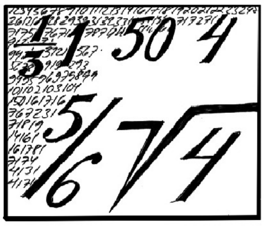

Aritmeettinen ja geometrinen keskiarvo

Anne-Maria Ernvall-Hytönen
Åbo Akademi

Joulun aikoihin ryhdyin joinain yön pimeinä tunteina pohtimaan riisipuuron mantelimääriä. Sekä minä että vanhempani keittää riisipuuron harvinaisen harhaoppisesti: minä täysin ilman manteleita, vanhempani hillittömällä mantelimäärällä. Jos siis vanhempieni keittämässä riisipuurossa on n mantelia annosta kohti ja minun keittämässäni nolla, ja ihminen syö molempia riisipuuroja yhden annoksen, on hänellä keskimäärin $\frac{n}{2}$ mantelia riisipuuroannoksessa. Tämä on aritmeettinen keskiarvo, eli se keskiarvo, josta yleensä keskiarvojen yhteydessä puhutaan. Näiden lukujen geometrinen keskiarvo onkin vain nolla. Geometrinen keskiarvo lasketaan kertomalla luvut keskenään ja ottamalla sitten tulosta niin mones juuri kuin tulossa tekijöitä oli. Tässä tapauksessa siis $\sqrt{n \cdot 0} = 0$. Tässä tapauksessa geometrinen keskiarvo on siis huomattavasti pienempi kuin aritmeettinen. Itse asiassa voidaan todistaa, että epänegatiivisten lukujen aritmeettinen keskiarvo on aina vähintään yhtä suuri kuin geometrinen. Todistetaan tämä tulos hetken kuluttua induktiolla. Ennen sitä määritellään aritmeettinen ja geometrinen keskiarvo täsmällisesti sekä motivoidaan vähän, minkä ihmeen vuoksi geometrinen keskiarvo edes on olemassa, eli mitä sillä voi tehdä. Mantelien laskemiseen se nimittäin lopulta on harvinaisen huono mittari.

Aritmeettinen keskiarvo

Lukujen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ aritmeettinen keskiarvo määritellään lausekkeella

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

Tämä soveltuu hyvin esimerkiksi manteliannosten laskemiseen: Jos syö kaksi annosta puuroa, molemmissa $\frac{n}{2}$ mantelia, niin loppusumma on n mantelia, jonka saa myös syömällä esimerkiksi yhden mantelittoman ja yhden n mantelin annoksen, tai minkä tahansa sellaisen manteliannoksen yhdistelmää, joiden keskiarvo on $\frac{n}{2}$ mantelia.

Geometrinen keskiarvo

Epänegatiivisten lukujen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ geometrinen keskiarvo määritellään lausekkeella

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}.$$

Tässä on todellakin kriittistä, että luvut ovat epänegatiivisia, sillä jos esimerkiksi $n = 2$ ja luvuista toinen negatiivinen ja toinen positiivinen, on geometrinen keskiarvo imaginäärinen, eikä se kuvaa tilannetta lainkaan. Jos taas esimerkiksi molemmat luvut olisivatkin negatiivisia, olisi geometrinen keskiarvo positiivinen (neliöjuuri määritellään positiiviseksi), eikä sellaisenkaan luvun voi ajatella kovin hyvin kuvaavan alkuperäisten lukujen suuruutta, sillä tuntuisi mielettömältä, että mikään keskiarvo olisi suurempi kuin alkuperäiset luvut.

Seuraava kysymys tietenkin on: Milloin olisi järkevää käyttää geometrista keskiarvoa aritmeettisen sijaan? Onko tällaisia tilanteita? Ehkä alkeellisin esimerkki ovat korot: Tehdään x euron pääomatalletus. Ensimmäisen vuoden korkoprosentti on a % ja toisen vuoden korkoprosentti on b %. Kuinka paljon rahaa on kahden vuoden jälkeen? Vastaus on tietysti

$$x\left(1+\frac{a}{100}\right)\left(1+\frac{b}{100}\right).$$

Jos haluttaisiin selvittää, mikä vuotuisen korkoprosentin pitäisi olla, jos korkoprosentti olisi vakio, jotta päästäisiin samaan tuottoon, toimii geometrinen keskiarvo ilmeisesti. Lukujen $1+\frac{a}{100}$ ja $1+\frac{b}{100}$ geometrinen keskiarvo on

$$\sqrt{\left(1+\frac{a}{100}\right)\left(1+\frac{b}{100}\right)},$$

jolloin kahden vuoden jälkeen säästöjä on

$$x\cdot\sqrt{\left(1+\frac{a}{100}\right)\left(1+\frac{b}{100}\right)}^{2}=x\left(1+\frac{a}{100}\right)\left(1+\frac{b}{100}\right).$$

