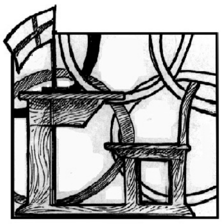

Euroopan tyttöjen matematiikkaolympialaiset Antalyassa, Turkissa, 10.–16.4.2014

Anne-Maria Ernvall-Hytönen
Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

Mirjam Kauppila
Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

Esa V. Vesalainen
Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

Euroopan tyttöjen matematiikkakilpailu järjestettiin kolmannen kerran. Tällä kertaa kilpailun isännöi Turkki. Kilpailu oli Antalyassa viiden tähden hotellissa meren rannalla. Järjestelyt toimivat hyvin sujuvasti, ja kilpailun eteen oli selvästi nähty hyvin paljon vaivaa.

Euroopan tyttöjen matematiikkakilpailun tarkoitus on kannustaa tyttöjä kilpailemaan matematiikassa, sillä kansainvälisissä matematiikkaolympialaisissa vain noin kymmenesosa kilpailijoista on tyttöjä.

Kilpailussa oli tänä vuonna kolme tehtävää kahtena päivänä. Molempina päivinä aikaa oli neljä ja puoli tuntia, ja jokaisesta tehtävästä oli mahdollista saada seitsemän pistettä. Tasoltaan tehtävät olivat hyvin lähellä kansainvälisten matematiikkaolympialaisten tehtäviä. Tänä vuonna tehtävät olivat poikkeuksellisen hankalia, mikä näkyi selkeästi pistemäärissä.

Kilpailuun osallistui peräti 110 kilpailijaa 29 eri maasta. Kilpailun voitti Sofiya Dubova Ukrainasta, toiseksi tuli Yhdysvaltain Danielle Wang, joka myös voitti kilpailun viime vuonna ja ylsi jaetulle ensimmäiselle sijalle toissa vuonna, ja kolmanneksi sijoittui Andela Sarkovic Serbiasta kuten viime vuonnakin.

Suomea kilpailussa edustivat

- Minna Hirvonen Helsingin matematiikkalukiosta,
- Mirjam Kauppila Päivölän kansanopiston matematiikkalinjalta,
- Ella Tamir Helsingin matematiikkalukiosta, ja
- Tara Vaittinen Lahden yhteiskoulusta.

Mirjam Kauppila saavutti kirkkaan pronssimitalin 12 pisteen tuloksella, kun mitaliraja oli 7 pistettä.

Joukkue valittiin Suomen matematiikan olympiavalmennuksen piiristä, ja kilpailuun osallistumisen mahdollisti Teknologiateollisuuden 100-vuotissäätiön tuki. Joukkueen johtajana toimi FT Anne-Maria Ernvall-Hytönen ja varajohtajana FL Esa Vesalainen.

Joukkueen jäsen Mirjam Kauppila kuvasi EGMO:a näin:

Mirjam Kauppilan kokemukset kilpailusta

Sain kunnian olla edustamassa Suomea vuoden 2014 EGMO:ssa Turkissa. Joukkueessa oli minun lisäkseni Ella, Tara ja Minna. En tuntenut heitä kovin hyvin ennen kilpailua, mutta viikon aikana tutustuimme ja yhteishenki oli hyvä.

Kilpailu meni hyvin. Ensimmäisen päivän tehtävät olivat hankalia, kahdesta ensimmäisestä tehtävästä en saanut yhtään pistettä, vaikka niiden kuuluisi olla suhteellisen helppoja. Kolmannesta tehtävästä sain jopa pisteen, sillä olin kirjoittanut siihen 2^{13^v-1}. Se oli osa ”jumalaista visiotani”, joka osoittautui täysin päättömäksi, kun ajattelin läpi toisen kerran. Kuitenkin 2^{p-1} oli tärkeä ratkaisun kannalta ja raapustukseni oli tarpeeksi lähellä sitä. Toinen päivä meni paremmin. Viidennen tehtävän sain ratkaistua ja neljännessä tehtävässä pääsin vauhtiin, mutta aika loppui kesken. Yhteensä sain 12 pistettä ja sijoitukseni oli 34. Pronssimitalin raja oli tänä vuonna 7 pistettä, joten mitalikin tuli matkamuistoksi.

EGMO:on osallistui tänä vuonna 29 maata ja oli täten oiva tilaisuus tutustua uusiin ihmisiin ja eri kulttuureihin. Olin vähän harmissani siitä, ettei Ruotsi lähettänyt edustajia kilpailemaan, olisi ollut hauska hämmentää heitä puhumalla heille ruotsia (äidinkieleni on ruotsi). Saunassa kuitenkin pääsin vähän juttelemaan norjalaisten kanssa. Sauna oli suomalainen sauna muuten, mutta yhdessä seinässä oli suuri ikkuna ulos. Selitin saunassa istujille, että Suomessa yleensä saunotaan alasti ja naiset ja miehet saunovat erikseen, varsinkin julkisilla paikoilla. Eniten ihmiset kummastelivat hankeen hyppimistä talvella.

Vapaa-aikaa oli paljon. Suurimman osan siitä vietin uima-altaan ääressä ottamassa aurinkoa. Ulkona oli noin kaksikymmentä astetta lämmintä, eli juuri sopivasti. Illalla oli viileämpi, joten pitkähihainenkin tuli käyttöön, olihan vasta huhtikuu. Kilpailupäivien jälkeen olimme ekskursiolla katsomassa vesiputousta. Se oli vaikuttava.

