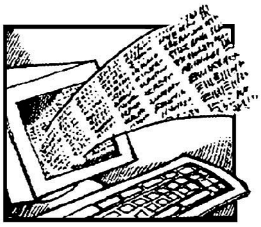


Symbolisesti metsässä[1]

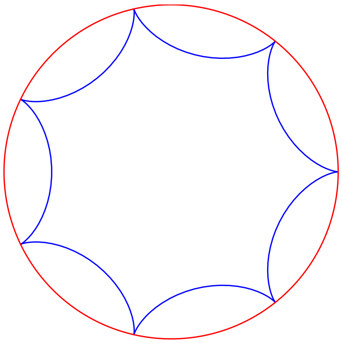
Pekka Alestalo
Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu
matematiikan ja systeemianalyysin laitos
pekka.alestalo@aalto.fi

Lasketaanpa integraali

Sykloidit ovat tasokäyriä, joiden kaarenpituuden laskeminen johtaa integraaliin

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{1-\cos(nx)}\, dx, \tag{1}$$

kun $n \geq 1$ on kokonaisluku.



7-kärkinen hyposykloidi ympyrän sisällä.

Integraalia ei löydy MAOLin taulukkokirjasta, joten kokeillaan symbolisella laskimella. Esimerkiksi TI-$n$spire CAS -laskimella ja Casion ClassPad 330 -laskimella integraalin likiarvoksi saadaan 5,656854, jos luvulle n annetaan konkreettinen lukuarvo. Tulos näyttää siis olevan riippumaton luvusta n.

Integraalien tarkkoja arvoja tai tulosta yleisellä n laskimet eivät pysty muodostamaan, joten otetaan käyttöön järeämmät symbolisen laskennan työkalut: Mathematica ja Maple. Valitaan ohjelmalle aluksi konkreettinen lukuarvo, vaikkapa $n = 10\,000$.

Mathematican syntaksilla kirjoitetaan

```
Integrate[Sqrt[1-Cos[10000 x]],{x,0,2 Pi}]
```

Kolmen ja puolen minuutin kuluttua ohjelma antaa vastauksena

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{1-\cos(10000x)}\, dx = \frac{1}{1250\sqrt{2}}.$$

Lasku oli ilmeisesti hankala, koska yleensä integraalin arvo saadaan, jos ei nyt aivan silmänräpäyksessä, niin ainakin parissa sekunnissa. Lisäksi tuloksen likiarvo ei ole lähelläkään laskinten antamaa vastausta.

Tämä herättää sen verran epäilyksiä, että lasketaan vielä Maplella. Käskyllä

```
> int(sqrt(1-cos(10000*x)),x=0..2*Pi)
```

[1] Otsikko on väännös kirjan [4] nimestä.

saadaan 35 sekunnin kuluttua vastaus

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{1-\cos(10000x)}\,dx = 4\sqrt{2},$$

jonka likiarvo on sama kuin laskinten antama tulos.

Vielä yksi epätoivoinen yritys: Ilmainen symbolisen laskennan ohjelma Sage [5] tarjoaa integraalin arvoksi nollaa, mikä ei tietenkään ole positiivisen funktion integraalille mahdollista.

Tässä on nyt selvästi jotakin hämärää.[2]

Symbolista laskentaa

Symbolisen laskennan vaaroista löytyy varoittavia esimerkkejä internetin keskustelupalstoilta, blogeista [2] ja myös matemaatikkojen tieteellisistä lehdistä [1]. Opiskelijoille ja opettajille yksi tuttu esimerkki on kevään 2015 pitkän matematiikan ylioppilaskirjoituksista, jossa osa laskimista ei löytänyt tavallisella solvekäskyllä yhtälön $x\sqrt{1+x} = \sqrt{2x}$ ratkaisua $x = 0$. Laskinten antama tulos on tietysti puutteellinen, mutten uskalla väittää, että se on täysin päätön. Myös tämän kevään pitkän matematiikan tehtävässä 12 laskinratkaisua yrittävä kokelas törmäsi ongelmaan, joka on itse asiassa hyvin lähellä yllä laskettua integraalia. Palaan tähän kirjoitukseni lopussa.

Yllä olevissa laskuissa käytettiin kahta tämän hetken johtavaa symbolisen laskennan ohjelmaa: (aakkosjärjestyksessä) Maplea ja Mathematicaa. Niiden kaupalliset versiot maksavat yli 2 000 euroa, mutta suppeampia opiskelijaversioita myydään n. 100 euron hintaan. En ole testannut laskuja kaikilla ylioppilaskirjoituksissa käytettävillä laskimilla, mutta jos ym. hinnoilla on mitään katetta, niin on vaikea odottaa parempia tuloksia. Todettakoon lisäksi, että Mathematican ”verkkoversio” Wolfram-alpha ei saa yllä olevasta integraalista mitään järkevää tulosta tunnin sisällä.

Lasketaan käsin

Mikä vastaus on oikein? Ainoa tapa selvittää asia on laskea käsin.

Itse asiassa integraalin laskeminen yleisellä parametrilla n on lähes yhtä helppoa kuin arvolla $n = 1$. Jokainen 1. vuoden yliopistomatematiikan integrointisulkeiset kunnialla selvittänyt näkee nimittäin heti, että integraali voidaan laskea käyttämällä kaksinkertaisen kosinin kaavaa seuraavalla tavalla: Koska

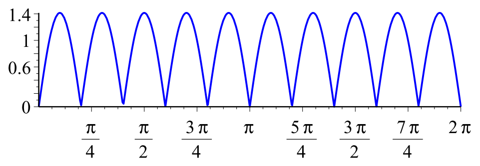
$$\cos(nx) = \cos(2(nx/2)) = 1 - 2\sin^2(nx/2),$$

niin

$$1 - \cos(nx) = 2\sin^2(nx/2).$$

Tästä seuraa, että

$$\sqrt{1-\cos(nx)} = \sqrt{2}\sqrt{\sin^2(nx/2)} = \sqrt{2}\,|\sin(nx/2)|.$$



Kuvaaja arvolla $n = 10$.

