Riemannin ζ-funktio

Katja Kulmala
Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

Esa V. Vesalainen
Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Jyväskylän yliopisto

Riemannin ζ-funktio on matematiikan kiehtovimpia otuksia, ja erottamaton osa alkulukujen teoriaa. Se oli avainasemassa todistettaessa 1800-luvun matematiikan erästä loppuhuipennusta, alkulukulausetta, ja eräs tärkeimmistä nykyisistä matematiikan avoimista ongelmista, kysymys Riemannin hypoteesin paikkansa pitävyydestä, koskee ζ-funktion nollakohtien ominaisuuksia. Seuraavassa tarkoituksena on valottaa teoriaa kertomalla, mikä ζ-funktio on, millaisia yhteyksiä sillä on alkulukujen teoriaan, ja mistä Riemannin hypoteesissa on kysymys.

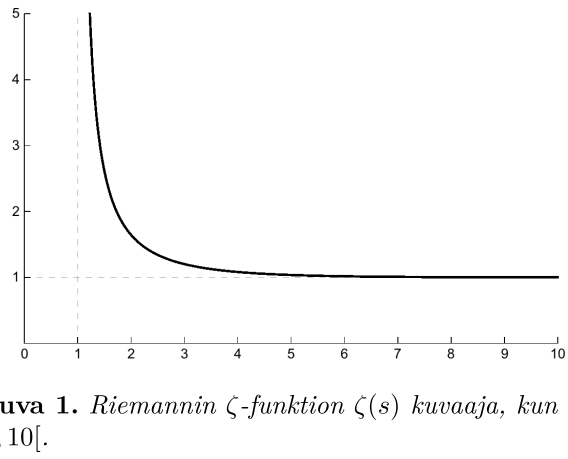
Riemannin ζ-funktio

Kun $s \in \,]1, \infty[$, määrittelemme Riemannin ζ-funktion äärettömänä sarjana

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Kirjaimen s käyttäminen muuttujana voi ehkä vaikuttaa kummalliselta, mutta sillä on niin pitkät perinteet ja se on tapana niin syvälle juurtunut, että lienee paikallaan kunnioittaa sitä.

Riemannin ζ-funktion käytös pistettä 1 lähestyttäessä osoittautuu tärkeäksi. Seuraava lause sanoo, että pistettä 1 lähestyttäessä $\zeta(s)$ käyttäytyy oleellisesti ottaen samoin kuin $1/(s-1)$. Lisäksi sen todistus takaa, että ζ-funktion määrittelevä ääretön sarja on ongelmaton ja antaa äärellisen lopputuloksen, kun $s \in \,]1, \infty[$.



Kuva 1. *Riemannin ζ-funktion $\zeta(s)$ kuvaaja, kun $s \in \,]1, 10[$.*

Lause. *Kaikilla $s \in \,]1, \infty[$ pätee*

$$\frac{1}{s-1} < \zeta(s) < 1 + \frac{1}{s-1}.$$

Todistus. Todistetaan alaraja ensin. Funktio x^{-s} on muuttujan x suhteen aidosti vähenevä, joten kaikilla kokonaisluvuilla $n \geqslant 1$ pätee

$$\frac{1}{n^s} > \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{x^s}.$$

Tästä seuraa, että kaikilla kokonaisluvuilla $N \geqslant 1$ pätee

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} > \sum_{n=1}^{N} \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{x^s} = \int_1^{N+1} \frac{\mathrm{d}x}{x^s}.$$

Kun $N \longrightarrow \infty$, saadaan

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} > \int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^s}.$$

Tässä oikean puolen integraalin voi kaikeksi onneksi laskea:

$$\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^s} = \lim_{X \longrightarrow \infty} \int_1^{X} \frac{\mathrm{d}x}{x^s} = \lim_{X \longrightarrow \infty} \frac{1^{1-s} - X^{1-s}}{s-1} = \frac{1}{s-1}.$$

Yläraja voidaan todistaa samalla tavalla: Koska x^{-s} on aidosti vähenevä, pätee kokonaisluvuilla $n \geqslant 2$, että

$$\frac{1}{n^s} < \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}x}{x^s}.$$

Tätä käyttämällä voidaan arvioida

$$\zeta(s) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^s} < 1 + \int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^s} = 1 + \frac{1}{s-1}.$$

Yhteys alkulukuihin

Seuraava tuloesitys osoittaa, että ζ-funktio on kiinteällä tavalla yhteydessä alkulukuihin. Tämän yhteyden löysi ensimmäisenä Euler 1737.

