Ehdotus vuonna 2016 voimaan astuvaksi pitkän matematiikan opetussuunnitelmaksi

Yhteisen johdantokurssin on annettava realistinen kuva pitkän matematiikan sisältöjen käsitteellisyystasosta. Myös lyhyen matematiikan valitsijoiden on saatava lähtökohtia myöhempien kurssien opiskeluun. Siksi tämän kurssin sisällöksi on valikoitunut aineistoa, joka voimassaolevan opetussuunnitelman mukaan on osin yhteistä molemmille oppimäärille. Johdantokurssilla saadaan myös käsitys matematiikasta eksaktina tieteenä. Kaikkien kurssien kuvauksiin on liitetty esimerkkejä tyypillisistä harjoitustehtävistä. Eräät asiakohdat on merkitty tähdellä ($\star$) osoittamaan, että ko. kohdat ovat sellaista opettajan harkinnassa olevaa syventävää aineistoa, joka ei tule esiintymään ylioppilaskokeessa. Suosittelemme, ettei CAS-laskimia käytettäisi pakollisten kurssien yhteydessä, sillä jatko-opintojen alkaessa niiden sisällöt on osattava ilman merkittäviä apuvälineitä.

Mäntässä, Espoossa ja Helsingissä 11.2.2015

Markku	Halmetoja	Mäntän lukio
Heikki	Pokela	Tapiolan lukio
Timo	Salminen	Oulunkylän yhteiskoulun lukio

Pitkän matematiikan pakollinen oppimäärä

MAB01: Matematiikan johdantokurssi

Peruskoulun oppimäärä kerrataan harjoitustehtävissä. Tämän kurssin yhteydessä annetaan myös ajankäyttösuositus.

- Lukualueet (6h)
  - lukualueet ja joukko-opin merkinnät
  - reaalilukujen laskulait, järjestysominaisuudet ja itseisarvo
  - ensimmäisen asteen yhtälö ja yhtälöpari
  - suora $y = kx + b$
  - ensimmäisen asteen epäyhtälö
  - tyypillisiä tehtäviä:
    - Muunnettava murtoluvuksi jaksollinen, päättymätön desimaaliluku $0{,}727272\ldots$.
    - Astiassa on $5{,}0\,\mathrm{kg}$ vesiliuosta, jonka massasta $5{,}0\,\%$ on suolaa. Kuinka paljon liuokseen on lisättävä vettä, jotta näin saadun liuoksen massasta suolan osuus olisi $2{,}0\,\%$?
    - Määritettävä pisteiden $(-2, 1)$ ja $(3, 2)$ kautta kulkevan suoran yhtälö.
    - Millä x:n arvoilla $|x - 2| < 1$?
    - Millä x:n arvoilla $|x - 3| = |x|$?
- Lausekkeiden käsittelyä (4h)
  - monomin ja binomin tulo, summan ja erotuksen neliöt
  - summan ja erotuksen tulo
  - tyypillisiä tehtäviä:
    - Ratkaise yhtälö $x^2 - 3 = 0$.
    - Suorita kertolaskut **a)** $(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})$, **b)** $(2 - \sqrt{3})^2$.
- Logiikkaa (5h)
  - propositio ja loogiset konnektiivit
  - tavallisimmat päättelysäännöt
  - kvanttorit $\forall$ ja $\exists$ kirjoittamista lyhentävinä merkintöinä

- tehdään selväksi, että
    - yksi vastaesimerkki kumoaa väitteen ”ominaisuus $p(x)$ on voimassa kaikilla $x \in A$”
    - jos ominaisuus $p(x)$ on voimassa *eräillä* muuttujan arvoilla $x_k \in A$, niin se ei välttämättä ole voimassa *kaikilla* $x \in A$

