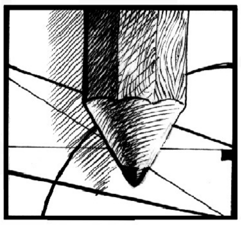


Summien arviointi integraalien avulla

Anne-Maria Ernvall-Hytönen
Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

Johdanto

Monenlaisia summia voi arvioida integraalien avulla. Integraaleilla saavutettava hyöty on se, että usein on paljon helpompi laskea integraalin arvo kuin kertoa mikä jonkin summan arvo on. Esimerkkinä otettakoon summa

$$\sum_{1\leq n\leq N}\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{N}},$$

jonka suuruudesta voi olla hankala sanoa mitään kovin konkreettista, mutta jota vastaavasta integraalista

$$\int_1^N\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

on helppo sanoa paljonkin. Tämä esimerkki on tekstin lopussa harjoitustehtävänä.

Tarkkoja arvoja tämä menetelmä ei yleensä anna, mutta varsin usein täysin riittäviä. Nyrkkisääntö on se, että kunhan funktio käyttäytyy suhteellisen kiltisti, arviointi toimii melko hyvin. Yksinkertaisuudessaan kyse on siitä, että valitaan sopiva funktio, jonka integraali sopivalla välillä on varmasti suurempi, ja jokin funktio, jonka integraali sopivalla välillä on varmasti pienempi kuin annettu summa. Jotta arvioinnissa olisi järkeä, vaaditaan luonnollisestikin, että suuruusluokka ei saa heittää kovinkaan paljon. Tämä on yksi esimerkki yleisemmästä ns. voileipäperiaatteesta, eli siitä, että litistetään tarkasteltava funktio joidenkin muiden, hyvin tunnettujen funktioiden väliin. Tarkasteltava funktio on siis kuvitteellinen juusto, ja vertailukohtina toimivat funktiot ovat kuvitteellisen sämpylän puolet.

Yksinkertaisuuden vuoksi oletetaan kaikkialla, että N on positiivinen kokonaisluku. Tämä ei ole rajoittava oletus, mutta yksinkertaistaa hieman notaatiota ja tarkastelujen yksityiskohtia.

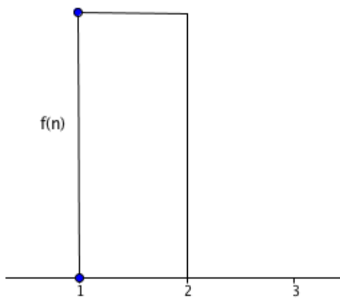
Perusperiaate

Halutaan tarkastella summaa

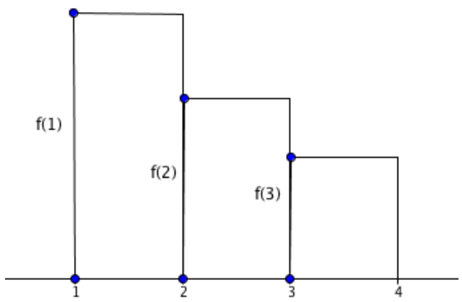
$$\sum_{n\leq N}f(n),$$

missä $f(x)$ on (positiivisilla) reaaliluvuilla määritelty positiivinen funktio. Yksinkertaisuuden vuoksi oletetaan lisäksi, että $f(x)$ on kasvava tai laskeva (eli sen arvo ei saa heittelehtiä, vaan se on monotoninen).

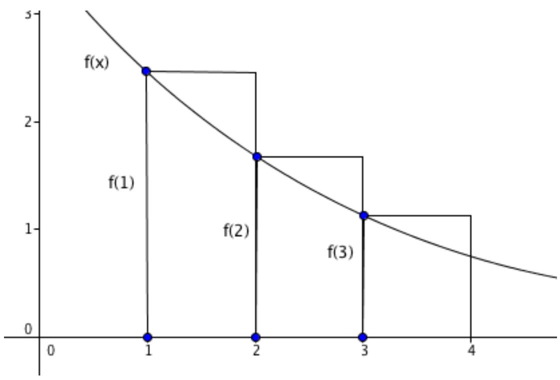
Jokainen summattava voidaan ajatella muodossa $1\cdot f(n)$, eli sellaisen suorakulmion alana, jonka yksi sivu on 1 ja kohtisuora sivu on $f(n)$.