Eulerin tulo. *Kaikilla $s \in]1, \infty[$ pätee*

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}},$$

missä tulo otetaan kaikkien alkulukujen yli. Tai tarkemmin,

$$\lim_{X \longrightarrow \infty} \prod_{p \leqslant X} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} = \zeta(s),$$

missä tulo otetaan kaikkien niiden alkulukujen p yli, joille $p \leqslant X$.

Todistus. Pätee

$$\sum_{n \leqslant X} \frac{1}{n^s} \leqslant \prod_{p \leqslant X} \left(1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \frac{1}{p^{3s}} + \dots\right),$$

missä p on alkuluku. Nimittäin, jos oikean puolen tulo kerrotaan auki, saadaan sarja, jossa on varmasti kaikki vasemman puolen termit, koska aritmetiikan peruslauseen nojalla jokainen positiivinen kokonaisluku $n \leqslant X$ on esitettävissä alkulukujen tulona ja nämä alkuluvut ovat $\leqslant X$. Lisäksi kaikki termit sekä vasemmalla että oikealla puolella ovat positiivisia.

Lisäksi pätee

$$\prod_{p \leqslant X} \left(1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \frac{1}{p^{3s}} + \dots\right) \leqslant \zeta(s),$$

koska jos tässä kerrotaan tulo auki, saadaan sarja, jossa kaikki termit ovat muotoa n^{-s}. Kukin näistä termeistä esiintyy vain kerran alkutekijöihinjaon yksikäsitteisyyden nojalla, ja toisaalta kukin esiintyy myös sarjassa $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \zeta(s)$.

Nyt siis pätee

$$\begin{aligned}\zeta(s) &= \lim_{X \longrightarrow \infty} \sum_{n \leqslant X} \frac{1}{n^s} \\ &\leqslant \lim_{X \longrightarrow \infty} \prod_{p \leqslant X} \left(1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \frac{1}{p^{3s}} + \dots\right) \leqslant \zeta(s),\end{aligned}$$

joten

$$\zeta(s) = \lim_{X \longrightarrow \infty} \prod_{p \leqslant X} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} = \prod_p \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}$$

geometrisen sarjan kaavan nojalla.

ζ-funktion lausekkeita

Todettakoon, että ζ-funktio on muutenkin läpeensä lukuteoreettinen otus. Esimerkiksi, kun $s \in]1, \infty[$, on

$$\zeta^2(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)}{n^s},$$

ja kun $s \in]2, \infty[$, on

$$\zeta(s)\,\zeta(s-1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma(n)}{n^s} \quad \text{ja} \quad \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s},$$

missä $d(n)$ on luvun n (positiivisten) tekijöiden lukumäärä, $\sigma(n)$ tekijöiden summa, ja $\varphi(n)$ on Eulerin φ-funktio. Samanlaisilla lausekkeilla voi esittää yllättävän monia muitakin lukuteoreettisia funktioita. Lisäksi nämä esitykset eivät ole pelkkiä kuriositeetteja, vaan esim. tekijäfunktion $d(n)$ tutkimuksessa yhteys lausekkeeseen $\zeta^2(s)$ on varsin hyödyllinen.

Sarjakehitelmä logaritmille

Pian demonstroimme, miten ζ-funktion ominaisuuksista voi johtaa alkulukujen äärettömyyden, mutta sitä ennen tarvitsemme seuraavan irrallisen tuntuisen mutta hyödyllisen potenssisarjakehitelmän.

Lause. *Kaikilla* $x \in\,]-1,1[$ *pätee*

$$\log \frac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

Tässä log *tarkoittaa luonnollista logaritmia, jota myös toisinaan merkitään* ln.

Todistus. Osoittautuu, että oikealla puolella oleva sarja on mielekäs ja hyvin määritelty ja sitä voi jopa derivoida termeittäin. Varmuuden vuoksi varoituksena todettakoon, että **tällaiset operaatiot äärettömillä sarjoilla ovat hyvin delikaatteja ja niiden kanssa on oltava hyvin varovainen**. Olemme tässä yksinkertaisuuden nimissä varsin huolimattomia. Kuitenkaan ei saa unohtaa sitä, että maailma on täynnä matematiikan suurten avoimien ongelmien ratkaisuita, jotka ovat täydellisiä lukuun ottamatta jotakin kohtaa, jossa huolettomasti derivoidaan jotakin termeittäin vaikkei saisi, tai lasketaan äärettömillä sarjoilla, joiden arvo ei olekaan äärellinen, tai muuta surullista.