- Jaollisuus (5h)
  - parillisuus–parittomuus-tarkasteluja
  - 3:lla ja 9:llä jaollisuus; voidaan käsitellä 3-numeroisille luvuille, yleistys on ilmeinen
  - jaollisuussääntöjä, kuten $c \mid a \wedge c \mid b \Rightarrow c \mid (a+b)$
  - alkuluvut ja aritmetiikan peruslauseen alkuosa (todetaan)
  - todistetaan, että alkulukuja on ääretön määrä
  - tyypillisiä tehtäviä:
    - Osoitettava, että n on pariton, jos ja vain jos n^2 on pariton.
    - Osoitettava, että jos n on kahden neliön summa, niin myös $2n$ on kahden neliön summa.
    - Osoitettava, että kolmella jaottomien lukujen neliöiden erotus on kolmella jaollinen.
    - Osoitettava, että jos $p\,(>3)$ on alkuluku, niin $24 \mid (p^2-1)$.
    - Osoitettava, että $3 \mid (2^{2n}-1)$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

- Tuloperiaate (5h)
  - tuloperiaate ja permutaatiot
  - n-alkioisen joukon k-permutaatiot ja k-kombinaatiot
  - opitaan laskemaan kombinaatioiden lukumääriä kaavaa

    $$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

    käyttäen
  - tyypillisiä tehtäviä:
    - Tepolla on kolme pipoa, neljä huivia, sormikkaat ja tumput. Kuinka monta erilaista asuyhdistelmää niistä saa?
    - Maastopyörän polkimien kohdalla on kolme hammasratasta ja takapyörän keskiön kohdalla niitä on kuusi. Kuinka monta vaihdetta pyörässä on?

    - Nettikauppias H. Uijari mainostaa erikoistarjouksena 19-vaihteista maastopyörää. Tilaisitko pyörän maksamalla rahat ennakkoon kauppiaan tilille?
    - Kuinka monella eri tavalla voidaan lotota 4-oikein sarake?
    - Mitä maksaa 11 rastin lottosysteemi, kun yksi sarake maksaa euron?

- Johdatusta induktioon (5h)
  - induktion idea ilman algebrallista väitelauseketta
  - induktiotodistuksen kulku yksinkertaisten esimerkkien avulla:
    - n-kulmion kulmien summa on $(n-2) \cdot 180°$
    - $1 + 3 + \ldots + (2n-1) = n^2$
    - $2 + 4 + \ldots + 2n = n(n+1)$
    - aritmetiikan peruslauseen alkuosan todistus
    - n-alkioisella joukolla on 2^n osajoukkoa
    - $n < 2^n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$

MA02: Funktiot

- funktion määritelmä, injektio, surjektio, bijektio
- yhdistetty funktio ja käänteisfunktio alustavasti
- peruslaskutoimitukset polynomeilla
- polynomifunktiot, -yhtälöt ja -epäyhtälöt
- polynomin nollakohtien ja jaollisuuden välinen yhteys
- peruslaskutoimitukset rationaalilausekkeilla
- tyypillinen tehtävä:
  - Eräässä virastossa on naisia enemmän kuin miehiä. Jos naisten määrää vähennetään $p\,\%$ ja miesten määrää lisätään $q\,\%$, niin miehiä ja naisia on yhtä paljon.
    a) Kuinka monta prosenttia miesten määrä on naisten määrästä?
    b) Kuinka monta prosenttia naisten määrä on henkilöstön kokonaismäärästä?
    c) Jos johdannossa mainitut muutokset toteutetaan ja sen seurauksena henkilöston kokonaismäärä pysyy ennallaan, niin mikä yhtälö vallitsee p:n ja q:n välillä?

- rationaalifunktiot, -yhtälöt ja -epäyhtälöt
- yleiset juuret, rationaaliluku eksponenttina, reaaliluku eksponenttina
- neliöjuuri- ja itseisarvoyhtälöt ja -epäyhtälöt (yleisemmät juuriyhtälöt lyhyesti)
- tyypillisiä tehtäviä:
  - Ratkaistava epäyhtälö $\sqrt{1+2x} < 1+x$.
  - Ratkaistava yhtälö $|a-x| = |x-b|$.
- eksponenttifunktio (Neperin luku kurssissa 9)
- logaritmin määritelmä ja perusominaisuudet (rajoitutaan pääasiassa Briggsin logaritmiin)
- eksponentti- ja logaritmiyhtälöitä ja -epäyhtälöitä

MA03: Geometria 1

Peruskoulussa opitut pinta-alat ja tilavuudet kertautuvat harjoitustehtävien yhteydessä.