EGMO on hieno kokemus. Vaikka kilpailu ei menisi ihan nappiin, matka ja ihmiset monista maista kyllä kompensoivat sen.

Tehtävät

Tehtävä 1. Määritä kaikki sellaiset reaaliset vakiot t, että aina jos a, b ja c ovat kolmion sivujen pituudet, niin myös $a^2 + bct$, $b^2 + cat$ ja $c^2 + abt$ ovat.

Tehtävä 2. Olkoot D ja E kolmion ABC sivujen AB ja AC sisäpisteitä tässä järjestyksessä niin, että $DB = BC = CE$. Suorat CD ja BE leikkaavat pisteessä F. Osoita, että kolmion ABC sisäänpiirretyn ympyrän keskipiste I, kolmion DEF ortokeskus H ja kolmion ABC ympäripiirretyn ympyrän kaaren BAC keskipiste M ovat samalla suoralla.

[Kolmion ortokeskuksella tarkoitetaan sen korkeusjanojen leikkauspistettä.]

Tehtävä 3. Olkoon $d(m)$ positiivisen kokonaisluvun m positiivisten tekijöiden lukumäärä ja olkoon $\omega(m)$ luvun m erisuurten alkutekijöiden lukumäärä. Olkoon k positiivinen kokonaisluku. Osoita, että on olemassa äärettömän monta positiivista kokonaislukua n, joilla $\omega(n) = k$ ja luku $d(n)$ ei jaa lukua $d(a^2 + b^2)$ millään positiivisilla kokonaisluvuilla a ja b, jotka toteuttavat ehdon $a + b = n$.

Tehtävä 4. Määritä kaikki kokonaisluvut $n \geq 2$, joilla on olemassa kokonaisluvut $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, jotka toteuttavat ehdon, että jos $0 < i < n$, $0 < j < n$, $i \neq j$ ja luku n jakaa luvun $2i + j$, niin $x_i < x_j$.

Tehtävä 5. Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Meillä on n laatikkoa, joista jokaisessa on epänegatiivinen määrä helmiä. Jokaisella siirrolla saamme ottaa valitsemastamme laatikosta kaksi helmeä, heittää pois toisen helmistä ja laittaa toisen helmen toiseen valitsemaamme laatikkoon. Helmien alkuperäistä asettelua kutsutaan *ratkeavaksi*, jos on mahdollista saavuttaa äärellisellä (mahdollisesti nollalla) siirrolla tilanne, jossa ei ole tyhjää laatikkoa. Määritä kaikki sellaiset alkuperäiset helmien asettelut, jotka eivät ole ratkeavia, mutta jotka muuttuvat ratkeaviksi, kun yksi helmi lisätään johonkin laatikkoon riippumatta siitä, mihin laatikkoon helmi lisätään.

Tehtävä 6. Määritä kaikki funktiot $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jotka toteuttavat ehdon

$$f\big(y^2 + 2xf(y) + f(x)^2\big) = (y + f(x))(x + f(y))$$

kaikilla reaaliluvuilla x ja y.

Ratkaisut

Tehtävä 1. Tässä tehtävässä avainasemassa ovat ns. kolmioepäyhtälöt: luvut $a, b, c \in \mathbb{R}_+$ ovat kolmion sivujen pituudet täsmälleen silloin, kun

$$a + b > c, \quad b + c > a \quad \text{ja} \quad c + a > b.$$

Osoittautuu, että vakion t arvoiksi kelpaavat täsmälleen välin $[2/3, 2]$ luvut.

Osoitetaan ensin, että mikään arvo $t \in\ ]-\infty, 2/3[$ ei käy tarkastelemalla hyvin litteää tasakylkistä kolmiota, esimerkiksi kolmiota, jonka sivujen pituudet ovat

$a = 2 - \varepsilon$ ja $b = c = 1$, missä $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ on hyvin pieni. Tällöin

$$\begin{aligned}&\left(b^2 + cat\right) + \left(c^2 + abt\right) - \left(a^2 + bct\right)\\&\quad= 1 + (2-\varepsilon)\,t + 1 + (2-\varepsilon)\,t - 4 + 4\varepsilon - \varepsilon^2 - t\\&\quad= 3t - 2 + (4-2t)\,\varepsilon - \varepsilon^2.\end{aligned}$$

Kun $\varepsilon \to 0$, lauseke lähestyy arvoa $3t - 2 < 0$, eli riittävän pienellä ε kolmioepäyhtälöt eivät päde luvuille $a^2 + bct$, $b^2 + cat$ ja $c^2 + abt$, eivätkä ne silloin voi olla kolmion sivujen pituudet.

Osoitetaan seuraavaksi, etteivät arvot $t \in\,]2, \infty[$ käy tarkastelemalla hyvin kapeaa tasakylkistä kolmiota, esimerkiksi kolmiota, jonka sivujen pituudet ovat $a = \varepsilon$ ja $b = c = 1$, missä $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ on jälleen hyvin pieni. Nyt voidaan laskea jälleen

$$\begin{aligned}&\left(b^2 + cat\right) + \left(c^2 + abt\right) - \left(a^2 + bct\right)\\&\quad= 1 + \varepsilon t + 1 + \varepsilon t - \varepsilon^2 - t\\&\quad= 2 - t + 2t\varepsilon - \varepsilon^2.\end{aligned}$$

Kun $\varepsilon \to 0$, lauseke lähestyy negatiivista arvoa $2-t$, ja jälleen riittävän pienillä ε kolmioepäyhtälöt eivät päde luvuille $a^2 + bct$, $b^2 + cat$ ja $c^2 + abt$, eivätkä ne silloin voi olla kolmion sivujen pituudet.

