Paperirulla eli aritmeettinen jono ja likimääräisyys

Matti Lehtinen

Lehtori Heikki Pokela esitti MAOLin lukion matematiikkakilpailuun seuraavan tehtäväehdotuksen, todelliseen teollisuusprosessiin liittyvän:

Paperitehtaassa kone rullaa paperia onton hylsyn ympärille. Määritä sylinterin muotoisen paperirullan säde (R_1) paperin pituuden (L), paksuuden (d) ja hylsyn säteen (R_2) funktiona. Paperin oletetaan rullautuvan tiiviisti. Funktio saa olla likimääräinen.

Heikki Pokelan esittämä ratkaisu on lyhyt ja oivaltava: kun rullaa katsotaan sivulta, paperia on ympyrärenkaan muotoisella pinta-alalla, joka on $\pi(R_1^2 - R_2^2)$. Mutta tämä ala on sama kuin rullalla olevan paperin sivusta katsottu ala silloin, kun paperi on vedetty suoraksi. Alaa voidaan pitää suorakulmiona, jonka sivut ovat paperin pituus L ja sen paksuus d. Ala on siis dL. Yhtälöstä

$$\pi(R_1^2 - R_2^2) = dL$$

ratkaistaan heti

$$R_1 = \sqrt{R_2^2 + \frac{dL}{\pi}}. \tag{1}$$

Mutta entä jos tämä luettuna itsestään selvä ja yksinkertainen ratkaisu ei juolahtaisikaan mieleen? Silloin voidaan johtua ratkaisuun, johon liittyy pari lukion matematiikan perustyökalua, aritmeettinen jono ja toisen asteen yhtälö. Voipa vielä tarvita derivaattaakin.

Suoraviivainen tapa lähestyä tehtävän ratkaisua olisi selvittää, kuinka monta kerrosta paperia on päällekkäin, ja päätellä siitä paperikerroksen paksuus eli $R_1 - R_2$. Kerrokset ovat kuitenkin eripituisia. Aivan ensimmäinen kerros kiertyy R_2-säteisen hylsyn päälle, joten sen (sisäpinnan) pituus on $2\pi R_2$. Toinen kerros kiertyy lieriölle, jonka säde on R_2+d, joten se on hiukan pitempi. Kerroksen pituus on $2\pi(R_2 + d)$. Koska vastaus saa olla likimääräinen, voidaan unohtaa vaikutus, joka on uuden kierroksen aloittavalla pienellä pykälällä. Samoin jatkaen huomataan, että uusi kierros on aina $2\pi d$:n verran edellistä pidempi. Koko paperin pituus voidaan siis ajatella aritmeettisena summana, jonka ensimmäinen termi on $2\pi R_2$ ja viimeinen, jos kierroksia on kaikkiaan n kappaletta, $2\pi R_2 + (n-1)\cdot 2\pi d$. Aritmeettisen jonon summahan on yhteenlaskettavien lukumäärä kerrottuna ensimmäisen ja viimeisen yhteenlaskettavan keskiarvolla. Koko paperin pituus toteuttaa siis yhtälön

$$2\pi\left(R_2 + (n-1)\frac{d}{2}\right)n = L,$$

eli, jos merkitään $\dfrac{L}{2\pi} = M$,

$$\frac{d}{2}n^2 + \left(R_2 - \frac{d}{2}\right)n - M = 0. \tag{2}$$

Kun tämä toisen asteen yhtälö ratkaistaan, saadaan

$$n = \frac{\frac{d}{2} - R_2 + \sqrt{\left(R_2 - \frac{d}{2}\right)^2 + 2dM}}{d}$$

ja

$$nd = \frac{d}{2} - R_2 + \sqrt{R_2^2 - R_2 d + \frac{d^2}{4} + 2dM}. \tag{3}$$

Mutta paperi on ohutta. d on varsin pieni verrattuna R_2:een. Toisaalta rullalle kierretään sangen pitkä paperiliuska, joten dM ei ole häviävän pieni. Kun nämä huomiot sovitetaan yhtälöön (2), saadaankin

$$R_1 = R_2 + nd \approx \sqrt{R_2^2 + 2dM}.$$

Kun vielä palautetaan apumerkinnän M tilalle paperin pituus L, tullaan ensimmäiseen ratkaisuun (1).