- deduktiivisen päättelyn pohjaksi annetaan eräitä selviöinä pidettäviä lauseita, kuten yhdensuuntaisuusaksiooma, samankohtaisia kulmia koskeva lause sekä kolmion yhtenevyys- ja yhdenmuotoisuuslauseet; näytetään muutaman esimerkin avulla, miten väittämät todistuvat loogisesti perusteista lähtien:
  - kolmion kulmien summa, tasakylkisen kolmion kantakulmat ovat yhtäsuuret, suunnikkaan vastakkaiset kulmat ovat yhtäsuuret jne.
- sovelletaan algebraa ja yhdenmuotoisuutta geometrisissa ongelmissa
  - Pythagoraan lauseen todistuksia
  - kolmion merkilliset pisteet, kolmion kulman puolittajalause
  - kehäkulma-keskuskulma, tangenttikulma-keskuskulma, puoliympyrän sisältämä kehäkulma
  - kultainen leikkaus
  - osoitetaan ympyrän kehän ja halkaisijan suhteen riippumattomuus ympyrän koosta, johdetaan ympyrän pinta-ala

- lasketaan π:n likiarvo:
    - $*$ Osoitetaan, että jos 1-säteisen ympyrän sisään piirretyn säännöllisen n-kulmion sivun pituus on a_n, niin $2n$-kulmion sivun pituus
    $$a_{2n} = \frac{a_n}{\sqrt{2+\sqrt{4-a_n^2}}},$$
    jolloin $\pi \approx n \cdot a_{2n}$. Lähtemällä säännöllisestä kuusikulmiosta Arkhimedes määritti π:n likiarvoja periaatteessa tällä tavalla laskien 12-, 24, 48- ja 96-kulmion sivun pituuden. Laskimella päästään pidemmälle ja palautuskaavan voi myös ohjelmoida.

- suunnattu kulma (asteissa) ja trigonometristen funktioiden määrittely yksikköympyrän avulla

- todetaan, että $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ kaikilla α:n arvoilla ja määritellään
$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \text{kun} \quad \alpha \neq 90^\circ + n \cdot 180^\circ,\ n \in \mathbb{Z}.$$

- kosini- ja sinilauseet; sinilauseen yhteys kolmion ympäri piirrettyyn ympyrään

- vektorin määritelmä, niiden yhteen- ja vähennyslasku, vektorin kertominen luvulla, yhdensuuntaisuus ja tason kanta

- tyypillisiä tehtäviä:
    - Ympyrän jänteet AB ja CD tai niiden jatkeet leikkaavat toisensa pisteessä P. Osoita, että $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.
    - Osoitettava, että mediaanit jakavat kolmion pinta-alan kuuteen yhtäsuureen osaan.
    - Määritettävä r-säteisen ympyrän sisään piirrettyjen säännöllisten 10- ja 5-kulmioiden sivujen pituudet.
    - Määritettävä tarkat arvot:
    $$\cos 36^\circ,\ \sin 36^\circ,\ \tan 36^\circ,\ \cos 72^\circ,\ \sin 72^\circ \text{ ja } \tan 72^\circ.$$

MA04: Vektorit ja trigonometria

- tulojoukko; todetaan xy-taso tulojoukoksi $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$
- xy-tason kantavektorit $\mathbf{i}$ ja $\mathbf{j}$
- muotoa $x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ olevien vektorien pituus, yhteen- ja vähennyslasku, luvulla kertominen, yhdensuuntaisuus ja kierto
- radiaani
- kosinin ja sinin jaksollisuus, parittomuus ja parillisuus
- todistetaan kosinin ja sinin yhteen- ja vähennyslaskukaavat (esim. sopivia vektoreita kiertämällä)
- johdetaan kosinin, sinin ja tangentin perusominaisuudet
- tyypillinen tehtävä:
  - Johdettava tangentin yhteen- ja vähennyslaskukaavat.
- trigonometristen funktioiden kuvaajat
- trigonometrisia yhtälöitä
- vektorien skalaaritulo
- vektorien välinen kulma, kohtisuoruus, projektio

MA05: Analyyttinen geometria ja kompleksiluvut

Sovelletaan maksimaalisesti vektorioppia.