Joka tapauksessa, derivoimalla oikeaa puolta termeittäin saadaan

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot n x^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.\end{aligned}$$

Vasemman puolen derivaataksi saadaan

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \log \frac{1}{1-x} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \log(1-x) = \frac{1}{1-x}.$$

Integraalilaskennan peruslause sanoo, että jos kahden funktion derivaatat ovat samat, niin kyseiset funktiot ovat vakiotermiä vaille samat. Siten on olemassa vakio $C \in \mathbb{R}$, jolle

$$\log \frac{1}{1-x} = C + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

kaikilla $x \in\,]-1,1[$. Kun $x = 0$, on vasen puoli $\log 1 = 0$, ja oikea puoli C. Siten $C = 0$, ja väite on todistettu termeittäin derivoimisen oikeuttamista vaille.

Alkulukuja on äärettömän monta

Nyt voimme todistaa ζ-funktion avulla Eulerin hengessä, että alkulukuja on äärettömän monta. Itse asiassa saamme jopa vahvemman tuloksen, nimittäin:

Lause. *Alkulukujen käänteislukujen sarja hajaantuu:*

$$\sum_p \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \ldots = \infty.$$

Erityisesti, alkulukuja on äärettömän paljon.

Tämä on vahvempi tulos kuin alkulukujen lukumäärän äärettömyys. Esimerkiksi lukuja $2, 2^2, 2^3, 2^4, \ldots$ on äärettömän monta, mutta kuitenkin niiden käänteislukujen sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$$

on äärellinen.

Huomautus. Kun myöhemmin kirjoitamme vaikkapa

$$f(x) = g(x) + O(h(x)),$$

niin tarkoitamme, että kaikilla relevanteilla muuttujan x arvoilla $f(x)$ ja $g(x)$ eroavat toisistaan enintään vakio kertaa lausekkeen $h(x)$ verran, eli tarkemmin:

$$|f(x) - g(x)| \leqslant C h(x),$$

missä C on jokin (yleensä tuntematon) positiivinen reaaliluku, joka ei riipu muuttujan x arvosta.

Erotamme todistuksen ytimen omaksi lemmakseen:

Lemma. Kun $s \in\,]1,2[$, pätee

$$\sum_p \frac{1}{p^s} = \log \frac{1}{s-1} + O(1). \tag{1}$$

Toisin sanoen, vasemman puolen sarja $\sum_p p^{-s}$ ja lauseke $\log(1/(s-1))$ eroavat toisistaan jokaisella $s \in\,]1,2[$ enintään jonkin vakion verran, ja kyseisen vakion voi valita niin, ettei se riipu muuttujan s arvosta.

Lauseen todistus. Koska

$$\log \frac{1}{s-1} \longrightarrow \infty, \quad \text{kun} \quad s \longrightarrow 1,$$

on lemman nojalla oltava

$$\sum_p \frac{1}{p^s} \longrightarrow \infty, \quad \text{kun} \quad s \longrightarrow 1.$$

Toisaalta, jos sarja $\sum_p p^{-1}$ olisi äärellinen, olisi

$$\sum_p \frac{1}{p^s} < \sum_p \frac{1}{p} < \infty,$$

mikä tuottaisi ristiriidan. Siispä todistettava lause seuraa lemmasta.

Lemman todistus. Hyvä, seuraavaksi on todistettava (1). Kun $s \in]1,2[$, logaritmien ottaminen puolittain Eulerin tulossa antaa

$$\begin{aligned}\log\zeta(s) &= \sum_p \log\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} = \sum_p\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{p^s}\right)^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sum_p\frac{1}{p^{sn}} = \sum_p\frac{1}{p^s}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}\sum_p\frac{1}{p^{sn}}.\end{aligned}$$

Jälkimmäistä termiä voi arvioida esimerkiksi seuraavasti:

$$\begin{aligned}0 &\leqslant \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}\sum_p\frac{1}{p^{sn}} \leqslant \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=2}^{\infty}\left(\frac{1}{m}\right)^{sn} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{m=2}^{\infty}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{m}\right)^{sn} = \frac{1}{2}\sum_{m=2}^{\infty}\frac{1}{m^{2s}}\frac{1}{1-\frac{1}{m^s}} \\ &\leqslant \frac{1}{2}\sum_{m=2}^{\infty}\frac{1}{m^{2s}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}} \leqslant \zeta(2s) \leqslant \zeta(2).\end{aligned}$$

Siispä, kun $s \in]1,2[$, pätee

$$\log\zeta(s) = \sum_p\frac{1}{p^s} + O(1). \tag{2}$$

Toisaalta, koska

$$\frac{1}{s-1} < \zeta(s) < 1 + \frac{1}{s-1} = \frac{s}{s-1},$$

on kaikilla $s \in]1,2[$

$$\log\frac{1}{s-1} < \log\zeta(s) < \log\frac{1}{s-1} + \log s,$$

ja kun $s \in]1,2[$, on varmasti $\log s = O(1)$, ja siis pätee myös

$$\log\zeta(s) = \log\frac{1}{s-1} + O(1). \tag{3}$$

Kaava (1) seuraa nyt kaavoista (2) ja (3).

