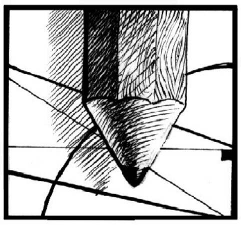


Pepin keppihevoset, toisen asteen yhtälö ja Newton

Samuli Siltanen
matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

Karaoken peruskauraa on *Aikuinen nainen*, rockin *Stairway to heaven* ja matematiikan tietenkin *Toisen asteen yhtälön ratkaisukaava*. Tiedättehän: olkoon tehtävänä löytää x, joka toteuttaa yhtälön

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Tällöin joko muistamme ulkoa tai kaivamme taulukkokirjasta iki-ihanan klassikon

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Koulumatematiikan standardi puolestaan on opettajalle osoitettu kysymys *Mihin tätä tarvitaan?* Toisen asteen yhtälön tapauksessa tämä kysymys on toki mieletön, koska sitä tarvitaan melkein kaikkeen. Otetaan esimerkiksi keppihevosjuhlien järjestäminen.

Peppi Pasanen on kaksitoistavuotias keppihevosmestari. Häneltä sujuu paitsi esteratsastus, myös keppihevosten suunnittelu ja valmistus korkeatasoisena suomalaisena käsityönä! Kuvassa 1 on pari esimerkkiä. Aika ajoin Peppi järjestää kepparijuhlat, joissa jokainen osallistuja antaa kullekin toiselle itse tehdyn keppihevosen.

Tulevien juhlien suunnittelua vaikeuttaa juuri valmistunut uusi kepparitalli. Siinä on 20 pilttuuta, ja olisi tietysti tyylikkäintä, jos omistajaa vaihtavia keppihevosia olisi tasan kaksikymmentä. Pepillä on siis ratkaistavana matemaattinen pulma *kuinka monta kaveria pitäisi kutsua, jotta omistajaa vaihtavia keppihevosia olisi juuri 20 kappaletta?*

Kuva 1: Peppi Pasasen suunnittelemia ja valmistamia keppihevosia.

Merkitään osallistujien määrää x:llä. Jokainen antaa muille kuin itselleen keppihevosen, joten kunkin tulee tuoda niitä $x - 1$ kappaletta. Keppihevosten kokonaismäärä on siis $x(x-1)$. Talli tulee täsmälleen täyteen, kun $x(x-1) = 20$, eli sievennyksen jälkeen toteamme etsivämme x:ää, joka toteuttaa yhtälön

$$x^2 - x - 20 = 0.$$

Sijoittamalla klassiseen ratkaisukaavaan $a = 1$ ja $b = -1$ ja $c = -20$ Peppi saa kaksi ratkaisua: joko $x = 5$

taikka $x = -4$. Näistä viisi on parempi vaihtoehto, koska tylsät ovat kinkerit, joissa porukkaa on vähemmän kuin ei ketään.

Huvin vuoksi voimme kokeilla myös toisenlaista ratkaisutapaa, jonka ihmiskunnan iloksi loi suurguru **Isaac Newton**. Tässä *Newtonin iteraatiossa* etsimme nollakohtaa funktiolle $f(x) = x^2 - x - 20$ ja valitsemme ratkaisulle alkuarvauksen x_1. Alkuarvausta parannetaan askeleittain käyttäen Newtonin iteraatiota $x_2 = x_1 - f(x_1)/f'(x_1)$ eli yleisemmin

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Tässä f' on funktion f derivaatta. Katso kuva 2 .

Miltä Newtonin iteraatio näyttää? Otetaan alkuarvaukseksi 2. Silloin iteraatio etenee kuvan 2 osoittamalla tavalla ja tuottaa nämä luvut:

$$\begin{aligned}
x_1 &= 2\\
x_2 &= 8\\
x_3 &= 5.6\\
x_4 &= 5.035294117647059\\
x_5 &= 5.000137331197070\\
x_6 &= 5.000000002095476\\
x_7 &= 5.000000000000000
\end{aligned}$$

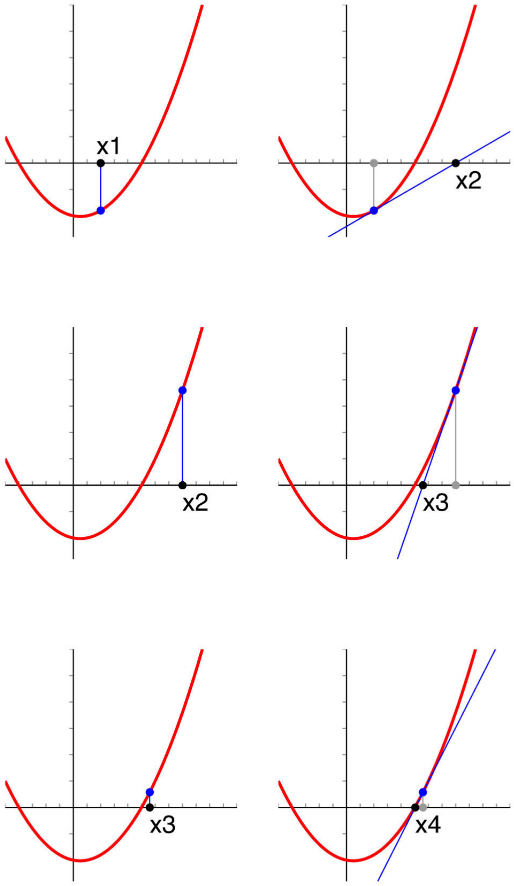
Tuo alimmainen luku x_7 onkin jo oikea tietokoneen koko laskentatarkkuudella: vastaus on 5 osallistujaa.

Kumpi on parempi menetelmä toisen asteen yhtälön ratkaisuun, kaava vai iteraatio?

Ratkaisukaavan hyvä puoli on yleispätevyys: se antaa aina kaksi oikeaa ratkaisua, myös kompleksilukuvastaukset silloin, kun reaalisia ratkaisuja ei ole. Iteraatio puolestaan suppenee vain yhteen ratkaisuun, joka riippuu alkuarvauksesta. Esimerkiksi yllä olevassa tapauksessa $f(x) = x^2 - x - 20$ alkuarvaus $x_1 = -1$ tuottaa ratkaisun $x = -4$. Iteraatiossa on ongelmiakin: alkuarvaus $x_1 = 1/2$ johtaa nollalla jakamiseen eikä anna tulosta ollenkaan.

Iteraatioratkaisun eduksi voidaan katsoa se, että se antaa aina numeerisen likiarvon. Ratkaisukaava saattaa tuottaa esimerkiksi kaupankäyntiin liittyvään kysymykseen vastauksen “$100\sqrt{2}$ euroa.” Newtonin iteraatio antaa helpommin tulkittavan ratkaisun “141 euroa ja 42 senttiä.”

Muistettakoon myös se, että ratkaisukaavan olemassaolo on hieno ja harvinainen asia. Kuten **Évariste Galois** aikoinaan osoitti, viidennen ja sitä korkeamman asteen yhtälöille ei ole ratkaisukaavaa lainkaan! Niissä tapauksissa meidän on turvauduttava Newtonin iteraation tapaisiin ratkaisukeinoihin.



Kuva 2: Newtonin iteraatio, joka perustuu derivaatan ovelaan käyttöön.

Uutta Verkko-Solmussa

Matematiikkadiplomi-sivulla

`http://matematiikkalehtisolmu.fi/diplomi.html`

on ilmestynyt kirjoitus Kombinaatio-oppia:

`http://matematiikkalehtisolmu.fi/2008/diplomi/kombinatoriikkaa.pdf`