- suoran yhtälö eri muodoissa
- suoran kulmakerroin, suuntavektori ja normaalivektori
- lineaarisen yhtälöparin ratkaiseminen ja ratkaisujen lukumäärän tarkastelu (parametri yhtälössä)
- kahden muuttujan lineaarinen optimointi
- pisteen etäisyys suorasta
- ympyrä, ympyrän tangentti

- muut kartioleikkaukset uraominaisuuksineen
- kartioleikkausta $\mathcal{K}(x,y)=0$ pisteessä (x_0,y_0) sivuava tangentti:
  - Esim. Määritetään käyrää $xy=1$ pisteessä (x_0,y_0) sivuava tangentti sekanttia kallistamalla. Pisteissä (x_0,y_0) ja (x,y) käyrää leikkaavan sekantin kulmakerroin k_s ”lähestyy” tangentin kulmakerrointa k_t, kun x ”lähestyy” lukua x_0. Siis: sekantin kulmakerroin

    $$\begin{aligned} k_s &= \frac{y-y_0}{x-x_0}=\frac{yxx_0-xx_0y_0}{(x-x_0)xx_0} \\ &= \frac{x_0-x}{(x-x_0)xx_0}=-\frac{1}{xx_0}=-\frac{y_0}{x}\to-\frac{y_0}{x_0}=k_t, \end{aligned}$$

    kun $x\to x_0$. Tangentin yhtälö

    $$y-y_0=-\frac{y_0}{x_0}(x-x_0)$$

    pelkistyy muotoon $xy_0+x_0y=2$.
- kompleksiluvut reaalilukupareina, kompleksitaso
- suora ja ympyrä kompleksitasossa
- de Moivren kaavan

  $$(\cos\phi+\mathrm{i}\sin\phi)^n \;=\; \cos n\phi+\mathrm{i}\sin n\phi$$

  induktiotodistus

MA06: Todennäköisyyslaskenta

Kombinatoriikan alkeet kertautuvat harjoitustehtävissä.

- kombinatoriikan syventävä kertaus; kombinaatioiden lukumäärät ja Pascalin kolmio
- joukkojen leikkaus, yhdiste ja komplementti
- klassinen ja yleisempi äärellinen todennäköisyyskenttä
- tilastollinen ja geometrinen todennäköisyys
- samaan kenttään kuuluvien tapahtumien todennäköisyyksien yhteenlaskusääntö

- ehdollinen todennäköisyys, tapahtumien riippumattomuus, riippumattomien tapahtumien kertolaskusääntö
- tyypillinen tehtävä:
  - Osoita: Jos $\mathrm{P}(A|B) = \mathrm{P}(A)$, niin $\mathrm{P}(B|A) = \mathrm{P}(B)$.
- riippumattomat ja riippuvat toistokokeet
- tyypillisiä tehtäviä:
  - Heitetään kolikkoa. Millä todennäköisyydellä toinen klaava saadaan kuudennella heitolla?
  - Viisi henkilöä arpoo pitkää tikkua vetämällä keskuudestaan henkilön, joka saa vapaalipun konserttiin. Onko arvonta demokraattinen, eli onko kaikilla yhtäsuuri todennäköisyys saada vapaalippu?
- tilastollisen aineiston keskiarvo, varianssi ja keskihajonta
- diskreetti, äärellinen satunnaismuuttuja ja sen todennäköisyysjakauma
- satunnaismuuttujan odotusarvo, varianssi ja keskihajonta
- binomijakautunut satunnaismuuttuja
- tyypillinen syventävä tehtävä:
  - Eräs harvinainen sairaus on keskimäärin yhdellä miljoonasta. Sairaus todetaan testillä, joka antaa oikean tuloksen 99%:n varmuudella riippumatta, onko testattava sairas vai ei. Satunnaisesti valittu henkilö saa testistä positiivisen tuloksen. Millä todennäköisyydellä hänellä on sairaus?

MA07: Lukuteoria

Lukuteorian merkitys korostuu tietoturva-asioiden yms. ansiosta. Siksi sen alkeet on syytä ottaa osaksi pitkän matematiikan pakollista oppimäärää.

