to\infty} f(v_n) \geq 0$$

(perustele yksityiskohdat), on $f(c) = 0$. ■



Harjoitustehtäviä

221. Osoita, että nollakohtalauseen todistuksessa määritellyt jonot (u_n) ja (v_n) ovat olemassa.

222. Olkoon funktio f jatkuva välillä $[a,b]$. Osoita, että saa kaikki $f(a)$:n ja $f(b)$:n väliset arvot.

223. Voiko välillä $[a,b]$ epäjatkuva funktio f saada kaikki $f(a)$:n ja $f(b)$:n väliset arvot?

224. Osoita, että polynomifunktiolla

$$p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n, \quad a_0 \neq 0,$$

on ainakin yksi nollakohta, jos n on pariton.

225. Olkoon funktio f kaikkialla jatkuva. Todista: Jos raja-arvot $\lim_{x\to\infty} f(x)$ ja $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ ovat olemassa, niin f saa kaikki niiden väliset arvot.

226. Olkoon funktio $f : [0,1] \to [0,1]$ jatkuva. Osoita, että yhtälöllä $f(x) = x$ on ainakin yksi ratkaisu.

227. Voidaanko edellisessä tehtävässä väli $[0,1]$ korvata **a)** mielivaltaisella suljetulla välillä, **b)** välillä $]0,1[$, **c)** mielivaltaisella avoimella välillä?

228. Olkoot f ja g välillä $[0,1]$ määriteltyjä jatkuvia funktioita. Todista: Jos $f(0) \leq g(0)$ ja $f(1) \geq g(1)$, niin yhtälöllä $f(x) = g(x)$ on ainakin yksi ratkaisu.

229. Olkoon f välillä I jatkuva positiiviarvoinen funktio. Todista: Jos $p \neq 0$ ja $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$, niin on olemassa piste $x_0 \in I$, jolle

$$f(x_0) = \left(\frac{f(x_1)^p + f(x_2)^p + \cdots + f(x_n)^p}{n}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

230. Olkoon funktio f derivoituva välillä $[a,b]$. Tehtävän 205 perusteella ”derivaatan rajoituslause” ei päde yleisesti, joten myöskään ”derivaatan ääriarvolause” ei päde (miksei?). Sen sijaan pätee ”derivaatan nollakohtalause”: Jos $f'(a)$ ja $f'(b)$ ovat erimerkkiset, niin f':lla on ainakin yksi nollakohta välillä $]a,b[$. Yleisemmin todista, että f' saa kaikki $f'(a)$:n ja $f'(b)$:n väliset arvot. (Jos f' on jatkuva, niin asia on selvä, mutta f' voi olla epäjatkuva.)

Ohjeita: Voit olettaa (miksi?), että $f'(a) < f'(b)$. Olkoon $f'(a) < c < f'(b)$. Funktio $g(x) = f(x) - cx$ saa pienimmän arvon (miksi?, ja suurimmankin, millä ei tässä ole merkitystä) välillä $[a,b]$; tapahtukoon se pisteessä ξ. Koska $\xi \neq a, b$ (miksi?), on $\xi \in]a,b[$. Koska $g'(\xi) = 0$ (miksi?), on $f'(\xi) - c = 0$, joten $f'(\xi) = c$.

7.5 Tasaisen jatkuvuuden lause

Lopuksi käsittelemme jatkuvan funktion ”neljättä peruslausetta”.

Lause 36 (Tasaisen jatkuvuuden lause) *Suljetulla välillä jatkuva funktio on tasaisesti jatkuva.*

Todistus Olkoon f suljetulla välillä I jatkuva funktio. Teemme vastaoletuksen, ettei se ole tasaisesti jatkuva. Tällöin on olemassa sellainen $\varepsilon > 0$, että olipa $\delta > 0$ mikä tahansa, aina löytyy sellaiset $s, t \in I$, joille $|s-t| < \delta$ mutta $|f(s) - f(t)| \geq \varepsilon$. Erityisesti näin käy, kun $\delta = 1/n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Siis on olemassa sellaiset jonot (s_n) ja (t_n), että $|s_n - t_n| < 1/n$ mutta

$$|f(s_n) - f(t_n)| \geq \varepsilon. \tag{1}$$

Koska jono (t_n) on rajoitettu, sillä on Bolzanon-Weirestrassin lauseen mukaan suppeneva osajono (t_{n_k}); olkoon $\lim_{k\to\infty} t_{n_k} = t$, jolloin $t \in I$ (miksi?). Koska

$$|s_{n_k} - t_{n_k}| < \frac{1}{n_k} \leq \frac{1}{k},$$

on

$$|s_{n_k} - t| \leq |s_{n_k} - t_{n_k}| + |t_{n_k} - t| \to 0,$$

kun $k \to \infty$ (perustele yksityiskohdat). Siis myös $\lim_{k\to\infty} s_{n_k} = t$, mutta nyt

$$\lim_{k\to\infty} (f(s_{n_k}) - f(t_{n_k})) = f(\lim_{k\to\infty} s_{n_k}) - f(\lim_{k\to\infty} t_{n_k}) = f(t) - f(t) = 0$$