Tarkastellaan seuraavaksi tapausta $t \in [1, 2]$. Tässä tapauksessa, koska $b + c > a$, on

$$\begin{aligned}&\left(b^2 + cat\right) + \left(c^2 + abt\right) - \left(a^2 + bct\right)\\&\quad\geqslant \left(b^2 + c^2 - 2bc\right) + \left(cat + abt - a^2\right)\\&\quad> 0 + \left(a^2 t - a^2\right) \geqslant 0.\end{aligned}$$

Samanlainen argumentti osoittaa, että myös muut kolmioepäyhtälöt pätevät luvuille $a^2 + bct$, $b^2 + cat$ ja $c^2 + abt$.

Lopuksi, olkoon $t \in [2/3, 1[$. Eliminoimalla epäyhtälöstä a tiedon $b + c > a$ avulla, saadaan

$$\begin{aligned}&\left(b^2 + cat\right) + \left(c^2 + abt\right) - \left(a^2 + bct\right)\\&\quad= \left(b^2 + c^2\right) + (cat + abt) - \left(a^2 + bct\right)\\&\quad> b^2 + c^2 + (t-1)\,a^2 - bct\\&\quad> b^2 + c^2 + (t-1)\,(b+c)^2 - bct\\&\quad= \left(b^2 + c^2\right) + (t-1)\left(b^2 + c^2\right) + (t-1)\,2bc - bct\\&\quad= t\left(b^2 + c^2\right) + (t-2)\,bc\\&\quad= t\left(b^2 + c^2 + \frac{t-2}{t}\,bc\right)\\&\quad\geqslant t\left(b^2 + c^2 - 2bc\right) \geqslant 0,\end{aligned}$$

missä viimeiselle riville tultaessa on hyödynnetty sitä seikkaa, että koska $t \geqslant 2/3$, on oltava $\frac{t-2}{t} \geqslant -2$. Samalla tavoin voi todistaa kaikki kolmioepäyhtälöt luvuille $a^2 + bct$, $b^2 + cat$ ja $c^2 + abt$, ja olemme valmiit.

Tehtävä 2. Olkoon ω_1 se ympyrä, jonka eräs halkaisija on BD, ja olkoon ω_2 se ympyrä, jonka eräs halkaisija on CE. Olkoot lisäksi O_1 ja O_2 ympyröiden ω_1 ja ω_2 keskipisteet. Tavoitteena on todistaa, että pisteet I, H ja M ovat kaikki janan O_1O_2 keskinormaalilla. Keskinormaalin pisteille on kätevä vaihtoehtoinen muotoilu: piste P on janan O_1O_2 keskinormaalilla täsmälleen silloin, kun $PO_1 = PO_2$.

Käsitellään piste M ensimmäisenä, ja osoitetaan, että $MO_1 = MO_2$. Ensinnäkin, varmasti $BM = CM$. Toisaalta,

$$BO_1 = \frac{1}{2} \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot CE = CO_2.$$

Lisäksi, kehäkulmalauseen nojalla

$$\angle O_1BM = \angle ABM = \angle ACM = \angle O_2CM.$$

Nyt kolmiot $\triangle MBO_1$ ja $\triangle MCO_2$ ovat yhteneviä, ja $MO_1 = MO_2$.

Pisteiden I ja H käsittelyä varten esittelemme pienen lemman:

Lemma. *Olkoot ω_1 ja ω_2 kaksi ympyrää, joiden halkaisijat ovat yhtä pitkät ja keskipisteet O_1 ja O_2, olkoot A ja B eri pisteitä ympyrällä ω_1, ja olkoot C ja D eri pisteitä ympyrällä ω_2. Oletetaan, että suorien AB ja CD leikkauspisteelle P pätee*

$$AP \cdot PB = CP \cdot PD.$$

Tällöin $PO_1 = PO_2$.

Todistus. Merkitään ympyröiden ω_1 ja ω_2 sädettä r. Leikatkoon PO_1 ympyrää ω_1 pisteissä X ja Y, ja leikatkoon PO_2 ympyrää ω_2 pisteissä Z ja W. Pisteen potenssin nojalla

$$\begin{aligned}&(PO_1 + r)\,(PO_1 - r) = XP \cdot PY = AP \cdot PB\\&\quad= CP \cdot PD = ZP \cdot PW = (PO_2 + r)\,(PO_2 - r)\,.\end{aligned}$$

Täten $PO_1^2 - r^2 = PO_2^2 - r^2$, ja on oltava $PO_1 = PO_2$, mikä oli todistettava. □

Olkoon K suorien BI ja CD leikkauspiste, ja olkoon L suorien CI ja BE leikkauspiste. Koska $BC = BD$ ja BI on kulman $\angle CBD$ kulmanpuolittaja, on $BK \perp CD$. Samoin, koska $BC = CE$ ja CI on kulman $\angle ECB$ kulmanpuolittaja, on $CL \perp BE$. Tästä seuraa kaksi asiaa. Ensinnäkin Thaleen lauseen nojalla K on ympyrällä ω_1, ja L on ympyrällä ω_2. Toiseksi, kolmiot $\triangle BIL$ ja $\triangle CIK$ ovat yhdenmuotoiset, ja on oltava

$$\frac{BI}{IL} = \frac{CI}{IK}, \quad \text{eli} \quad BI \cdot IK = CI \cdot IL.$$

Nyt lemman nojalla $IO_1 = IO_2$.