- lukujen suurin yhteinen tekijä ja pienin yhteinen monikerta
- jakoyhtälö, Eukleideen algoritmi ja kahden muuttujan ensimmäisen asteen Diofantoksen yhtälö
- aritmetiikan peruslauseen yksikäsitteisyysosa, irrationaalisuustodistuksia

- kongruenssi
- tyypillinen syventävä tehtävä:
  - Fermat luuli, että luvut $F_n = 1 + 2^{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$, ovat alkulukuja. Vuonna 1732 Euler kuitenkin osoitti, että $641 \mid F_5$. Euler ei tuntenut kongruensseja mutta hän oli havainnut, että $5^4 + 2^4 = 641$ ja $1 + 5 \cdot 2^7 = 641$. Muodosta näistä yhtälöistä sopivat kongruenssit ja osoita niiden avulla, että $641 \mid F_5$.
- täydellinen jäännössysteemi $(\operatorname{mod} m)$
- supistettu jäännössysteemi $(\operatorname{mod} m)$ ja Eulerin funktio
- Fermat'n ja Eulerin lauseet

($\star$ Wilsonin lause)

($\star$ RSA-algoritmi)

MA08: Differentiaalilaskenta 1

- funktion raja-arvo ja jatkuvuus, epäolennaiset raja-arvot, raja-arvona ääretön ja asymptootit
- jatkuvan funktion perusominaisuudet:
  - suljetulla välillä jatkuva funktio saa pienimmän ja suurimman arvonsa sekä kaikki niiden väliset arvot eikä sen merkki voi vaihtua ilman nollakohtaa
- derivaatan määritelmä ja merkintätavat, korkeammat derivaatat
- yleisiä derivoimissääntöjä, potenssifunktion, polynomi- ja rationaalifunktion derivoiminen
- tyypillinen syventävä tehtävä:
  - Funktio f toteuttaa kaikilla $x \in \mathbb{R}$ yhtälön $f'(x) = af(x)$, missä $a \neq 0$. Laske funktion $g(x) = xf(x)$ n:s derivaatta. Ohje: Keksi tulos kokeilemalla ja todista se oikeaksi induktiolla.
- funktion kuvaajan tangentti, sovelluksena Newtonin menetelmä yhtälön numeeriseksi ratkaisemiseksi

- väliarvolause (ilman todistusta), perustellaan funktion kulkuun liittyvät asiat sen avulla
- tyypillinen tehtävä:
  - Osoitettava, että funktio

    $$f :]a, b[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = (a - x)^{-1} - (x - b)^{-1}$$

    on bijektio.
- integraalifunktion määritelmä, todistetaan integraalilaskennan peruslause väliarvolauseen avulla
- yhdistetty funktio ja sen derivoiminen
- suoraviivaisen liikkeen matemaattinen mallintaminen (paikka-nopeus-kiihtyvyys)

MA09: Differentiaalilaskenta 2

Derivoimissääntöjen yhteydessä todetaan myös vastaavat integroimissäännöt.

- käänteisfunktio ja sen derivaatta
- juurifunktion derivaatta
- potenssifunktion derivaatta, kun eksponenttina on rationaaliluku
- eksponenttifunktion derivaatta, e-kantainen eksponenttifunktio
- logaritmin määritelmä (kertaus), kantaluvun vaihtaminen, luonnollinen logaritmi
- logaritmifunktion derivaatta
- yleisen potenssifunktion derivoiminen (eksponenttina reaaliluku)
- tyypillisiä tehtäviä:
  - Mikä origon kautta kulkeva suora sivuaa käyrää $y = \mathrm{e}^x$?
  - Onko funktiolla $f(x) = x(1 + (\ln x)^2)$ ääriarvoja?
  - Määritä **a)** hyperbolisen sinin, **b)** hyperbolisen tangentin käänteisfunktio. Määritä näiden käänteisfunktioiden derivaatat.

