Järkeä pinta-ala- ja tilavuusyksiköiden käsittelyyn

Vesa Linja-aho [1]

Yksi ammattikorkeakouluopiskelijoille säännöllisesti päänvaivaa aiheuttava aihe ovat pinta-alojen ja tilavuuksien käsittely fysiikassa. Sähkötekniikan peruskurssilla tämä nousee esille tasapaksun johtimen resistanssia laskettaessa. Tasapaksun johtimen resistanssi R on suoraan verrannollinen johdinmateriaalin resistiivisyyteen ρ ja pituuteen l ja kääntäen verrannollinen johtimen poikkipinta-alaan A eli

$$R = \rho \frac{l}{A}.$$

Jos johtimen poikkipinta-ala ilmoitettaisiin neliömetreinä, pituus metreinä ja resistiivisyys ohmimetreinä, mitään ongelmia tuskin laskimenkäyttötaitoiselle opiskelijalle tulee. Käytännön johtimet ovat kuitenkin poikkipinta-alaltaan neliömillimetrejä, resistanssit nano-ohmimetrejä ja pituudet metrejä.

Pinta-alayksiköiden käsittely hukassa tai altis virheille

Ensimmäisen vuoden ammattikorkeakouluopiskelijat osaavat etuliitteiden käsittelyn, mutta pinta-alayksikön käsittely tuottaa vaikeuksia varovasti arvioiden yli puolelle opiskelijoistani. Tyypillinen virheellinen ratkaisutapa on näppäillä lukuarvot suoraan laskimeen tai yrittää muuntaa päässä neliömillimetrit neliömetreiksi ja seota omaan näppäryyteen.

Jälkimmäinen tapa on se, miten asia peruskoulun oppimateriaaleissa opetetaan: millimetri, senttimetri, desimetri, metri. Ja jos muunnetaan pinta-aloja, niin pilkkua siirretään kaksi askelta litaniaa luetellessa, ja jos muunnetaan tilavuuksia, niin pilkkua siirretään kolme askelta.

Lukion oppikirjasarjoissa muunnostekniikkaa ei käsitellä, koska se oletetaan osattavaksi peruskoulusta. Poikkeuksena on seuraava esitystapa, joka löytyy lukion Vapaa matikka 1 -kirjasta.

Eksponentti koskee myös etuliitettä

Muunnoksen nimittäin voi tehdä – ja opettaa – helpomminkin. Kaikki alkaa seuraavasta oivalluksesta: esimerkiksi merkintä

$$\mathrm{mm}^2$$

tarkoittaa itse asiassa

$$(\mathrm{mm})^2$$

eli pinta-ala- tai tilavuuseksponentin vaikutus ulottuu myös etuliitteeseen, vaikka merkintätapa ei näin annakaan ymmärtää.

[1] Kirjoittaja on sähkötekniikan diplomi-insinööri, matematiikan ja tietotekniikan aineenopettaja ja työskentelee autoelektroniikan lehtorina Metropolia-ammattikorkeakoulussa.

Nyt vaikkapa kymmenen metrin pituisen ja neliömillimetrin vahvuisen kuparijohtimen ($\rho = 16{,}78\,\mathrm{n\Omega m}$) resistanssilasku menee kertanäppäilyllä oikein tai oikeastaan ihan päässälaskuna:

$$\begin{aligned}
R = \rho\frac{l}{A} &= 16{,}78\,\mathrm{n\Omega m}\frac{10\,\mathrm{m}}{1\,\mathrm{mm}^2}\\
&= 16{,}78\,\mathrm{n\Omega m}\frac{10\,\mathrm{m}}{1\cdot(\mathrm{mm})^2}\\
&= 16{,}78\cdot 10^{-9}\Omega\mathrm{m}\frac{10\,\mathrm{m}}{1\cdot(10^{-3}\mathrm{m})^2}\\
&= 16{,}78\cdot 10^{-9}\Omega\mathrm{m}\frac{10\,\mathrm{m}}{1\cdot 10^{-6}\mathrm{m}^2} = 16{,}78\frac{10^{-8}}{10^{-6}}\Omega\\
&= 16{,}78\cdot 10^{-2}\,\Omega = 0{,}1678\,\Omega.
\end{aligned}$$

Toinen tai kolmas potenssi koskee siis paitsi yksikköä myös sen etuliitettä, vaikka sulkuja ei merkitäkään näkyviin. Tämä on tietenkin matemaatikolle itsestään selvää, mutta

- en ole nähnyt yhtään perusasteen oppimateriaalia, jossa asia selitettäisiin tätä kautta,
- tapa on ainakin amk-opiskelijoille opetettavissa viidessä minuutissa,
- jopa matemaattisesti heikoimpien opiskelijoiden pinta-alayksikkömuunnosvirheet ovat käytännössä kadonneet laskuharjoituksista tämän ajattelutavan selittämisen jälkeen,
- opiskelijoiden reaktio on lähes joka ryhmässä ollut *tämähän on kätevää, miksi tätä ei ole opetettu aikaisemmin*,
- en näe mitään estettä, etteikö lähestymistapaa voisi soveltaa jo yläkoulussa,

joten toivoisin käsittelytavan yleistyvän matematiikan perusopetuksessa ja käsiteltävän matematiikanopettajakoulutuksessa. Siis:

$$\mathrm{mm}^2 = (\mathrm{mm})^2 = \mathrm{m}^2\mathrm{m}^2 = (10^{-3})^2\mathrm{m}^2 = 10^{-6}\mathrm{m}^2.$$

Jos viilataan oikein pilkkua...

Sivuhuomiona todettakoon, että juurikin millimetrin merkintätapa on toki epäjohdonmukainen muutenkin: sama symboli m tarkoittaa sekä milliä että metriä ja periaatteessa joku voisi tulkita:

$$\mathrm{mm} = \mathrm{m}\cdot\mathrm{m} = \mathrm{m}^2$$

En ole kuitenkaan koskaan törmännyt tällaiseen väärinkäsitykseen, eli annetaan sen olla.

Kiitokset

Kiitokset lääketieteen ylioppilas Joonas Mäkiselle, joka esitteli allekirjoittaneelle artikkelissa mainitun lähestymistavan syksyllä 2012.

Mainetta ja kunniaa tarjolla: opettajamaaottelu matematiikassa

Tukholman yliopisto on jo useana vuotena järjestänyt Kappa-nimisen matematiikkakilpailun Ruotsin peruskoulujen ja lukioiden matemaattisten aineiden opettajille. Osallistuja on voinut olla yksittäinen opettaja tai saman koulun enintään neljän opettajan joukkue. Joukkueen voivat muodostaa myös saman paikkakunnan eri kouluissa opettavat.

Nyt kilpailuun halutaan mukaan myös suomalaiset.

Tehtävien ratkaisut palautetaan sähköpostilla. Ensimmäisen kierroksen tehtävän viimeinen palautusajankohta on 13.10.2014.

Tehtävät ja lisää tietoa osoitteessa:

`http://solmu.math.helsinki.fi/olympia/kappa.html`