Alkulukulause

Järjestetään alkuluvut kasvavaan jonoon

$$2,\quad 3,\quad 5,\quad 7,\quad 11,\quad 13,\quad \ldots,$$

ja merkitään

$$p_1 = 2,\quad p_2 = 3,\quad p_3 = 5,\quad p_4 = 7\quad \text{jne.}$$

Merkitään myös reaaliluvuilla x symbolilla $\pi(x)$ niiden alkulukujen p lukumäärää, joille $p \leqslant x$. Esim. $\pi(1) = 0$, $\pi(5{,}7) = 3$ ja $\pi(14) = 6$.

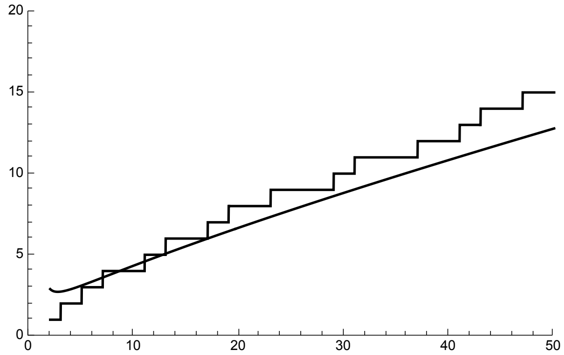
Eräs klassinen lukuteorian ongelma on ymmärtää alkulukujen *jakaumaa.* Eräs matematiikan kruununjalokivistä on tulos nimeltä *alkulukulause*, jonka ensimmäisena todistivat toisistaan riippumattomasti Hadamard ja de la Vallée Poussin 1896:

Alkulukulause. *Alkulukujen lukumäärälle pätee*

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}, \quad \textit{kun} \quad x \longrightarrow \infty,$$

eli

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{\pi(x)}{x/\log x} = 1.$$



Kuva 2. *Lausekkeiden $\pi(x)$ ja $x/\log x$ kuvaajat, kun $x \in [2,50]$.*

Monista syistä johtuen suureen $\pi(x)$ arviointi on mielekkäämpää kuin n. alkuluvun p_n arviointi. Kuitenkin, tässä suuripiirteisimmässä muodossaan alkulukulauseen voi muotoilla yksinkertaisemminkin:

Alkulukulause, vaihtoehtoinen muotoilu. *Pätee*

$$p_n \sim n\log n, \quad \textit{kun} \quad n \longrightarrow \infty,$$

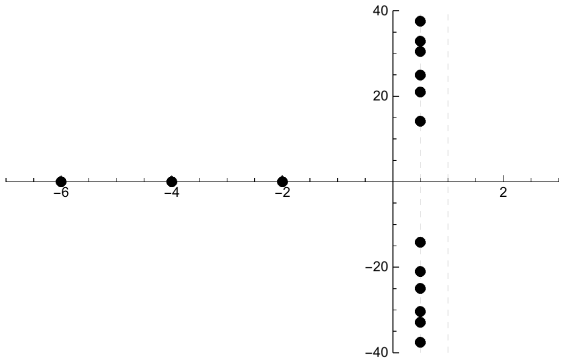
eli

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{p_n}{n\log n} = 1.$$

Tämä tarkoittaa sitä, että p_n on suurin piirtein $n\log n$, ja suhteellinen virhe menee nollaan (vaikka absoluuttinen virhe ei mene), kun n kasvaa. Esimerkiksi, riittävän isoilla (itse asiassa *todella* isoilla) luvun n arvoilla lauseke $n\log n$ antaa alkuluvun p_n miljoona ensimmäistä numeroa (vasemmalta lukien) oikein. Vieläkin isompiin luvun n arvoihin rajoittumalla $n\log n$ antaa alkuluvun p_n miljardi ensimmäistä numeroa oikein, ja niin pois päin.