Olkoon U suorien DH ja EF leikkauspiste, ja olkoon V suorien EH ja DF leikkauspiste. Koska H oli kolmion $\triangle DEF$ ortokeskus, on $DU \perp EF$ ja $EV \perp DF$. Jälleen Thaleen lauseella seuraa, että U on ympyrällä ω_1 ja V on ympyrällä ω_2. Ja samassa hengessä kuin aiemminkin, kolmiot $\triangle DHV$ ja $\triangle EHU$ ovat yhdenmuotoiset, ja on oltava

$$\frac{DH}{HV} = \frac{EH}{HU}, \quad \text{eli} \quad DH \cdot HU = EH \cdot HV.$$

Nyt lemman nojalla $HO_1 = HO_2$, ja olemme valmiit.

Tehtävä 3. Osoitetaan, että kaikki muotoa $n = 2^{p-1}m$ olevat luvut toteuttavat ehdon, kun luku m on sellainen, että $\omega(m) = k-1$, kaikki luvun m alkutekijät ovat suurempia kuin luku kolme ja luku $p > 2$ on alkuluku, joka toteuttaa ehdon $\left(\frac{5}{4}\right)^{(p-1)/2} > m$.

Tehdään vastaoletus: On olemassa positiiviset kokonaisluvut a ja b niin, että $a+b = n$ ja $d(n) \mid d(a^2+b^2)$.

Muistetaan, että

$$d\left(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}\right) = (\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1).$$

Täten

$$d(n) = p\, d(m)$$

ja siispä

$$p \mid d(a^2+b^2).$$

Vastaavasti tästä seuraa, että luvun a^2+b^2 on oltava muotoa

$$a^2+b^2 = q^{cp-1}r,$$

missä q on alkuluku ja $\mathrm{syt}(r,q) = 1$. Johdetaan nyt ristiriita erikseen tilanteissa $q \geqslant 5$, $q = 3$ ja $q = 2$. Aloitetaan tapauksesta $q \geqslant 5$. Tässä tilanteessa halutaan johtaa ristiriita siitä, että toisaalta luvun n^2 pitää olla suhteellisen iso (ennen kaikkea isompi kuin luvun a^2+b^2, sillä $n^2 = (a+b)^2$), ja toisaalta se on auttamatta liian pieni verrattuna siihen, mitä tiedetään luvun a^2+b^2 tekijöistä.

Tiedetään, että

$$(a+b)^2 = n^2 = 2^{2p-2}m^2.$$

Toisaalta

$$(a+b)^2 > a^2+b^2 = q^{cp-1}r \geqslant q^{cp-1} \geqslant q^{p-1} \geqslant 5^{p-1},$$

joten

$$2^{2p-2}m^2 > 5^{p-1},$$

eli

$$m > \left(\frac{5}{4}\right)^{(p-1)}.$$

Tämä on kuitenkin luvun n oletusten nojalla mahdotonta.

Käsitellään nyt tilanne $q = 3$. Nyt siis

$$3 \mid a^2+b^2,$$

jolloin voidaan helposti todeta, että $a \equiv b \equiv 0 \pmod 3$, jolloin $n = a+b$ on myös jaollinen luvulla kolme. Tämä on kuitenkin ristiriita, sillä oletimme, että $n = 2^{p-1}m$, ja että luvun m alkutekijät ovat suurempia kuin luku kolme.

Siirrytään viimeiseksi tapaukseen $q = 2$. Nyt

$$a+b = n = 2^{p-1}m$$

ja

$$a^2+b^2 = 2^{cp-1}r.$$

Jaetaan tarkastelu kahteen tapaukseen

1. $a = 2^\alpha a_0$ ja $b = 2^\beta b_0$, missä $\alpha \neq \beta$ ja luvut a_0 ja b_0 ovat parittomia
2. $a = 2^\alpha a_0$ ja $2^\alpha b_0$, missä luvut a_0 ja b_0 ovat parittomia.

Aloitetaan ensimmäisestä tapauksesta. Voidaan olettaa, että $\alpha < \beta$. Koska

$$2^{p-1}m = n = a+b = 2^\alpha a_0 + 2^\beta b_0 = 2^\alpha\left(a_0 + 2^{\beta-\alpha}b_0\right),$$

joten $p-1 = \alpha$. Siispä

$$\begin{aligned}2^{cp-1}r = a^2+b^2 &= 2^{2p-2}a_0^2 + 2^{2\beta}b_0 \\ &= 2^{2p-2}\left(a_0^2 + 2^{2\beta-2p+2}b_0^2\right),\end{aligned}$$

joten

$$cp-1 = 2p-2.$$

Tämä on kuitenkin mahdotonta, joten tapaus yksi on nyt käsitelty loppuun.