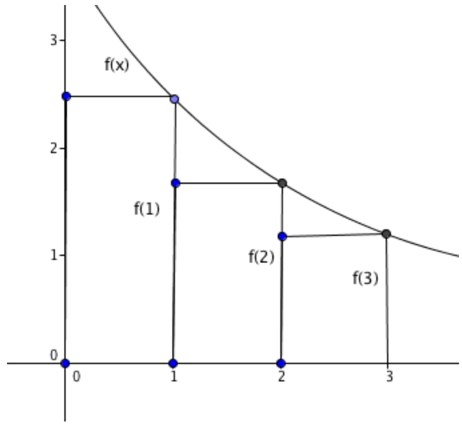
Jos halutaankin laskea summa $f(1)+f(2)+f(3)$, vastaa se seuraavan kuvion alan laskemista:



Tätä summaa voidaan arvioida alaspäin integroimalla funktiota $f(x)$ välin $[1,4]$ yli, kuten seuraavasta kuvasta huomataan:



ja toisaalta, summaa voidaan arvioida ylöspäin integroimalla funktiota $f(x)$ välin $[0,3]$ yli, kuten seuraavasta kuvasta huomataan:



Koska esimerkkifunktio on laskeva tällä välillä, saadaan summaa minoroitua integroiden summan lähtöpisteestä yhdellä lisättyyn loppupisteeseen. Sitä voidaan majoroida integroimalla pisteestä, joka on yksi vähemmän kuin summan alkupiste, pisteeseen, joka on summan loppupiste. Tämä voidaan muotoilla seuraavaksi lauseeksi:

Lause. *Jos reaaliluvuilla määritelty integroituva funktio $f(x)$ on laskeva, niin*

$$\int_1^{N+1} f(x)\,dx \leq \sum_{1\leq n\leq N} f(n) \leq \int_0^N f(x)\,dx.$$

Jos funktio on puolestaan nouseva, niin

$$\int_1^{N+1} f(x)\,dx \geq \sum_{1\leq n\leq N} f(n) \geq \int_0^N f(x)\,dx.$$

Todistus. Todistus on samanlainen sekä nousevalle että laskevalle funktiolle, joten keskitytään laskevan funktion tarkasteluun. Koska funktio on laskeva, pätee

$$f(y) \leq f(n) \leq f(x),$$

kun $y \geq n \geq x$, joten

$$\begin{aligned}\int_n^{n+1} f(x)\,dx &\leq \int_n^{n+1} f(n)\,dx \\ &= f(n)\int_n^{n+1} 1\,dx = f(n)\end{aligned}$$

ja vastaavasti myös

$$f(n) \leq \int_{n-1}^n f(x)\,dx.$$

Siispä, funktion arvoa yhdessä pisteessä voidaan arvioida seuraavasti ylös- ja alaspäin:

$$\int_n^{n+1} f(x)\,dx \leq f(n) \leq \int_{n-1}^n f(x)\,dx.$$

Summaamalla epäyhtälöketju saadaan

$$\begin{aligned}\sum_{1\leq n\leq N}\int_n^{n+1} f(x)\,dx &\leq \sum_{1\leq n\leq N} f(n) \\ &\leq \sum_{1\leq n\leq N}\int_{n-1}^n f(x)\,dx,\end{aligned}$$

ja koska

$$\sum_{1\le n\le N}\int_n^{n+1} f(x)\,dx = \int_1^{N+1} f(x)\,dx$$

ja

$$\sum_{1\le n\le N}\int_{n-1}^{n} f(x)\,dx = \int_0^{N} f(x)\,dx,$$

saadaan

$$\int_1^{N+1} f(x)\,dx \le \sum_{1\le n\le N} f(n) \le \int_0^{N} f(x)\,dx,$$

kuten väitettiinkin. Lause on todistettu. □

Siirrytään nyt tarkastelemaan esimerkkejä.