Jos tässä yritettäisiin käyttää aritmeettista keskiarvoa, mentäisiin metsään ja rankasti:

$$\frac{\left(1+\frac{a}{100}\right)+\left(1+\frac{b}{100}\right)}{2}=1+\frac{a+b}{200},$$

ja tällä luvulla kahden vuoden jälkeisen tuoton laskeminen menisikin seuraavasti:

$$x\left(1+\frac{a+b}{200}\right)^2=x\left(1+\frac{a+b}{100}+\left(\frac{a+b}{200}\right)^2\right),$$

joka ei ole sama kuin

$$x\left(1+\frac{a}{100}\right)\left(1+\frac{b}{100}\right)=x\left(1+\frac{a+b}{100}+\frac{ab}{10000}\right),$$

paitsi jos $a=b$.

Aritmeettis-geometrinen epäyhtälö

Aritmeettis-geometrinen epäyhtälö voidaan muotoilla seuraavasti: Olkoot $a_1, a_2, \ldots, a_n$ epänegatiivisia kokonaislukuja. Tällöin

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geq\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n},$$

ja yhtäsuuruus vallitsee, jos ja vain jos $a_1=a_2=\cdots=a_n$.

Aritmeettis-geometrinen epäyhtälö on hyvin tunnettu, ja sille on useita erilaisia todistuksia. Sen voi todistaa yksinkertaisella (ei simppelillä, vaan kertaalleen tehdyllä) induktiolla (katso esimerkiksi Lehtisen Pieni kilpailumatematiikan opas [7]), Jensenin epäyhtälöllä tai kuten seuraavaksi teemme, kaksinkertaisella induktiolla. Kaksinkertainen induktio on todella tyylikäs: Ensin todistetaan epäyhtälö kaikille kakkosen potensseille, ja sen jälkeen osoitetaan, että jos väite pätee luvulla $n+1$, niin se pätee myös luvulla n.

Induktiossa tyypillisesti osoitetaan, että mikäli väite pätee luvulla n, pätee se myös luvulla $n+1$, jolloin alusta, luvusta $n=1$ aloittaen voidaan edetä todeten, että väitteen pätemisestä, kun $n=1$, seuraa, että väite pätee myös, kun $n=2$, josta seuraa, että väite pätee, kun $n=3$, ja niin edelleen.

Aritmeettis-geometrisen epäyhtälön todistuksessa käytetyn induktion filosofia on tosiaan toisenlainen, ensin käsitellään kakkosen potenssit, ja sitten laskeudutaan. Tämä tarkoittaa sitä, että jos haluttaisiin vaikkapa todistaa, että epäyhtälö pätee, kun $n=6$, ei edettäisikään ketjussa

$$n=1\to n=2\to n=3\to n=4\to n=5\to n=6$$

vaan ketjussa

$$n=1\to n=2\to n=4\to n=8\to n=7\to n=6.$$

Aritmeettis-geometrisen epäyhtälön todistus

Keskitytään nyt todistamaan aritmeettis-geometrisen epäyhtälön suuruusjärjestys. Tarkastellaan lopuksi yhteenvedossa sitä, miksi itse asiassa yhtäsuuruus voi vallita, jos ja vain jos kaikki luvut ovat yhtä suuria.

Ensimmäinen induktio

Ensimmäisen induktion tehtävä on siis todistaa väite kaikille luvun 2 potensseille. Aloitetaan luvusta $1=2^0$: Väite pätee nyt ilmeisesti:

$$\sqrt[1]{a}=a=\frac{a}{1}.$$

Joudumme lisäksi osoittamaan väitteen luvulle $2=2^1$, koska tätä tarvitaan todistuksen rakentamisessa. Osoitetaan siis, että

$$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}.$$

Epäyhtälön molemmat puolet ovat epänegatiivisia, joten epäyhtälö voidaan puolittain neliöidä ja saadaan yhtäpitävä epäyhtälö:

$$\frac{a^2+b^2+2ab}{4}=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\geq\sqrt{ab}^2=ab.$$

Tämä epäyhtälö on puolestaan yhtäpitävä epäyhtälön

$$\frac{a^2+b^2}{4}\geq\frac{ab}{2}$$

kanssa, mutta tämä epäyhtälö onkin sama kuin

$$\frac{a^2+b^2}{4} - \frac{ab}{2} = \left(\frac{a}{2} - \frac{b}{2}\right)^2 \geq 0,$$

mikä on tosi.