Siirrytään nyt toiseen tapaukseen $a = 2^\alpha a_0$ ja $b = 2^\alpha b_0$. Nyt

$$2^{p-1}m = n = a+b = 2^\alpha(a_0+b_0),$$

joten $\alpha < p-1$. Lisäksi nyt

$$2^{cp-1}r = a^2+b^2 = 2^{2\alpha}a_0^2 + 2^{2\alpha}b_0^2 = 2^{2\alpha}(a_0^2+b_0^2),$$

joten

$$a_0^2+b_0^2 = 2^{cp-1-2\alpha}r.$$

Koska a_0 ja b_0 ovat parittomia, pätee

$$a_0^2+b_0^2 \equiv 2 \pmod 4.$$

Täten $cp-1-2\alpha = 1$, joten $\alpha+1 = \frac{c}{2}p$, ja koska $\alpha+1$ on kokonaisluku, on myös luvun $\frac{c}{2}p$ oltava kokonaisluku, ja koska luku p on pariton alkuluku, on luvun c oltava parillinen, joten $\frac{c}{2}p \geqslant p$, eli $\alpha+1 \geqslant p$. Tiedetään toisaalta, että $\alpha < p-1$, eli $p > \alpha+1$, mikä on ristiriita.

Tehtävä 4. Osoittautuu, että halutunlaisia lukuja ovat täsmälleen luvut muotoa 2^α, missä $\alpha \in \mathbb{Z}_+$, ja luvut muotoa $3 \cdot 2^\alpha$, missä $\alpha \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$.

Aloitetaan toteamalla, että vain lukujen $x_1, \ldots, x_{n-1}$ suuruusjärjestyksellä on väliä, joten voimme keskittyä siihen. Todetaan lisäksi, että jokaisella $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ löytyy enintään yksi $j \in \{1, \ldots, n-1\}$, jolle $2i + j \equiv 0 \pmod n$. Nimittäin, jos löytyisi toinenkin, sanokaamme luku j', niin olisi $j \equiv -2i \equiv j'$

(mod n), ja joukon $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ kaksi lukua voivat olla keskenään kongruentit modulo n vain silloin, kun ne ovat peräti yhtä suuret.

Tutkitaan seuraavaksi, milloin luvulle i ei löydy lukua j, jolle $n \mid (2i + j)$ ja $i \neq j$. Näin on täsmälleen silloin, kun $2i+i \equiv 0 \pmod{n}$ tai $2i \equiv 0 \pmod{n}$. Edellisessä tapaus toteutuu täsmälleen silloin, kun $n \mid 3i$, eli kun $i = n/3$ tai $i = 2n/3$. Jälkimmäinen tapaus toteutuu täsmälleen silloin, kun $i = n/2$.

Olkoot $J = \{1, \ldots, n-1\}$ ja $I = J \setminus \{n/3, 2n/3, n/2\}$. Nyt voimme jokaiselle $i \in I$ sopia, että $f(i)$ on se yksikäsitteinen $j \in J$, jolle $i \neq j$ ja $n \mid (2i + j)$. Nyt kokonaisluvut $x_1, \ldots, x_{n-1}$ toteuttavat tehtävänannon ehdot vain ja ainoastaan silloin, kun $x_i < x_{f(i)}$ kaikilla $i \in I$.

Nyt meillä tulee olemaan täsmälleen kaksi mahdollisuutta. Joko

I jokaisella $i \in I$ laskettaessa $f(i), f(f(i)), f(f(f(i)))$, ... lopulta päädytään johonkin luvuista $n/3$, $2n/3$ tai $n/2$, tai

II $f(i) \in I$ kaikilla $i \in I$.

Tapauksessa I tehtävänannon mukaiset luvut $x_1, \ldots,$ x_{n-1} on helppo valita. Eräs konkreettinen tapa valita tällaiset luvut on sopia, että kaikilla $i \in J$ asetetaan luvuksi x_i se pienin positiivinen kokonaisluku $k_i \in \mathbb{Z}_+$, jolle jonossa $f(i), f(f(i)), f(f(f(i))), \ldots$ k. jäsen on jokin luvuista $n/3$, $2n/3$ tai $n/2$.

Tapauksessa II voimme tarkastella äärettömän pitkää jonoa $f(1), f(f(1)), f(f(f(1))), \ldots$, jossa voi esiintyä vain äärellisen montaa eri arvoa, ja jonka on siksi toistettava itseään. Erityisesti, jotkin kaksi eri jonon jäsentä, sanokaamme i ja j, ovat yhtä suuret. Tällöin nähdään, että lukujen $x_1, \ldots, x_{n-1}$ olisi toteutettava ristiriitaiset ehdot

$$x_i < x_{f(i)} < x_{f(f(i))} < \ldots < x_j = x_i.$$

Jos luvussa n on alkutekijä p, jolle $p \geqslant 5$, niin silloin jonossa

$$1 \equiv 1, \quad f(1) \equiv (-2), \quad f(f(1)) \equiv (-2)^2, \ldots \pmod{n}$$

esiintyy vain luvulla p jaottomia elementtejä, eikä siis mitään luvuista $n/3$, $2n/3$ ja $n/2$. Samassa hengessä, jos $9 \mid n$, niin mikään edellä mainitun jonon luvuista ei ole kolmella jaoton, kun taas jokainen luvuista $n/3$, $2n/3$ ja $n/2$ on.

Jotta tapaus I voisi päteä, on siis oltava $n = 2^\alpha$ jollakin $\alpha \in \mathbb{Z}_+$ tai $n = 3 \cdot 2^\alpha$ jollakin $\alpha \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$.

Lopuksi, jos on $n = 2^\alpha$, niin silloin $F = f(f(\cdots f(1) \cdots))$, missä f esiintyy α kertaa, on $\equiv 0 \pmod{n}$, ja jos $n = 3 \cdot 2^\alpha$, niin $F \equiv 2^\alpha$ tai $2 \cdot 2^\alpha \pmod{n}$, eli F on toinen luvuista $n/3$ ja $2n/3$.