Harmoninen sarja

Harmoniseksi sarjaksi kutsutaan summaa

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

Tämä sarja hajaantuu, eli toisin sanoen, osasummat

$$\sum_{1\le n\le N}\frac{1}{n}$$

lähestyvät ääretöntä, kun N kasvaa. Tätä sarjaa on käsitelty esimerkiksi Alestalon kirjoituksessa [1]. Sarjan hajaantuminen on helppo todistaa. Käsitellään se ensin, ja analysoidaan sen jälkeen osasummien käytöstä hieman tarkemmin.

Lause. *Harmoninen sarja*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

hajaantuu.

Todistus. Jaotellaan sarja osiksi niin, että tiedetään kaikkien osien olevan suurempia kuin jokin annettu vakio. Jos tällaisia osia on ääretön määrä, on summan suuruudenkin pakko olla ääretön. Siispä, kirjoitetaan sarja uusiksi:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{2^k\le n<2^{k+1}}\frac{1}{n}.$$

Tarkastellaan pikkusummia

$$\sum_{2^k\le n<2^{k+1}}\frac{1}{n}.$$

Huomataan, että summassa on 2^k termiä. Lisäksi jokaisen termin suuruus on

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{2^{k+1}},$$

sillä $2^k \le n < 2^{k+1}$. Nyt summaa on helppo arvioida:

$$\sum_{2^k\le n<2^{k+1}}\frac{1}{n} > \sum_{2^k\le n<2^{k+1}}\frac{1}{2^{k+1}} = \frac{2^k}{2^{k+1}} = \frac{1}{2}.$$

Täten koko summaa voidaan arvioida

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{2^k\le n<2^{k+1}}\frac{1}{n} > \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2} = \infty.$$

Todistus on valmis. □

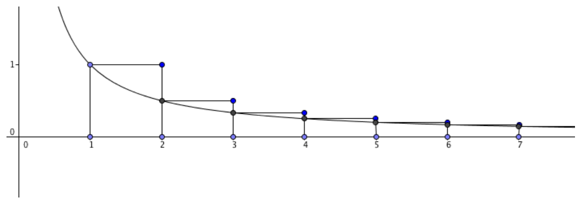
Yllä oleva todistus on alkeellinen ja yksinkertainen, mutta se ei kerro juuri mitään summan kasvuvauhdista. Tiedämme, että summa kasvaa rajatta, mutta hyvin vähän mitään muuta. Jos haluamme tietää, miten summa oikeasti käyttäytyy, on hyödyllistä käyttää yllä esiteltyä periaatetta.

Lause. *Harmonisen sarjan osasummille pätee*

$$\sum_{1\le n\le N}\frac{1}{n} = \ln N + g(N),$$

missä $0 < g(N) < 1$.

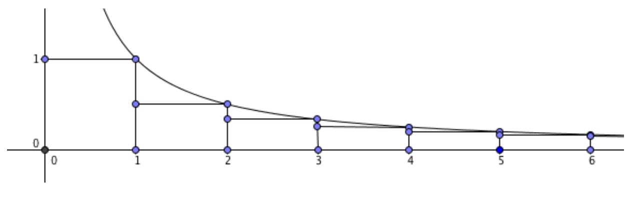
Todistus. Haetaan summalle integraalien avulla hyvä ylä- ja alaraja. Aloitetaan alarajasta. Edetään kuten edellä esitetyn periaatteen mukaan pitääkin. Kuvan alku näyttää tältä:



Alaraja on siis

$$\sum_{1\le n\le N}\frac{1}{n} > \int_1^{N+1}\frac{dx}{x} = [\ln x]_1^{N+1} = \ln(N+1).$$

Katsotaan seuraavaksi ylärajaa. Kuvan alku näyttää tällä kertaa tältä:



Ylärajaksi tulee siis

$$\sum_{1\le n\le N}\frac{1}{n} < \int_0^{N}\frac{dx}{x},$$

mutta näin arvioiminen on harvinaisen huono idea, sillä

$$\int_0^N \frac{dx}{x} = \infty.$$

Tämä arvio ei siis kerro mitään.