- johdetaan trigonometristen funktioiden derivaatat
- tyypillisiä syventäviä tehtäviä:
  - Määritettävä funktion $f(x) = \cos^6 x + \sin^6 x$ pienin ja suurin arvo.
  - Osoitettava, että jos $\tan x \in \mathbb{Q}$, niin $\cos 2x \in \mathbb{Q}$ ja $\sin 2x \in \mathbb{Q}$.
  - Osoitettava, että

    $$4\cos^4\left(\frac{x}{4}\right) + 4\sin^4\left(\frac{x}{4}\right) = 3 + \cos x$$

    kaikilla $x \in \mathbb{R}$.
- jaksollisten ilmiöiden mallintamista, esim.
  - vektorifunktion $\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j}$ derivaatta
  - vakiokulmanopeudella ω tapahtuva pyöriminen:
    - Kappaleen paikkavektori hetkellä t

      $$\mathbf{r}(t) = r\cos(\omega\, t)\,\mathbf{i} + r\sin(\omega\, t)\,\mathbf{j}.$$

      Määritä kappaleen nopeus, nopeuden suunta ja itseisarvo sekä kiihtyvyys, kiihtyvyyden suunta ja itseisarvo.

MA10: Integraalilaskenta

- alkeisfunktioiden integrointi, osittaisintegrointi
- pinta-alan arviointi puolisuunnikassumman avulla
- jatkuvan funktion määrätty integraali puolisuunnikassumman raja-arvona, integraalin ominaisuudet ja laskeminen
- määrätty integraali ja osittaisintegrointi
- tyypillinen tehtävä:
  - Olkoon $n \in \mathbb{N}$ ja

    $$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{2x+1}\,\mathrm{d}x.$$

    Osoita, että $2I_n + I_{n-1} = \frac{1}{n}$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$ ja laske I_3.

- funktion kuvaajan ja koordinaattiakselin rajoittama pinta-ala äärellisessä välissä
- tyypillinen tehtävä:
  - Paraabeli $y = x^2$ jakaa ympyrän $x^2 + y^2 = 2$ kahteen osaan. Laskettava osien pinta-alojen suhde.
- pyörähdyskappaleen tilavuus äärellisessä välissä

($\star$ numeerista integrointia Simpsonin säännön avulla:
  - Säännön johtamisen voi muotoilla harjoitustehtäväksi. Sitä voi testata integraaleihin

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \quad \text{ja} \quad \pi = \int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.)$$

- epäolennaiset integraalit
- jatkuvan satunnaismuuttujan tiheys- ja kertymäfunktio
- esimerkkejä jatkuvista satunnaismuuttujista niihin liittyviä todennäköisyyksiä
- jatkuvan satunnaismuuttujan odotusarvo, varianssi ja keskihajonta
- tyypillinen tehtävä:
  - Valitaan r-säteisen ympyrän sisäpiste mielivaltaisesti. Satunnaismuuttuja X on pisteen etäisyys ympyrän keskipisteestä. Laskettava $\mathbb{E}X$ ja $\mathbb{D}X$.
- normaalijakautunut satunnaismuuttuja, opitaan laskemaan normaalijakaumaan liittyviä todennäköisyyksiä taulukkokirjan avulla tai integroimalla numeerisesti (puolisuunnikassääntö tai Simpsonin sääntö)

Valtakunnalliset syventävät kurssit

MA11: Geometria 2

- monitahokkaisiin liittyviä tehtäviä
- Eulerin monitahokaskaava: $T + K = S + 2$
- Platonin monitahokkaat (miksi niitä on vain viisi?)
- tyypillisiä tehtäviä:
  - Neliöpohjaisen suoran pyramidin pohja- ja sivutahkon välinen kulma on $40°$. Laske kahden sivutahkon välinen kulma.
  - Kuudestakymmenestä hiiliatomista muodostuva fulleriinimolekyyli C_{60} on kupera monitahokas, jonka kärjissä on hiiliatomit ja jonka tahkot ovat säännöllisiä 5- ja 6-kulmioita. Kuinka monesta 5- ja 6-kulmiosta se muodostuu?
- vektorit $\mathbb{R}^3$:ssa, skalaaritulon kertaaminen
- vektoritulo laskusääntöineen (mahdollisesti ilman todistuksia)
- vektoritulon sovelluksia
- suora, taso ja pallo $\mathbb{R}^3$:ssa, pallon tangenttitaso
- tyypillisiä tehtäviä:
  - Johdettava pisteen (x_0, y_0, z_0) etäisyys tasosta
    $$ax + by + cz + d = 0.$$
  - Pisteiden $(0, 0, 1)$ ja $(3, 4, 0)$ kautta kulkeva suora leikkaa origokeskeisen yksikköpallon pisteissä P ja Q. Laskettava näiden pisteiden välinen geodeettinen (pallon pintaa pitkin mitattu) etäisyys.
- lineaarinen yhtälöryhmä; geometrinen tulkinta ja ratkaisujen lukumäärän tarkastelu
- tutustutaan alustavasti matriiseihin, niiden yhteen- ja kertolaskuun
- kirjoitetaan lineaarinen yhtälöryhmä matriisimuotoon $AX = B$; sovelletaan nykyaikaista laskentatekniikkaa ryhmän ratkaisemiseen