Tehtävä 5. Väitämme, että halutunlaisia kivien asetelmia ovat täsmälleen ne, joissa on $2n - 2$ kiveä, ja joissa jokaisessa laatikossa on parillinen määrä kiviä.

Numeroidaan laatikot $1, 2, \ldots, n$. Merkitään laatikoiden kivien lukumääriä kokonaislukuvektoreilla $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ niin, että x_i merkitsee i. laatikon kivien lukumäärää, missä siis $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Ratkaisun ideana on määritellä kullekin kivien asetelmalle niin sanotusti semi-invariantti suure; luku, joka kussakin sallitussa kivioperaatiossa joko pysyy muuttumattomana tai pienenee. Tämän hyödyllisen ominaisuuden omaava suure on

$$D(x) = \sum_{i=1}^{n} \left\lfloor \frac{x_i - 1}{2} \right\rfloor,$$

missä $\lfloor \cdot \rfloor$ merkitsee tavanomaista lattiafunktiota: jos $\alpha \in \mathbb{R}$, niin $\lfloor \alpha \rfloor$ on suurin kokonaisluku n, jolle $n \leqslant \alpha$. Erityisesti, jos $m \in \mathbb{Z}$, niin

$$\left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor = \begin{cases} (m-1)/2 & \text{kun } m \text{ on pariton, ja} \\ (m-1)/2 - 1/2 & \text{kun } m \text{ on parillinen.} \end{cases}$$

Siispä toinen tapa kirjoittaa lauseke on

$$D(x) = \frac{N(x)}{2} - n + \frac{P(x)}{2},$$

missä $P(x)$ on vektorin x parittomien komponenttien lukumäärä, ja $N(x) = x_1 + \ldots + x_n$.

Tarkastellaan, mitä lausekkeen $D(x)$ arvolle käy laillisessa siirrossa. Poistetaan siis laatikosta i kaksi kiveä ja lisätään laatikkoon $j \neq i$ yksi. Tietysti lauseke $\lfloor (x_i - 1)/2 \rfloor$ pienenee yhdellä. Jos x_j on pariton, niin $(x_j - 1)/2$ on kokonaisluku, jolloin $\lfloor (x_j - 1)/2 \rfloor$ ei muutu. Jos taas x_j on parillinen, niin $\lfloor (x_j - 1)/2 \rfloor$ kasvaa yhdellä. Täten lausekkeen $D(x)$ arvo joko pysyy muuttumattomana tai pienenee yhdellä (sen mukaan, oliko x_j pariton vai parillinen).

Jos mikään laatikko ei ole tyhjä (eli $x_i > 0$ jokaisella $i \in \{1, \ldots, n\}$), niin silloin varmasti $D(x) \geqslant 0$. Koska $D(x)$ ei koskaan kasva laillisissa operaatioissa, on myös oltava $D(x) \geqslant 0$ kaikille ratkeaville kivien asetelmille x.

Toisaalta, jos $D(x) \geqslant 0$, niin silloin kivien asetelma x on ratkeava; nimittäin, jos merkitään $p_i = \lfloor (x_i - 1)/2 \rfloor$ jokaisella $i \in \{1, \ldots, n\}$, niin i. laatikko on tyhjä täsmälleen silloin, kun $p_i = -1$, jolloin tyhjien laatikoiden lukumäärä on $-\sum_{p_i < 0} p_i$. Toisaalta, kun $p_i \geqslant 0$, luku p_i kertoo täsmälleen, kuinka monta kertaa laillisen operaation voi suorittaa i. laatikolle niin, että i. laatikkoon vielä jää ainakin yksi kivi. Koska $D(x) \geqslant 0$, on

$$-\sum_{p_i < 0} p_i \leqslant \sum_{p_i \geqslant 0} p_i = \sum_{p_i > 0} p_i,$$

eli laillisia operaatioita voi suorittaa vähintään yhtä monta kuin tyhjiä laatikoita on.

Täten asetelma x on ratkeava jos ja vain jos $D(x) \geqslant 0$, eli jos ja vain jos

$$P(x) \geqslant 2n - N(x).$$

Lisäksi, koska $x_1 + \ldots + x_n \equiv P(x) \pmod 2$, asetelma x ei ole ratkeava täsmälleen silloin, kun

$$P(x) \leqslant 2n - 2 - N(x).$$

Erityisesti, jos $P(x) = 0$, niin asetelma x on ratkeava jos ja vain jos $N(x) \geqslant 2n - 1$, ja ei-ratkeava jos ja vain jos $N(x) \leqslant 2n - 2$. Nyt tiedämme, että asetelmat, joissa $P(x) = 0$ ja $N(x) = 2n - 2$, ovat halutunlaisia asetelmia, eli riittää enää osoittaa, että halutunlaisille asetelmille pätee $P(x) = 0$ ja $N(x) = 2n - 2$.

Oletetaan seuraavaksi, että kivien asetelma x' saadaan asetelmasta x lisäämällä johonkin laatikkoon yksi kivi. Tällöin $P(x')$ on toinen luvuista $P(x) + 1$ ja $P(x) - 1$. Jos x' on ratkeava ja x ei ole, niin

$$P(x) \leqslant 2n - 2 - N(x),$$

ja

$$P(x') \geqslant 2n - N(x') = 2n - 1 - N(x).$$

Siispä on oltava $P(x') = P(x) + 1$, eli kivi lisättiin laatikkoon, jossa oli parillinen määrä kiviä. Asetelmaan x, joka ei ole ratkeava, voi siis lisätä kiven mihin tahansa laatikkoon niin, että saadaan ratkeava asetelma täsmälleen silloin, kun sen jokaisessa laatikossa on parillinen määrä kiviä.