Vaan miksi tehdä toisen asteen yhtälön ratkaisukaavan käytöstä monimutkaista? Koska d on pieni, yhtälö (2) on melkein sama kuin

$$\frac{d}{2}n^2 + R_2 n - M = 0. \tag{4}$$

Toisen asteen yhtälön ratkaisukaavasta saadaan nyt heti

$$n = \frac{-R_2 + \sqrt{R_2^2 + 2Md}}{d}$$

eli

$$R_1 = R_2 + nd = \sqrt{R_2^2 + 2Md},$$

ja olemme tulleet taas ratkaisuun (1).

Viimeisen ratkaisuvaihtoehdon kohdalla voi kysyä, mikä vaikutus ylimalkaan ensimmäisen asteen termin kertoimen muutoksella on toisen asteen yhtälön ratkaisuun. Tarkastellaan toisen asteen yhtälöä $an^2+bn+c = 0$. Jos nyt kerroin b onkin muuttuja, myös ratkaisu n on sitä: $n = n(b)$. Ratkaisu synnyttää uuden b:n funktion $f(b) = an(b)^2 + bn(b) + c$. Tällä funktiolla on kuitenkin vakioarvo: $f(b) = 0$. Vakiofunktion derivaatta on nolla. Siis myös

$$0 = f'(b) = 2an'(b)n(b) + bn'(b) + n(b),$$

eli

$$n'(b) = -\frac{n(b)}{2an(b) + b}.$$

(Konsti, jota käytettiin, on ns. implisiittinen derivointi.) Yhtälömme tapauksessa $a = \frac{d}{2}$ ja kertoimen b muutos myös $\frac{d}{2}$. Muutoksen vaikutus ratkaisuun n on noin

$$|n'(b)| \cdot \frac{d}{2} = \frac{\frac{nd}{2}}{dn + R_2}.$$

Vertaamalla osoittajaa ja nimittäjää nähdään, että vaikutus on vähemmän kuin $\frac{1}{2}$. Yksinkertaistettu yhtälö merkitsee siis enintään yhden paperinpaksuuden eroa tuloksissa.

Toisen asteen polynomien ominaisuuksien selvittelyä varten ei useinkaan tarvitse turvautua differentiaalilaskentaan. Nytkin on kysymys kahden yhtälön ratkaisujen erosta. Yhtälöiden ratkaisut eivät ole aivan samat, joten niitä on syytä merkitä eri kirjaimin. Olkoon siis

$$\frac{d}{2}n_1^2 + \left(R_2 - \frac{d}{2}\right)n_1 - M = 0,$$

$$\frac{d}{2}n_2^2 + R_2 n_2 - M = 0.$$

Kun yhtälöt vähennetään toisistaan, saadaan

$$\frac{d}{2}(n_1^2 - n_2^2) + R_2(n_1 - n_2) - \frac{d}{2}n_1 = 0,$$

ja kun $n_1^2 - n_2^2$ jaetaan tekijöihinsä,

$$(n_1 - n_2)\left(\frac{d}{2}(n_1 + n_2) + R_2\right) = \frac{d}{2}n_1.$$

Siis ratkaisujen ero on

$$n_1 - n_2 = \frac{\frac{d}{2}n_1}{\frac{d}{2}(n_1 + n_2) + R_2}.$$

Erolle saadaan ylärajaksi 1, kun nimittäjästä jätetään pois positiivisia termejä. Helpomman yhtälön ratkaisu merkitsee enintään yhtä paperikerroksen paksuutta paperirullan säteessä.

Avoimia matematiikan oppikirjoja verkossa

Osoitteesta `http://avoinoppikirja.fi` löytyy avoimia yläkoulun ja lukion matematiikan oppikirjoja.