(perustele yksityiskohdat). Tämä on ristiriidassa epäyhtälön (1) kanssa (miksi?). ∎

Harjoitustehtäviä

231. Miksi tasaisen jatkuvuuden lauseen todistus ei onnistu avoimen välin tapauksessa?

232. Osoita, että kaikkialla jatkuva jaksollinen funktio on tasaisesti jatkuva.

233. Olkoon funktio f kaikkialla jatkuva. Todista: Jos raja-arvot $\lim_{x\to\infty} f(x)$ ja $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ ovat olemassa, niin f on tasaisesti jatkuva.

234. Olkoon funktio f jatkuva välillä $]a, b[$. Jos f:llä on a:ssa ja b:ssä toispuolinen raja-arvo, niin saadaanko f tasaisesti jatkuvaksi välillä $[a, b]$, kun $f(a)$ ja $f(b)$ määritellään näinä raja-arvoina?

235. Olkoon funktio f määritelty välillä I. Todista oikeaksi tai vääräksi: Jos f toteuttaa Lipschitzin ehdon (teht. 157), niin se on tasaisesti jatkuva.

236. Todista oikeaksi tai vääräksi edellisen tehtävän lauseen käänteislause.

237. Olkoon funktio f jatkuva välillä $[a, b]$. Jaetaan tämä väli n:ään yhtäsuureen osaan pisteillä $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$, jolloin $x_1 - a = x_2 - x_1 = \cdots = b - x_{n-1} = (b - a)/n$. Määritellään välillä $[a, b]$ funktio g_n:

$$g_n(x) \quad = \quad f(x_{i-1}) + \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}(x - x_{i-1}),$$

kun $x_{i-1} \leq x \leq x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.
a) Todista: Kaikilla $\varepsilon > 0$ on sellainen g_n, että

$$|f(x) - g_n(x)| < \varepsilon$$

kaikilla $x \in [a, b]$.

b) Tulkitse tämä tulos geometrisesti.

238. Olkoon funktio f tasaisesti jatkuva välillä I. Todista: Jos (x_n) on Cauchyn jono I:n pisteitä, niin $(f(x_n))$ on Cauchyn jono.

239. Osoita, ettei edellisen tehtävän lause ole yleisesti voimassa, jos f:stä oletetaan pelkkä jatkuvuus.

240. Olkoon funktio f tasaisesti jatkuva välillä I ja funktio g tasaisesti jatkuva välillä $f(I)$.

a) Osoita, että funktio $g \circ f$ on tasaisesti jatkuva.

b) Riittääkö olettaa i) f:stä, ii) g:stä pelkkä jatkuvuus?

Kirjallisuutta

[1] A. Browder, *Mathematical Analysis: An Introduction*, Springer, 1996.

[2] M. Halmetoja, K. Häkkinen, J. Merikoski, L. Pippola, H. Silfverberg, T. Tossavainen, *Matematiikan taito 13: Differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssi*, WSOY, 2008.

[3] E. Lindelöf, *Differentiali- ja integralilasku ja sen sovellutukset, osa 1: Yhden muuttujan funktiot*, 2. p., WSOY, 1950.

[4] E. Lindelöf, *Johdatus korkeampaan analyysiin*, 4. p., WSOY, 1956.

[5] J. Merikoski, M. Halmetoja, T. Tossavainen, *Johdatus matemaattisen analyysin teoriaan*, WSOY, 2004.

[6] J. Merikoski, A. Virtanen, P. Koivisto, *Johdatus diskreettiin matematiikkaan*, WSOY, 2004.

[7] L. Myrberg, *Differentiaali- ja integraalilaskenta korkeakouluja varten, osa 1*, 7. p., Kirjayhtymä, 1999.

[8] L. Myrberg, *Differentiaali- ja integraalilaskenta korkeakouluja varten, osa 2*, 4. p., Kirjayhtymä, 1995.

[9] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, Third Edition, McGraw-Hill, 1976.

Hakemisto