Lopuksi, halutunlaisille x on siis pädettävä

$$0 = P(x) \leqslant 2n - 2 - N(x)$$

ja

$$1 = P(x') \geqslant 2n - N(x),$$

mistä seuraa, että $N(x) = 2n-2$, ja väite on todistettu.

Tehtävä 6. Huomataan ensin, että funktiot $f(x) = x$, $f(x) = -x$ ja $f(x) = \frac{1}{2} - x$ toteuttavat funktionaaliyhtälön. Tarkistetaan:

Jos $f(x) = x$, niin

$$\begin{aligned} f\big(y^2 + 2xf(y) + f(x)^2\big) &= y^2 + 2xy + x^2 = (x+y)^2 \\ &= (y + f(x))\,(x + f(y))\,. \end{aligned}$$

Jos $f(x) = -x$, niin

$$\begin{aligned} f\big(y^2 + 2xf(y) + f(x)^2\big) &= -y^2 - 2xf(y) - f(x)^2 \\ &= -y^2 + 2xy - x^2 = -(x-y)^2 \\ &= (y + f(x))\,(x + f(y))\,. \end{aligned}$$

Jos $f(x) = \frac{1}{2} - x$, niin

$$\begin{aligned} &f\big(y^2 + 2xf(y) + f(x)^2\big) \\ &= \frac{1}{2} - y^2 - 2xf(y) - f(x)^2 \\ &= \frac{1}{2} - y^2 - 2x\left(\frac{1}{2} - y\right) - \left(\frac{1}{2} - x\right)^2 \\ &= \left(\frac{1}{2} - y + x\right)\left(\frac{1}{2} - x + y\right) \\ &= (y + f(x))(x + f(y)). \end{aligned}$$

Osoitetaan seuraavaksi, että mikään muu funktio ei funktionaaliyhtälöä toteuta. Sijoitetaan $y = -f(x)$, sillä tällä sijoituksella funktionaaliyhtälön oikea puoli on nolla:

$$f\big(2f(x)^2 + 2xf(-f(x))\big) = 0.$$

Tästä seuraa, että ainakin jollakin arvolla funktio saa arvon nolla. Osoitetaan seuraavaksi, että tällaisia arvoja voi olla vain yksi.

Oletetaan, että $f(u) = 0 = f(v)$. Tavoitteemme on siis osoittaa, että $u = v$. Tehdään sijoitus $x = y = u$ alkuperäiseen yhtälöön. Saadaan

$$f(u^2) = u^2.$$

Tehdään nyt sijoitus $x = y = v$ ja saadaan vastaavasti $f(v^2) = v^2$. Tehdään seuraavaksi sijoitus $x = u$ ja $y = v$. Saadaan

$$f(v^2) = uv$$

ja sijoituksella $x = v$ ja $y = u$ saadaan $f(u^2) = uv$. Tiedämme siis, että $f(u^2) = uv = u^2$ ja $f(v^2) = uv = v^2$. Siispä $u = v$. Täten on olemassa yksikäsitteinen luku a, jolla $f(a) = 0$. Koska

$$f\big(2f(x)^2 + 2xf(-f(x))\big) = 0,$$

niin

$$f(x)^2 + xf(-f(x)) = \frac{a}{2}$$

kaikilla x.

Tarkastellaan nyt pisteitä x_1 ja x_2, joissa funktio saa saman arvon. Edellä todistetun nojalla tiedämme, että mikäli nämä pisteet ovat erisuuret, niin $f(x_1) = f(x_2) \neq 0$. Oletetaan siis, että näin on.

Nyt

$$f(x_1)^2 + x_1 f(-f(x_1)) = \frac{a}{2} = f(x_2)^2 + x_2 f(-f(x_2)),$$

joten

$$\begin{aligned} x_1 f(-f(x_1)) &= x_2 f(-f(x_2)) \\ &= x_2 f(-f(x_1)) = x_1 f(-f(x_2)). \end{aligned}$$

Ensimmäinen yhtäsuuruusmerkki seuraa edellisestä yhtälöstä suoraan sieventämällä, toinen ja kolmas taas korvaamalla $f(x_2)$ arvolla $f(x_1)$ (tai päinvastoin), joka on yhtä suuri. Nyt on kaksi vaihtoehtoa, joilla tämä yhtälöketju voi päteä: joko $x_1 = x_2$ tai $f(-f(x_1)) =$

$f(-f(x_2)) = 0$, jolloin $f(x_1) = f(x_2) = -a$. Käsitellään nyt näistä jälkimmäistä tapausta tarkemmin. Mikäli $f(x_1) = f(x_2) = -a$, niin sijoitetaan tehtävänannon yhtälöön $x = a$ ja $y = x_1$. Nyt

$$f\big(x_1^2 + 2af(x_1) + f(a)^2\big) = (x_1 + f(a))(a + f(x_1)),$$

joten

$$f(x_1^2 - 2a^2) = 0,$$

eli

$$x_1^2 - 2a^2 = a.$$

Vastaavasti saadaan $x_2^2 - 2a^2 = a$, joten $x_1^2 = x_2^2$, ja siis $x_1 = \pm x_2$.