Ottamalla huomioon lausekkeen $\sin(nx/2)$ jaksollisuuden ja merkkivaihtelun välillä $x \in [0, 2\pi]$ saadaan integraalin arvoksi

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{1-\cos(nx)}\,dx = \sqrt{2}\,n \int_0^{2\pi/n} \sin(nx/2)\,dx = 4\sqrt{2}$$

kaikilla kokonaisluvuilla $n \geq 1$. Maple oli siis tällä kertaa oikeassa!

Miksi Mathematica antaa väärän vastauksen? Siihen on vaikea vastata, koska kaupallisten ohjelmistojen koodit eivät ole julkisia. Tuloksia vertaamalla huomataan kuitenkin, että vastausten suhde on 10 000, joten Mathematican vastaus on vain yhden sini-nyppylän pinta-ala. Ohjelman dokumentaatiossa mainitaankin tilanteesta, jossa liian monessa palassa määritellyn funktion integroimista voi (yrittää) helpottaa esimerkiksi apukäskyllä

```
MaxPiecewiseCases = Infinity.
```

Tällä ei kuitenkaan näytä olevan vaikutusta kirjoituksen aiheena olevan integraalin kohdalla. Käyttäjän kannalta pidän kuitenkin suurimpana ongelmana sitä, että ohjelma antaa väärän vastauksen varoittamatta lainkaan mahdollisesta ongelmasta. Pienentämällä lukuarvoa 10 000 huomataan, että Mathematican vastaus muuttuu oikeaksi jossakin lukujen 1 000 ja 10 000 välillä.

En kuitenkaan antaisi edes Maplelle puhtaita papereita kyseessä olevan integraalin kohdalla. Kun ohjelmaan syöttää integraalin (1) symbolisella positiivisen kokonaisluvun arvolla n

```
> assume(n,posint)
```

niin oikea vastaus $4\sqrt{2}$ tulee silmänräpäyksessä, vaikka konkreettinen tapaus $n = 10\,000$ kestää yli puoli minuuttia! Myös Maplen integroimisalgoritmeissa näyttää olevan vielä toivomisen varaa. Mathematican kohdalla laskut yleisellä n menevät vielä hankalammiksi.

[2] Laskut on tehty tammikuussa 2016 Maplen ja Mathematican uusimmilla versioilla. On täysin mahdollista, että ohjelmistojen päivitys poistaa ongelmat minä päivänä tahansa. Sen sijaan laskimissa ei välttämättä ollut uusimpia ohjelmaversioita.

Kysyin asiasta Simo Kivelältä, joka kirjoittaa aiheesta blogissaan [3].

Yhteenvetona täytyy korostaa myös Kivelän mainitsemaa periaatetta, jonka mukaan vähänkin epäilyttävien symbolisten laskujen tukena pitäisi aina käyttää sekä graafisia että numeerisia tarkistuksia, jos se vain on mahdollista.

YO-tehtävä 12/kevät 2016

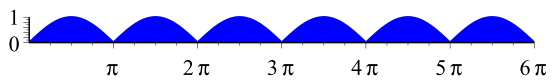
Integraali (1) palautuu muuttujanvaihdolla[3] $t = nx$ ja yllä mainituilla kaavoilla muotoon

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{1-\cos(nx)}\,dx = \frac{\sqrt{2}}{n}\int_0^{2n\pi} |\sin(t)|\,dt.$$

Koska funktio $g(t) = |\sin(t)|$ on π-jaksollinen, niin

$$\int_0^{2n\pi} |\sin(t)|\,dt = 2n\int_0^{\pi} \sin(t)\,dt = 4n.$$

Ensimmäisen yhtälön geometrista perustelua kaivattiin otsikossa mainitun YO-tehtävän a-kohdassa, mutta vain tapauksessa $n = 1$.



Kuvaaja tapauksessa $2n = 6$.

Saman tehtävän b-kohdassa oli tarkoitus muodostaa integraalifunktion

$$\int_0^x |\sin(t)|\,dt$$

lauseke muuttujan arvoilla $0 \leq x \leq 2\pi$. Tämä näyttää olevan hieman liian vaikeaa sekä Maplelle että Mathematicalle, laskimista puhumattakaan. Maple ja Mathematica osaavat kyllä piirtää integraalifunktion kuvaajan oikein, mutta lausekkeiden sieventäminen edes tyydyttävään muotoon ei näytä onnistuvan yleisellä muuttujan arvolla $x > \pi$.

Ehkäpä käsin laskemisessa on vielä toistaiseksi jokin pointti?

Viitteet

[1] A.J. Durán, M. Pérez, J.L. Varona: The misfortunes of a trio of mathematicians using Computer Algebra Systems. Can we trust them? Notices of the American Mathematical Society, Vol. 61, 1249–1252, 2014.

[2] `http://simokivela.blogspot.fi/`
Blogi 21.11.2015: Mitä symbolilaskentaohjelmalta voi odottaa ja mitä ei?

[3] `http://simokivela.blogspot.fi/`
Blogi 12.4.2016: Mitä symbolilaskentaohjelmalta voi odottaa ja mitä ei, osa 2.

[4] Osmo Pekonen (toim.): Symbolien metsässä. Art House, 1992.

[5] `http://www.sagemath.org/index.html`

[3] Muuttujanvaihto ei kuulu lukion varsinaiseen sisältöön, mutta sitä käsitellään joissakin valinnaisen kurssin 13 oppikirjoissa.