Syvemmälle teoriaan

Jotta Riemannin ζ-funktion yhteyden alkulukuihin voisi ymmärtää paremmin, on sen määrittelyaluetta jatkettava reaalilukuvälin $]1,\infty[$ ulkopuolelle. Riemann oivalsi ensimmäisenä, että lausekkeen $\zeta(s)$ voi määritellä yksikäsitteisellä mielekkäällä tavalla kaikille kompleksiluvuille $s \neq 1$, ja että tällä jatkolla on monia jännittäviä ominaisuuksia. Erityisesti, sillä on kompleksisia nollakohtia, joilla on varsin läheinen yhteys alkulukujen jakautumiseen. Nämä ajatukset esiintyivät ensimmäisen kerran Riemannin ainoassa lukuteoreettisessa artikkelissa [13] vuonna 1859.



Kuva 3. *Riemannin ζ-funktion nollakohdat. Pisteistä $-2, -4, -6, \ldots$ löytyy nollakohdat, joita kutsutaan triviaaleiksi nollakohdiksi. Loput nollakohdat sijaitsevat pystysuoralla kriittisellä nauhalla $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$.*

Yksinkertaisin esimerkki yhteydestä on seuraava: alkulukulause muodossa

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$$

on ekvivalentti sen kanssa, että

$$\zeta(1+it) \neq 0$$

kaikilla reaaliluvuilla $t \neq 0$. (Kun s on kompleksiluku, on arkea tapana piristää kirjoittamalla $s = \sigma + it$.) Toisin sanoen, alkulukulause eräässä mielessä tarkoittaa sitä, että ζ-funktiolla ei ole nollakohtia kompleksitason suoralla $\sigma = 1$. Ja itse asiassa kaikkein helpoimmat todistukset alkulukulauseelle perustuvatkin juuri tähän seikkaan.

Yhteys nollakohtien ja alkulukujen välillä osoittautuu paljon monisyisemmäksi. On nimittäin mahdollista johtaa eksplisiittisiksi kaavoiksi kutsuttuja identiteettejä, joista toinen puoli koskee pelkästään alkulukuja, ja toinen puoli ainoastaan ζ-funktion nollakohtia. Näiden kaavojen eräs seuraus on, että mitä kauemmas vasemmalle suorasta $\sigma = 1$ nollakohtavapaata aluetta voi laajentaa, sitä tarkemmin alkulukujen käytös tunnetaan.

Nykyisin oleellisesti ottaen paras tulos tähän suuntaan on Vinogradovin ja Korobovin jo yli puoli vuosisataa vanha arvio: $\zeta(s) \neq 0$, kun t on riittävän iso ja

$$\sigma \geqslant 1 - c(\log t)^{-2/3}(\log\log t)^{-1/3},$$

missä c on jokin pieni positiivinen reaalivakio. Vastaava paras arvio alkulukujen jakaumalle on

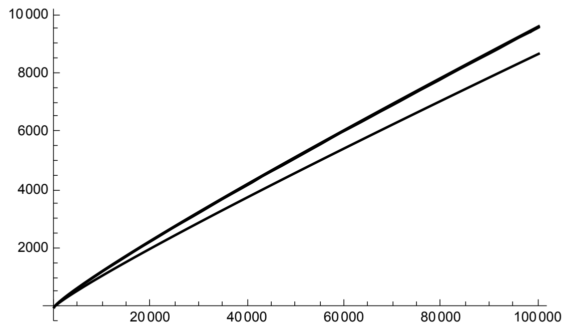
$$\pi(x) = \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\log t} + O(x\, e^{-d(\log x)^{3/5}(\log\log x)^{-1/5}})$$

jollakin positiivisella reaalivakiolla d.

Tässä kohtaa on syytä huomauttaa, että oikealla puolella esiintyvä integraali on tarkempi arvio lausekkeelle $\pi(x)$ kuin $x/\log x$. Aiemmissa alkulukulauseen muotoiluissamme asialla ei ollut suurta merkitystä, koska

$$\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\log t} \sim \frac{x}{\log x}, \quad \text{kun } x \longrightarrow \infty,$$

joten yksinkertaisempi lauseke on tavanomaisempi. Osoittautuu kuitenkin, että erotus $\pi(x) - x/\log x$ on suuruusluokkaa $x/\log^2 x$, ja $\int_2^x \mathrm{d}t/\log t$ on silmin nähden lähempänä arvoa $\pi(x)$. Seuraava kuva valaissee asiaa:



Kuva 4. *Ylemmässä kuvaajassa on sekä lausekkeiden $\pi(x)$ että $\int_2^x \mathrm{d}x/\log x$ kuvaajat, alemmassa lausekkeen $x/\log x$ kuvaaja.*

Eräs yksinkertaisempi yhteys nollakohtien ja alkulukujen jakauman välillä on seuraava: Olkoon $\beta \in \,]0,1[$. On mahdollista todistaa, että $\zeta(s) \neq 0$, kun $\sigma > \beta$, jos ja vain jos

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\log t} + O(x^\gamma)$$

kaikilla $\gamma > \beta$. Koska ζ-funktiolla varmasti on nollakohtia suoralla $\sigma = 1/2$, on pienin mahdollinen β siis $1/2$, jolloin saataisiin oleellisesti ottaen paras mahdollinen arvio alkulukujen jakaumalle.