Ongelma voidaan kuitenkin kiertää poistamalla ensimmäinen termi, eli arvoa $n = 1$ vastaava termi, sillä silloin summaa

$$\sum_{2\le n\le N} \frac{1}{n}$$

vastaava ylärajaintegraali onkin

$$\int_1^N \frac{dx}{x} = \ln N.$$

Siispä

$$\sum_{1\le n\le N} \frac{1}{n} = 1 + \sum_{2\le n\le N} \frac{1}{n} < 1 + \ln N.$$

Tiedämme nyt, että

$$\ln(N+1) < \sum_{1\le n\le N} \frac{1}{n} < 1 + \ln N.$$

Lähdetään muokkaamaan alarajaa:

$$\ln(N+1) = \ln N + (\ln(N+1) - \ln N) > \ln N.$$

Siispä

$$\ln N < \sum_{1\le n\le N} \frac{1}{n} < 1 + \ln N.$$

Tämä todistaa väitteen. □

Näin saatu arvio on jo erittäin hyvä. Tiedämme, että pientä vakiota vaille summa $\sum_{1\le n\le N} \frac{1}{n}$ käyttäytyy kuin $\ln N$. Luonnollinen jatkokysymys tietenkin on: Voidaanko sanoa jotain erotuksesta

$$\sum_{1\le n\le N} \frac{1}{n} - \ln N,$$

kun N lähestyy ääretöntä? Itse asiassa voidaan, ja tämän erotuksen raja-arvo tunnetaan Eulerin tai Eulerin ja Mascheronin vakiona, ja sen suuruuskin on hyvin tunnettu:

$$\lim_{N\to\infty} \left(\sum_{1\le n\le N} \frac{1}{n} - \ln N \right) \approx 0{,}5772.$$

Tarkastellaan seuraavaksi toista esimerkkiä.

Logaritmien summa

Arvioidaan seuraavaksi summaa

$$\sum_{1\le n\le N} \ln n.$$

On selvää, että jos $N \to \infty$, niin summakin lähenee ääretöntä, sillä myös summattavat kasvavat rajatta. Kiinnostavaa onkin siis selvittää, kuinka nopeasti tällaiset summat kasvavat.

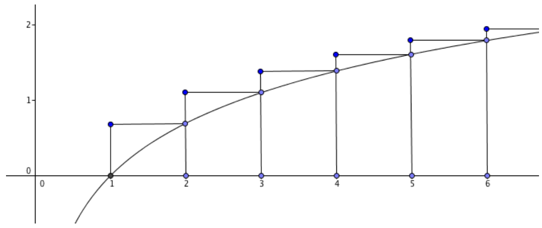
Lause. *Logaritmisummille pätee*

$$\sum_{1\le n\le N} \ln n = N \ln N - N + h(N),$$

missä $1 < h(N) < \ln N - 2\ln 2 + 2$.

Todistus. Tilanne on nyt hieman erilainen kuin aiemmin: logaritmi on kasvava, ei laskeva funktio. Tämä ei kuitenkaan paljon vaikuta laskuihin. Ainoa eroavaisuus on se, että aiemmin ylärajan antaneet integraalit antavatkin nyt alarajan, ja aiemmin alarajan antaneet integraalit antavat ylärajan.

Aloitetaan alarajan määrittämisellä. Kuva näyttää tällaiselta:



Kannattaa huomioida, että $\ln 1 = 0$, joten summan ensimmäisestä termistä ei tarvitse välittää. Tämä on itse asiassa erinomainen asia, sillä jos integroisimme nollasta alkaen funktiota $\ln n$, olisimme arvioiden kanssa pulassa (logaritmi vaihtaa merkkiään ykkösessä, ja lähestyy miinus ääretöntä nollan läheisyydessä). Alaraja on

$$\sum_{1\le n\le N} \ln n = \sum_{2\le n\le N} \ln n > \int_1^N \ln x \, dx.$$

Seuraavaksi on integroitava $\ln x$. Tämä onnistuu helposti osittaisintegrointia käyttäen (jos osittaisintegrointi on vieras käsite, voi kaavan tarkistaa derivoimalla):

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - \int 1 \, dx = x \ln x - x + C.$$