Tehdään nyt induktio-oletus: Väite pätee luvulla 2^k, eli että

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{2^k}}{2^k} \geq \sqrt[2^k]{a_1 a_2 \cdots a_{2^k}},$$

kun luvut $a_1, a_2, \ldots, a_{2^k}$ ovat mitä tahansa epänegatiivisia reaalilukuja. Osoitetaan seuraavaksi, että väite pätee myös luvulla 2^{k+1}, eli että

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{2^{k+1}}}{2^{k+1}} \geq \sqrt[2^{k+1}]{a_1 a_2 \cdots a_{2^{k+1}}},$$

kun luvut $a_1, a_2, \ldots, a_{2^{k+1}}$ ovat mitä tahansa epänegatiivisia reaalilukuja. Huomataan, että

$$\begin{aligned}
&\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{2^{k+1}}}{2^{k+1}} \\
&= \frac{\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{2^k}}{2^k} + \frac{a_{2^k+1}+a_{2^k+2}+\cdots+a_{2^{k+1}}}{2^k}}{2} \\
&\geq \frac{\sqrt[2^k]{a_1 a_2 \cdots a_{2^k}} + \sqrt[2^k]{a_{2^k+1} a_{2^k+2} \cdots a_{2^{k+1}}}}{2} \\
&\geq \sqrt{\sqrt[2^k]{a_1 a_2 \cdots a_{2^k}} \cdot \sqrt[2^k]{a_{2^k+1} a_{2^k+2} \cdots a_{2^{k+1}}}} \\
&= \sqrt[2^{k+1}]{a_1 a_2 \cdots a_{2^{k+1}}},
\end{aligned}$$

ja ensimmäinen induktio onkin valmis.

Toinen induktio

Toisen induktion tehtävä on siis osoittaa, että mikäli väite pätee luvulla $n+1$, pätee väite myös luvulla n.

Huomataan aluksi, että alkuaskel on jo hoidettu ensimmäisellä induktiolla. Voidaan siis saman tien muotoilla induktio-oletus: Väite pätee luvulla $n+1$, eli että

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n+1}}{n+1} \geq \sqrt[n+1]{a_1 a_2 \cdots a_{n+1}},$$

kun luvut $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ ovat mitä tahansa epänegatiivisia reaalilukuja.

Induktioväite on siis nyt, että väite pätee luvulla n, eli että

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n},$$

kun luvut $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ovat mitä tahansa epänegatiivisia reaalilukuja. Tämä on nyt todistettava. Manipuloidaan ja hyödynnetään induktio-oletusta. Saadaan

$$\begin{aligned}
&\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \\
&= \frac{\frac{n}{n+1}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + \frac{1}{n+1}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)}{n} \\
&= \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)}{n+1} \\
&\geq \sqrt[n+1]{\frac{a_1 a_2 \cdots a_n (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)}{n}}.
\end{aligned}$$

Siispä

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots a_n}{n}\right)^{n/(n+1)} \geq \sqrt[n+1]{a_1 a_2 \cdots a_n}.$$

Puolittain potenssiin $\frac{n+1}{n}$ korottamalla saadaan

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n},$$

ja todistus on valmis.

Yhteenveto induktioista

Induktiot yhteensä kattavat kaikki mahdolliset positiiviset kokonaisluvut, sillä ensimmäisellä induktiolla päästään mihin tahansa kakkosen potenssiin, ja toisella induktiolla päästään mistä tahansa luvusta alaspäin. Siispä, jos halutaan todistaa aritmeettis-geometrinen epäyhtälö luvulle n, riittää ensin todistaa se ensimmäisen induktion avulla sellaiselle luvulle 2^k, joka toteuttaa ehdon $2^k \geq n$, ja tämän jälkeen laskeudutaan lukuun n.

