Differentiaalilaskentaa

Lehtori K.

Lehtori joutui viimeisenä lukukautenaan ennen eläköitymistään tuuraamaan kemian opettajaa, koska kunnollisempaa sijaista ei ollut saatavilla ja lukujärjestyksessä oli tilaa. Edellisestä alan opetusrupeamasta oli ehtinyt kulua yli 20 vuotta, joten oli pakko yrittää perehtyä asiaan ennen luokkaan astumista. Aiheena oli kemian kolmoskurssi, jossa käsitellään reaktiomekanismeja sekä reaktioissa tapahtuvia energioiden siirtymisiä. Tuntien onnistumisista ei jäänyt kerrottavaa, mutta oppikirjoja selatessa tuli mieleen, että kemiallisen reaktion kulkua voisi mallintaa matemaattisestikin. Niinpä lehtori johkaantui pohtimaan palautumatonta reaktiota

$$A + B \longrightarrow AB,$$

missä kuvitteelliset molekyylit A ja B sopivasti yhteen kolahtaessaan muodostavat molekyylin AB. Reaktion voi ajatella tapahtuvan liuoksessa, jonka tilavuus pysyy vakiona. Mitä enemmän siinä on lähtöaineita, sitä enemmän tapahtuu niiden välisiä suotuisia törmäyksiä aikayksikössä ja sitä nopeammin reaktio kulkee. Tuotteen syntynopeus ja vastaavasti lähtöaineiden vähenemisnopeus ovat siis suoraan verrannollisia lähtöaineiden pitoisuuksiin. Oletetaan, että hetkellä $t = 0$ ne ovat

$$[A] = [B] = c_0 > 0 \quad \text{sekä} \quad [AB] = 0.$$

Reaktioyhtälön perusteella $[A]$ ja $[B]$ pysyvät jatkossakin yhtäsuurina. Olkoon $c = [A] = [B] = c(t)$ hetkellä t. Tarkoituksena on määrittää tämä funktio. Sen muutos pienessä aikavälissä $[t, t + \Delta t]$ on yllä todetun perusteella likimäärin suoraan verrannollinen reagoivien aineiden pitoisuuksiin hetkellä t sekä aikavälin pituuteen, joten c:n muutos

$$\begin{aligned} c(t) - c(t + \Delta t) &\approx k \cdot [A] \cdot [B] \cdot \Delta t \\ &= k \cdot c(t)^2 \cdot \Delta t, \end{aligned}$$

missä k on reaktiolle ominainen positiivinen vakio. Likimääräisyys tulee siitä, että c:n arvo muuttuu koko ajan siirryttäessä ajanhetkestä t hetkeen $t + \Delta t$. Jos kuitenkin Δt on hyvin pieni, niin muutos ei ole merkittävä. Likimääräisyhtälö on siis sitä tarkempi, mitä pienempää aikaväliä tutkitaan. Kirjoittamalla se muotoon

$$\frac{c(t + \Delta t) - c(t)}{\Delta t} \approx -k \cdot c(t)^2$$

ja antamalla $\Delta t \to 0$ saadaan vasemmalle puolelle $c'(t)$ ja "$\approx$" oikenee yhtäsuuruudeksi. Tuloksena on differentiaaliyhtälö $c'(t) = -k\, c(t)^2$ alkuehdolla $c(0) = c_0$. Leibnizin tavalla kirjoitettuna se on

$$\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t} = -kc^2. \tag{1}$$

Valitettavasti differentiaalilaskenta lukiossa painottuu alkeisfunktioiden derivoimissääntöjen ulkoa opetteluun eikä tällaisia mallinnuksia juuri suoriteta. Luonnontieteellisten ja teknillisten jatko-opintojen kannalta olisi kuitenkin suotavaa, että niitäkin tehtäisiin. Oleellisinta on tällöin derivaatan määritelmän ymmärtäminen sekä muuntuvan ilmiön tarkastelu paikallisesti pienessä muuttujavälissä.