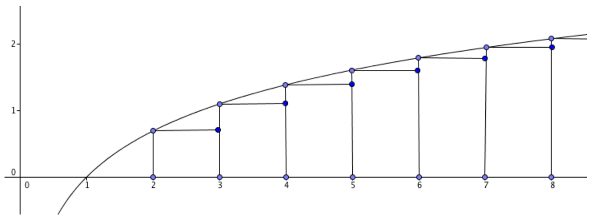
Integraalin arvoksi siis saadaan

$$\int_1^N \ln x \, dx = N \ln N - N + 1,$$

joten

$$\sum_{1\le n\le N} \ln n > N \ln N - N + 1.$$

Määritetään nyt yläraja. Kuva näyttää tällä kertaa tällaiselta:



Laskujen helpottamiseksi kirjoitetaan

$$\sum_{1\le n\le N} \ln n = \sum_{2\le n\le N} \ln n = \ln N + \sum_{2\le n\le N-1} \ln n.$$

Ylärajaksi saadaan nyt

$$\begin{aligned}\sum_{1\le n\le N} \ln n &= \ln N + \sum_{2\le n\le N-1} \ln n \\ &< \ln N + \int_2^{N+1} \ln x\, dx\end{aligned}$$

ja integraalin arvoksi saadaan

$$\int_2^N \ln x\, dx = N\ln N - 2\ln 2 - N + 2.$$

Siispä

$$\sum_{1\le n\le N} \ln n < N\ln N - N - 2\ln 2 + 2 + \ln N$$

ja

$$\sum_{1\le n\le N} \ln n > N\ln N - N + 1.$$

Täten

$$\sum_{1\le n\le N} \ln n = N\ln N - N + h(N),$$

missä $1 < h(N) < \ln N - 2\ln 2 + 2$, kuten väitettiinkin. Todistus on valmis. □

Tämä arvio on itse asiassa jossain mielessä jopa hämmästyttävä, sillä pätee

$$\sum_{1\le n\le N} \ln N = N\ln N,$$

eli on melkein sama, summataanko logaritmit luvuista $1, 2, \ldots, N$ yhteen vai käytetäänkö pelkästään suurinta arvoa, eli arvoa $\ln N$.

Suorana seurauksena saadaan myös

$$\begin{aligned}N! &= \prod_{n=1}^{N} n = e^{\sum_{n=1}^{N} \ln n} \\ &= e^{N\ln N - N + h(N)} = \left(\frac{N}{e}\right)^N e^{h(N)},\end{aligned}$$

missä $1 < h(N) < \ln N - 2\ln 2 + 2$, eli

$$e\left(\frac{N}{e}\right)^N < N! < \frac{e^2 N}{4}\left(\frac{N}{e}\right)^N.$$

Stirlingin kaava antaa tälle tulolle vielä tarkemman arvion

$$N! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{N}{e}\right)^N,$$

missä $\sim$ tarkoittaa, että kaavan virhe on selvästi pienempi kuin annettu termi, eli virhetermin ja annetun termin osamäärä lähestyy nollaa luvun N lähestyessä ääretöntä. Suuruusluokka on kuitenkin jo alkeellisin tarkasteluin saamassamme kaavassa oikein.

Harjoitustehtäviä

Tehtävä 1. Suppeneeko vai hajaantuuko sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\,?$$

Tehtävä 2. Mitä voit sanoa osasummista

$$\sum_{1\le n\le N} \frac{1}{\sqrt{n}}\,?$$

Tehtävä 3. Riemannin ζ-funktioksi kutsutaan sarjaa

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

kun $\Re s > 1$ (reaaliluvuilla s tämä ehto yksinkertaisesti vain tarkoittaa $s > 1$). Tiedetään esimerkiksi, että

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}.$$

Kuinka hyviä arvioita Riemannin ζ-funktion arvoista saadaan tarkastelemalla katkaistuja summia, eli osasummia

$$\sum_{1\le n\le N} \frac{1}{n^s}\,?$$

Vihje: tarkastele arvion virhettä, eli erotusta

$$\zeta(s) - \sum_{1\le n\le N} \frac{1}{n^s} = \sum_{n>N} \frac{1}{n^s}.$$

Viitteet

[1] P. Alestalo, *Harmoninen sarja.* Solmu 3/2014.