($\star$ vektorit $\mathbb{R}^n$:ssä, tilastollinen aineisto havaintovektorina, korrelaatiokerroin)

MA12: Lukujonot ja sarjat

- lukujonon määritelmä
- aritmeettinen jono ja summa
- geometrinen jono ja summa
- rekursiivisesti määritellyt jonot
- Fibonaccin jono
- lukujonon suppeneminen ja hajaantuminen, raja-arvon tarkka ε-määritelmä
- tyypillisiä tehtäviä:
  - Laske jonon (u_n) raja-arvo ja todista tulos oikeaksi, kun
    $$u_n = \frac{2n}{n+1}.$$
  - Laske jonon (v_n) raja-arvo ja todista tulos oikeaksi, kun
    $$v_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}.$$
- monotonisen jonon suppenemislause (ilman todistusta)
- tyypillinen tehtävä:
  - Olkoon p_n todennäköisyys sille, että heitettäessä kolikkoa $2n$ kertaa saadaan n klaavaa. Osoita, että jono (p_n) on aidosti vähenevä. Määritä sen raja-arvo Stirlingin kaavan avulla.
- sarjan määritelmä
- sarjan suppeneminen ja hajaantuminen
- geometrinen sarja
- teleskooppisarjat
- harmoniset sarjat
- harmonisen ja aliharmonisen sarjan hajaantuminen

(⋆ yliharmonisen sarjan suppeneminen)

(⋆ positiivitermiset sarjat, suppenemis- ja hajaantumistarkasteluja käyttämällä harmonisia ja geometrisia sarjoja majorantti- ja minoranttisarjoina)

MA13: Analyysin jatkokurssi

- funktion raja-arvon tarkka δ-ε-määritelmä
- tyypillinen tehtävä:
  - Todista, että
    $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 1.$$
- kerrataan derivaatan määritelmä ja todistetaan väliarvolause
- sijoitusmenettely määrätyn integraalin laskemisessa
- tyypillinen syventävä tehtävä:
  - Normaalijakautuneen satunnaismuuttujan X tiheysfunktio
    $$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}.$$
    Osoita, että $\mathbb{E}X = \mu$ ja $\mathbb{D}^2X = \sigma^2$.
- johdetaan kappaleiden tilavuuksia ja pinta-aloja integraalilaskentaa soveltaen (erityisesti pallon tilavuus ja pinta-ala, segmentin tilavuus, vyöhykkeen ja kalotin pinta-ala)
- mallinnetaan eräitä muuntuvia ilmiöitä johtamalla niitä kuvaavia differentiaaliyhtälöitä, ratkaistaan ko. tyyppiä olevia yhtälöitä
- tyypillinen tehtävä:
  - Jääpalasen sulamisnopeus on tietyssä ulkoilman lämpötilassa verrannollinen palasen pinta-alaan. Pala säilyttää sulaessaan muotonsa ja ensimmäisen tunnin aikana siitä sulaa neljännes? Kuinka kauan sulaminen kestää?
- riittävän monta kertaa derivoituvan funktion Taylor-polynomi
- eksponentti-, kosini ja sinifunktion potenssisarjan johtaminen suppenemistodistuksineen
- kompleksilukujen syventävä kertaus
- Eulerin kaava $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} = \cos\phi + \mathrm{i}\sin\phi$ ja kompleksiluvun napakoordinaattiesitys $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$, $z(t) = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$