Riemannin hypoteesi. Kaikki ei-reaaliset Riemannin ζ-funktion nollakohdat sijaitsevat kriittisellä suoralla $\sigma = 1/2$.

Riemannin hypoteesi, vaihtoehtoinen muotoilu. Jokaisella $\gamma > 1/2$ pätee

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\log t} + O(x^\gamma), \quad \text{kun } x \longrightarrow \infty.$$

Millaisia asioita nollakohdista tiedetään?

Nyt kun ζ-funktion nollakohtien ja alkulukujen välinen yhteys on esitelty, on luonnollista seuraavaksi tutustua tarkemmin joihinkin nollakohdista jo tiedettyihin asioihin, erityisesti siihen, millaisia tuloksia Riemannin hypoteesin suuntaan tiedetään.

Luonnollinen ensimmäinen askel olisi laskea joitakin nollakohtia ja katsoa, ovatko ne tosiaan kriittisellä suoralla. Riemann itse kehitti riittävästi teoriaa voidakseen tarkistaa, että muutamalle pienimmälle kompleksiselle nollakohdalle näin tosiaan on. Näitä laskuja on tietenkin parannettu merkittävästi, ja nykyisin tiedetään jo mm., että ensimmäiset 10^{13} kompleksista nollakohtaa ovat kriittisellä suoralla Gourdonin ja Demichelin tietekonelaskujen nojalla.

Nollakohdista voi myös todistaa monia eri asioita. On järkevää laskea nollakohtia $\rho = \beta + i\gamma$, missä imaginaariosa γ kuuluu välille $]0, T[$ ja siis $\beta \in]0,1[$, ja tutkia, mitä tapahtuu, kun T kasvaa. Näiden nollakohtien lukumäärää merkitään $N(T)$. Riemannin ja von Mangoldtin perustavanlaatuinen tulos aiheesta sanoo, että

$$N(T) = \frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + O(\log T), \quad \text{kun } T \longrightarrow \infty.$$

Tästä seuraa, että jos kompleksitason ylemmän puolitason nollakohdat asettaa järjestykseen kasvavan imaginaariosan mukaan, niin n. nollakohdan imaginaariosa on $\sim \pi n/\log n$, kun $n \longrightarrow \infty$.

Eräs ensimmäisistä tuloksista nollakohdista nimenomaan kriittisellä suoralla oli Hardyn tulos vuodelta 1914, joka sanoo, että kriittisellä suoralla on äärettömän monta nollakohtaa. Itse asiassa löytyy vähintään cT nollakohtaa $1/2 + \gamma i$, joille $0 < \gamma < T$, missä c on pieni positiivinen reaalilukuvakio.

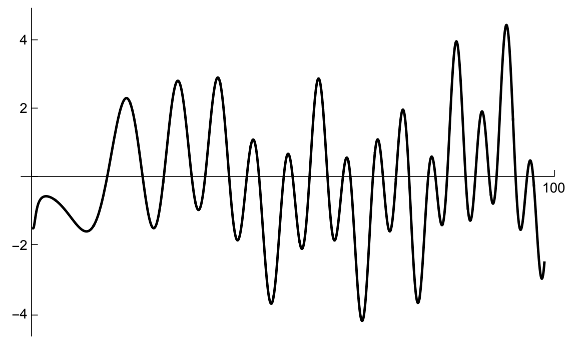
Seuraava suuri edistysaskel oli Selbergin tulos vuodelta 1942, jonka mukaan kriittisellä suoralla näitä nollakohtia on vähintään $cT\log T$ kappaletta, jälleen jollakin positiivisella reaalilukuvakiolla c. Useimmiten tämä tulos muotoillaan niin, että "positiivinen osuus kriittisen nauhan nollakohdista on kriittisellä suoralla".

Luonnollisesti olisi mielenkiintoista tietää, kuinka suureksi tämän positiivisen osuuden voi osoittaa. Levinson sai 1974 ensimmäisen konkreettisen lukuarvon vakiolle c: enemmän kuin kolmasosa kriittisen nauhan nollakohdista on kriittisellä suoralla. Conrey paransi tätä 1989 yli kahteen viidesosaan.