Vielä pitää käsitellä yhtäsuuruus. Huomataan, että yhtäsuuruus pätee triviaalisti, kun kaikki luvut ovat yhtä suuria. Silloin aritmeettinen ja geometrinen keskiarvo ovat yhtä suuria. Perustellaan nyt, miksi milloinkaan muulloin aritmeettinen ja geometrinen keskiarvo eivät voi olla yhtä suuria. Huomataan, että tapauksessa $n = 2$ käytettiin epäyhtälöä

$$\left(\frac{a}{2} - \frac{b}{2}\right)^2 \geq 0.$$

Tässä epäyhtälössä yhtäsuuruus pätee selvästi, jos ja vain jos $a = b$. Tätä askelta puolestaan tarvittiin todistamaan epäyhtälö kakkosen potensseille, joten sama ominaisuus periytyi niille, ja lopulta vielä toisessa induktiossa. (Harjoitustehtäväksi jätetään tarkistaa päättelyketjun pitävyys.)

Niille, jotka haluavat lukea lisää

Epäyhtälöistä löytyy paljon mukavia tekstejä. Matematiikan olympiavalmennuksen sivulta löytyy esimerkiksi Esa Vesalaisen kääntämä Paul Vaderlindin epäyhtälömoniste [8] sekä allekirjoittaneen ja Jari Lappalaisen moniste [5]. Edistyneempää materiaalia kaipaavalle sopii esimerkiksi Kedlayan $A < B$ [4]. Solmu-lehdessä Halmetoja on kirjoittanut tekstejä epäyhtälöistä, kuten [1] ja [2].

Viitteet

[1] M. Halmetoja. Epäyhtälöistä, osa 1. Solmu 2/2010. http://matematiikkalehtisolmu.fi/2010/2/epayhtaloista_osa1.pdf

[2] M. Halmetoja. Epäyhtälöistä, osa 2. Solmu 3/2010. http://matematiikkalehtisolmu.fi/2010/3/epayhtaloista_osa2.pdf

[3] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Pólya. Inequalities. Cambridge University Press.

[4] K. Kedlaya. $A < B$ (A is less than B). http://artofproblemsolving.com/articles/files/KedlayaInequalities.pdf

[5] J. Lappalainen, A.-M. Ernvall-Hytönen. Epäyhtälöoppia matematiikkaolympialaisten tehtäviin. http://matematiikkakilpailut.fi/kirjallisuus/eykirja.pdf

[6] M. Lehtinen. Kilpailumatematiikan opas. http://matematiikkakilpailut.fi/kirjallisuus/kilpmatopas.pdf

[7] M. Lehtinen. Pieni kilpailumatematiikan opas. http://matematiikkakilpailut.fi/kirjallisuus/opas.pdf

[8] P. Vaderlind. Epäyhtälöiden kieltämätön viehätys. http://matematiikkakilpailut.fi/kirjallisuus/vaderlind.pdf

Verkko-Solmun oppimateriaalit

Osoitteesta matematiikkalehtisolmu.fi/oppimateriaalit.html löytyvät oppimateriaalit:

Ensiaskeleet Einsteinin avaruusaikaan, osa 1: Kinematiikka: aika, paikka ja liike (Teuvo Laurinolli)

Ensiaskeleet Einsteinin avaruusaikaan, osa 2: Dynamiikka: liikelait, liikemäärä ja energia (Teuvo Laurinolli)

Kilpailumatematiikan opas (Matti Lehtinen)

Geometrian perusteita (Matti Lehtinen)

Geometria (K. Väisälä)

Lukualueiden laajentamisesta (Tuomas Korppi)

Jaksolliset desimaaliesitykset algebrallisesta näkökulmasta (Jaska Poranen ja Pentti Haukkanen)

Algebra (Tauno Metsänkylä ja Marjatta Näätänen)

Algebra (K. Väisälä)

Matemaattista fysiikkaa lukiolaiselle 1: Mekaniikkaa (Markku Halmetoja ja Jorma Merikoski)

Matemaattista fysiikkaa lukiolaiselle 2: Sähköoppia (Markku Halmetoja ja Jorma Merikoski)

Lukuteorian helmiä lukiolaisille (Jukka Pihko)

Matematiikan peruskäsitteiden historia (Erkki Luoma-aho)

Matematiikan historia (Matti Lehtinen)

Reaalianalyysiä englanniksi (William Trench)