Mitä c-funktiosta voidaan sanoa yhtälön (1) perusteella sitä ratkaisematta? Nähdään, että sen derivaatta on kaikilla t:n arvoilla negatiivinen, joten $c = c(t)$ on aidosti vähenevä. Sillä on siis käänteisfunktio $t = t(c)$. Tässä kohdassa on "sopivaista" siteerata Lindelöfiä:

Edellä olemme pitäneet x:ää riippumattomana muuttujana ja y:tä x:n funktiona. Mutta voidaan myöskin, ja joskus se tuottaa helpoituksenkin, käsittää y riippumattomaksi muuttujaksi ja x sen funktioksi. [1, s. 2]

Huvittavalta tuntuva helpotuksen i-muoto oli sata vuotta sitten käypää oikeinkirjoitusta! Ernst Lindelöfiä (1870 - 1946) voi pitää yhtenä suomalaisen yliopistomatematiikan kantaisistä. Hänen neuvoaan seuraten tarkastelemme siis c:n käänteisfunktiota $t = t(c)$. Yhtälöstä (1) seuraa välittömästi

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}c} = t'(c) = -\frac{1}{kc^2},$$

josta integroimalla saamme

$$t = t(c) = \frac{1}{kc} + d.$$

Alkuehdon $t(c_0) = 0$ mukaan integroimisvakio

$$d = -\frac{1}{kc_0},$$

joten

$$t = \frac{1}{kc} - \frac{1}{kc_0},$$

mistä seuraa

$$c = c(t) = \frac{c_0}{1 + c_0kt}.$$

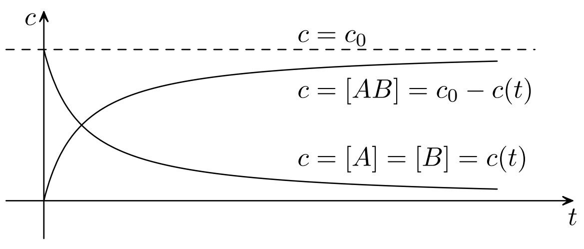
Siis hetkellä t

$$[A] = [B] = c(t) = \frac{c_0}{1 + c_0kt}$$

ja

$$[AB] = c_0 - c(t) = \frac{c_0^2\,kt}{1 + c_0kt}.$$

Kuviosta



ja yhtälöistäkin näkee, että kuvaajat lähestyvät asymptoottisesti t-akselia ja suoraa $c = c_0$, kun $t \to \infty$.

Lehtori ei eläkkeelläkään pääse irti opettamisen vimmastaan, vaan tyrkyttää aktiiviselle lukijalle muutamia tehtäviä ratkaistaviksi. Aluksi pari helppoa verryttelykysymystä.

1. Bakteerit lisääntyvät jakautumalla kahtia. Mallinna bakteeriviljelmän kokoa ajan funktiona tekstissä esitettyyn tapaan oletuksella, että ravintoa on riittävästi.
2. Määritä yhtälön
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1 + y^2$$
se ratkaisu, joka toteuttaa alkuehdon $y(0) = 1$.

Kolmas kysymys onkin sitten katalampi. Kyseessä on ylioppilaskokeen tehtävä syksyltä 1967.

3. Ratkaise differentiaaliyhtälö
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \cos(x + y)$$
valitsemalla $x + y$ apumuuttujaksi.

Differentiaalilaskenta tuli ylioppilaskokeisiin 1960-luvulla sellaisella ryminällä, etteivät opettajatkaan pysyneet mukana. Tämänkin tehtävän "malliratkaisusta" kokoelmassa [2] voisi antaa enintään pari lohdutuspistettä! Sittemmin vaatimustasoa on löysätty. WolframAlphakaan (`http://www.wolframalpha.com/`) ei ratkaise tätä yhtälöä täydellisesti.

Viitteet

[1] E. Lindelöf, *Differentiali- ja integralilasku ja sen sovellutukset III. Ensimmäinen osa. Tavalliset differentialiyhtälöt.* Mercatorin kirjapaino oy, 1935.

[2] E. Kannisto, Y. Metsänkylä, *Matemaattiset tehtävät ylioppilastutkinnossa vuosina 1944–1968*, kahdeskymmenesseitsemäs painos, Gummerus osakeyhtiö, 1968.