Toisenlainen lähestymistapa on laskea niiden nollakohtien lukumäärää, joiden reaaliosa β ei ole välttämättä tasan $1/2$, mutta jollakin tietyllä välillä $[1/2-\delta, 1/2+\delta]$. Bohrin ja Landaun lause vuodelta 1914 sanoo, että millä tahansa δ, muiden nollakohtien osuus kaikista nollakohdista lähestyy nollaa, kun $T \longrightarrow \infty$.

ζ-funktion arviointia

Tarkastelkaamme lopuksi erästä mielenkiintoista ja tärkeää ongelmaa, joka tarjoaa toisenlaisen yhteyden ζ-funktion ja alkulukujen välille, ja ohimennen myös kertoo jotakin Riemannin hypoteesin vaikeudesta.



Kuva 5. *Hardyn Z-funktion $Z(t)$ kuvaaja, kun $t \in [0, 98]$. Oleellista on, että $|Z(t)| = |\zeta(1/2+it)|$, ja siis että Z-funktion koko ja nollakohdat vastaavat ζ-funktion kokoa ja nollakohtia kriittisellä suoralla.*

Kysymys koskee sitä, kuinka isoja arvoja ζ-funktio voi saada kriittisellä suoralla. Ensimmäinen tulos tähän suuntaan on, että

$$\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right| = O(t^{1/4}),$$

kun $t \longrightarrow \infty$, ja seuraava kysymys luonnollisesti kuuluu, kuinka paljon tätä arviota voi parantaa?

Tämän ylärajan parantamisella on seuraava mielenkiintoinen yhteys alkulukuihin: Hoheiselin ja Inghamin ansiosta tiedetään, että jos

$$\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right| = O(t^{\vartheta+\varepsilon})$$

miten pienelle $\varepsilon > 0$ tahansa, niin silloin peräkkäisten alkulukujen välisille erotuksille pätee

$$p_{n+1} - p_n = O(p_n^{\beta+\varepsilon})$$

miten pienelle $\varepsilon > 0$ tahansa, missä $\beta = \frac{1+4\vartheta}{2+4\vartheta}$.

Esimerkiksi, 1921 Hardy ja Littlewood todistivat, että eksponentti $\vartheta = 1/6$ on kelvollinen. Tällöin vastaava eksponentti β tulee olemaan $5/8$. Erityisesti siis $p_{n+1} - p_n = O(p_n^{5/8+\varepsilon})$, mistä seuraa vaikkapa, että riittävän isoilla kuutioilla kahden peräkkäisen kuutioluvun välissä on aina alkuluku.

Ongelmalla on myös tärkeä yhteys Riemannin hypoteesiin. Lindelöfin hypoteesi sanoo, että yllä voi valita $\vartheta = 0$. Osoittautuu, että Riemannin hypoteesista seuraa Lindelöfin hypoteesi. Toisaalta, kukaan ei ole osannut johtaa Riemannin hypoteesiä Lindelöfin hypoteesista, eli tietyssä mielessä kysymys Lindelöfin hypoteesin paikkansa pitävyydestä vaikuttaa helpommalta ongelmalta kuin Riemannin hypoteesin.

Lindelöfin hypoteesi on kuitenkin siitä hauskempi, että eksponentti ϑ sallii kvantifioida sen parissa saavutetun edistyksen. Ensimmäinen arvio on noin vuosisadan ikäinen $\vartheta = 1/4$, joka seuraa tietystä ζ-funktion perusominaisuudesta ja yleisistä kompleksimuuttujan funktioiden ominaisuuksista. Ensimmäinen vaikeampi arvio oli jo yllä mainittu eksponentti $\vartheta = 1/6$ vuodelta 1921.

Eksponenttia ϑ on sittemmin pienennetty varsin ahkerasti. Eräs luettelo erinäisistä tuloksista on seuraava:

ϑ	Kenen ja milloin?
163/988	Walfisz, 1924
27/164	Titchmarsh, 1931
229/1392	Phillips, 1933
19/116	Titchmarsh, 1942
15/92	Min, 1949
6/37	Haneke, 1962–3
173/1067	Kolesnik, 1973
35/216	Kolesnik, 1982
139/858	Kolesnik, 1985
9/56	Bombieri & Iwaniec, 1986
89/560	Watt, 1989
17/108	Huxley & Kolesnik, 1991
89/570	Huxley, 1993
32/205	Huxley, 2005
53/342	Bourgain, 2014

Taulukko. *Eksponentin ϑ parannuksia vuosien varrelta. Riemannin hypoteesista seuraisi, että $\vartheta = 0$ kävisi.*

On mielenkiintoista, että eksponentista 1/6 on melkein vuosisadan aikana onnistuttu vähentämään vain reilu sadasosa, eli reilut 7 %. On hyvä huomata myös, että suurin osa yllä mainituista parannuksista perustuu uusiin ideoihin ja oivalluksiin; pelkällä raa'alla työllä eksponentin arvoa ei voi parantaa. Jos Riemannin hypoteesi sattuu pitämään paikkansa, niin tämä epäilemättä kertoo jotakin siitä, kuinka vaikeaa sen todistaminen saattaa lopulta olla...

