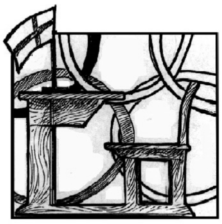

Pronssia Buștenista!

Viidennet Euroopan tyttöjen matematiikkaolympialaiset järjestettiin 10.–16.4.2016 idyllisissä vuoristomaisemissa Buștenissa, Romaniassa. Kilpailuun osallistui kaikkiaan 147 kilpailijaa 38 eri maasta. Suomea edustanut Ella Anttila Helsingin matematiikkalukiosta sai pronssimitalin 14 pisteellä, kun mitaliraja oli 11 pistettä. Lisää tietoa löytyy kilpailun kotisivuilta osoitteesta `https://www.egmo.org/egmos/egmo5/`

Euroopan tyttöjen matematiikkaolympialaisten kilpailutehtävät 2016

1. Olkoon n pariton positiivinen kokonaisluku, ja olkoot $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ei-negatiivisia reaalilukuja. Osoita, että

$$\min_{i=1,\ldots,n}(x_i^2 + x_{i+1}^2) \leqslant \max_{j=1,\ldots,n}(2x_jx_{j+1}),$$

missä $x_{n+1} = x_1$.

2. Olkoon $ABCD$ jännenelikulmio, ja leikatkoot lävistäjät AC ja BD pisteessä X. Olkoot C_1 janan CX keskipiste, D_1 janan DX keskipiste ja M janan CD keskipiste. Suorat AD_1 ja BC_1 leikkaavat pisteessä Y, ja suora MY leikkaa lävistäjää AC pisteessä E ja lävistäjää BD pisteessä F, missä E ja F ovat eri pisteitä. Osoita, että suora XY sivuaa pisteiden E, F ja X kautta kulkevaa ympyrää.

3. Olkoon m positiivinen kokonaisluku. Tarkastellaan yksikköneliön muotoisista ruuduista koostuvaa $4m \times 4m$ -taulukkoa. Kaksi eri ruutua *liittyvät* toisiinsa, jos ne ovat samalla rivillä tai samassa sarakkeessa. Mikään ruutu ei liity itseensä. Jotkin ruudut väritetään sinisiksi niin, että jokainen ruutu liittyy ainakin kahteen siniseen ruutuun. Määritä pienin mahdollinen määrä sinisiä ruutuja.

4. Kaksi samansäteistä ympyrää ω_1 ja ω_2 leikkaavat toisensa kahdessa eri pisteessä X_1 ja X_2. Tarkastellaan ympyrää ω, joka sivuaa ympyrää ω_1 ulkopuolelta pisteessä T_1, ja joka sivuaa ympyrää ω_2 sisäpuolelta pisteessä T_2. Osoita, että suorat X_1T_1 ja X_2T_2 leikkaavat toisensa pisteessä, joka sijaitsee ympyrän ω kehällä.

5. Olkoot k ja n kokonaislukuja, joille $k \geqslant 2$ ja $k \leqslant n \leqslant 2k-1$. Sijoitetaan $n \times n$ -šakkilaudalle suorakaiteen muotoisia laattoja, joista jokaisen mitat ovat joko $1 \times k$ tai $k \times 1$. Jokainen laatta peittää täsmälleen k ruutua, ja mitkään kaksi laattaa eivät mene päällekkäin. Tätä jatketaan, kunnes laudalle ei voi enää asettaa lisää laattoja tällä tavalla. Selvitä jokaisille k ja n, mikä on pienin mahdollinen määrä laattoja tällaisessa laatta-asetelmassa.

6. Olkoon S niiden positiivisten kokonaislukujen n joukko, joille jokin luvuista $n^2+1, n^2+2, \ldots, n^2+2n$ on luvun n^4 tekijä. Osoita, että joukossa S on äärettömän monta lukua, jotka ovat muotoa $7m$, äärettömän monta lukua muotoa $7m+1$, äärettömän monta lukua muotoa $7m+2$, äärettömän monta lukua muotoa $7m+5$ sekä äärettömän monta lukua muotoa $7m+6$, mutta ei ainuttakaan lukua, joka olisi muotoa $7m+3$ tai $7m+4$, missä m on kokonaisluku.