Alkuperäisen yhtälön oikea puoli ei muutu, vaikka lukujen x ja y järjestys muutettaisiin. Siispä myös vasempien puolien pitää olla samat. Saadaan

$$f\big(y^2 + 2xf(y) + f(x)^2\big) = f\big(x^2 + 2yf(x) + f(y)^2\big)$$

kaikille x ja y.

Edellä olemme osoittaneet, että mikäli $f(x_1) = f(x_2)$, on oltava $x_1 = \pm x_2$. Hyödynnetään nyt tätä tietoa. Edellisen yhtälön nojalla on siis pädettävä joko

$$y^2 + 2xf(y) + f(x)^2 = x^2 + 2yf(x) + f(y)^2$$

tai

$$y^2 + 2xf(y) + f(x)^2 = -\left(x^2 + 2yf(x) + f(y)^2\right).$$

Mikäli $f\big(y^2 + 2xf(y) + f(x)^2\big) = 0$, on pädettävä, että $y^2 + 2xf(y) + f(x)^2 = x^2 + 2yf(x) + f(y)^2$, koska funktio saa arvon nolla yksikäsitteisessä paikassa. Jos siis pätee $y^2 + 2xf(y) + f(x)^2 = -\big(x^2 + 2yf(x) + f(y)^2\big)$, pätee myös $f\big(y^2 + 2xf(y) + f(x)^2\big) \neq 0$. Tämä on kuitenkin mahdotonta, sillä tällöin tulisi päteä myös $(y + f(x))(x + f(y)) \neq 0$, mutta yhtälö $y^2 + 2xf(y) + f(x)^2 = -\big(x^2 + 2yf(x) + f(y)^2\big)$ voidaankin kirjoittaa toisin muodossa $(f(x) + y)^2 + (f(y) + x)^2 = 0$, mikä on ristiriita ehdon $(y + f(x))(x + f(y)) \neq 0$ kanssa. Ainoa vaihtoehto on siis, että kaikilla x ja y pätee

$$y^2 + 2xf(y) + f(x)^2 = x^2 + 2yf(x) + f(y)^2.$$

Sijoitetaan nyt tähän yhtälöön $y = 0$, jolloin saadaan $f(x)^2 = (f(0) - x)^2$. On siis pädettävä $f(x) = \pm(f(0) - x)$. Kirjoitetaan $f(x) = s(x)(f(0) - x)$, jossa siis funktio $s(x)$ voi saada arvonaan luvun -1 tai luvun 1, eikä mitään muita arvoja. Kun sijoitetaan tämä yhtälöön $y^2 + 2xf(y) + f(x)^2 = x^2 + 2yf(x) + f(y)^2$, saadaan

$$x\big(ys(y) + f(0)(1 - s(y))\big) = y\big(xs(x) + f(0)(1 - s(x))\big),$$

eli

$$s(x) + \frac{f(0)(1 - s(x))}{x} = s(y) + \frac{f(0)(1 - s(y))}{y}$$

kaikilla $x \neq 0$ ja $y \neq 0$. Koska x ja y ovat täysin toisistaan riippumattomia, voidaan nyt kiinnittää y vakioksi. Tällöin lausekkeen $s(x) + \frac{f(0)(1-s(x))}{x}$ arvon pitää olla vakio muuttujan x arvosta riippumatta.

Jos $f(0) = 0$, niin funktion $s(x)$ on oltava vakio, eli $f(x) = x$ kaikilla x tai $f(x) = -x$ kaikilla x.

Oletetaan seuraavaksi, että $f(0) \neq 0$. Mikäli nyt $s(x) = -1$ kaikilla $x \neq 0$, niin funktion $-1 + \frac{2f(0)}{x}$ pitää olla vakio kaikilla $x \neq 0$. Tämä on kuitenkin mahdotonta, joten näin ei voi olla.

Jos $f(0) \neq 0$ ja $s(x) = 1$ kaikilla $x \neq 0$, niin on oltava $f(x) = f(0) - x$, ja sijoittaen tämä alkuperäiseen tehtävänannon yhtälöön saadaan $2f(0)^2 = f(0)$, joten $f(0) = \frac{1}{2}$.

Jos taas $f(0) \neq 0$ ja on olemassa nollasta poikkeavat luvut x ja y, joilla $s(x) = -1$ ja $s(y) = 1$, niin sijoittaen yhtälöön

$$s(x) + \frac{f(0)(1 - s(x))}{x} = s(y) + \frac{f(0)(1 - s(y))}{y}$$

saadaan

$$-1 + \frac{2f(0)}{x} = 1,$$

jolloin $x = f(0)$. Tällöin kaikilla muilla luvun x arvoilla on pädettävä $f(x) = f(0) - x$, ja tällöin on pädettävä $f(0) = \frac{1}{2}$.

Viitteet

[1] *European Girls' Mathematical Olympiad 2014, Antalya, Turkey, Problems and Solutions, Day 1*, saatavilla osoitteesta `http://egmo2014.tubitak.gov.tr/sites/default/files/solutions-day1.pdf`.

[2] *European Girls' Mathematical Olympiad 2014, Antalya, Turkey, Problems and Solutions, Day 2*, saatavilla osoitteesta `http://egmo2014.tubitak.gov.tr/sites/default/files/solutions-day2.pdf`.

[3] *Scoreboard for EGMO 2014 in Turkey*, `https://www.egmo.org/egmos/egmo3/scoreboard/`.