Lopuksi

Lopuksi todettakoon, että ζ-funktio on vain yksi esimerkki niin sanotuista L-funktioista; lukuteoriassa on lukemattomia muita saman henkisiä toinen toistaan monimutkaisempia otuksia, kuten Dirichlet'n L-funktiot, elliptisten käyrien L-funktiot, lukukuntien Dedekindin ζ-funktiot ja Hecken L-funktiot, holomorfisten kärkimuotojen L-funktiot, Maassin muotojen L-funktiot, yleisemmät automorfiset L-funktiot...

Kirjallisuus ja lähteet

Useimmat yllä mainitut tulokset ja historialliset detaljit löytyvät aiheen perusteoksista, kuten [2, 4, 7, 8, 9, 12, 14], sekä (muutamassa tapauksessa) seuraamalla niistä löytyviä viitteitä tutkimusartikkeleiden viidakkoon. Riemannin kuuluisa artikkeli [13] löytyy (englanniksi käännettynä) vaikkapa teoksista [2, 4]. Yllä mainittujen teosten lisäksi myös pieni artikkeli [15] ansaitsee tulla mainituksi. Varoituksena todettakoon, että näillä lähteillä on taipumus olettaa lukijalta yliopistollisia esitietoja.

Riemannin ζ-funktiosta ja sitä sivuavista aiheista on toki olemassa populaarikirjallisuuttakin, kuten suomeksikin käännetty [3], josta on myös olemassa kirja-arvostelu [11].

Yllä ohimennen mainitut otukset $d(n)$ ja $\sigma(n)$ ovat kiehtovia tutkimuskohteita, joihin voi tutustua tarkemmin vaikkapa artikkeleista [5, 6].

Lopuksi, toivottavasti yllä kuvatut ilmiöt vakuuttavat kompleksilukuja tuntemattoman lukijan niiden tärkeydestä. Perustietoa kompleksiluvuista löytää esim. artikkelista [10].

Viitteet

[1] Auberg, K. E., E. Bombieri, ja D. Goldfeld: *Number Theory, Trace Formulas and Discrete Groups. Symposium in Honor of Atle Selberg. Oslo, Norway, July 14–21, 1987*, Academic Press, 1989.

[2] Borwein, P., S. Choi, B. Rooney ja A. Weirathmueller: *The Riemann Hypothesis: A Resource for the Afficionado and Virtuoso Alike*, CMS Books in Mathematics, 27, Springer, 2008.

[3] Derbyshire, J.: *Alkulukujen lumoissa*, Terra Cognita, 2006.

[4] Edwards, H. M.: *Riemann's Zeta Function*, Dover Publications, 2001.

[5] Ernvall-Hytönen, A.-M.: *Tekijäfunktio ja muita lukuteoreettisia otuksia*, Solmu, 2/2010, 24–26.

[6] Ernvall-Hytönen, A.-M.: *Täydellisyyttä etsimässä*, Solmu, 1/2011, 6–8.

[7] Ivić, A.: *The Riemann Zeta-Function*, Dover Publications, 2003.

[8] Ivić, A.: *The Theory of Hardy's Z-Function*, Cambridge Tracts in Mathematics, 196, Cambridge University Press, 2013.

[9] Karatsuba, A. A. ja S. M. Voronin: *The Riemann Zeta-Function*, de Gruyter Expositions in Mathematics, 5, Walter de Gruyter & Co., 1992.

[10] Lehtinen, M.: *Kaikki tarpeellinen kompleksiluvuista*, Solmu, 1/2006, 17–22.

[11] Lehtinen, M.: *Riemannin hypoteesi ymmärrettäväksi*, Solmu, 1/2007, 30–31.

[12] Narkiewicz, W.: *The Development of Prime Number Theory*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, 2000.

[13] Riemann, B.: *Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebener Größe*, Monatsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften, Berliini, marraskuu 1859, 671–680.

[14] Titchmarsh, E. C.: *The Theory of the Riemann Zeta-function*, Oxford University Press, 1986.

[15] Weil, A.: *Prehistory of the zeta-function*, teoksessa [1], 1–9.