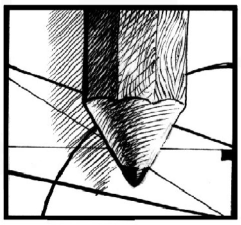


Matematiikkaa muinaisuudesta – Itämaan tietäjien laskentoa

Matti Lehtinen
Helsingin yliopisto

Tunnemme kaikki joulukertomuksen. Tärkeätä osaa siinä esittävät Itämaan tietäjät, jotka ovat hämmentyneet havaitsemastaan uudesta tähdestä. Missä olivat nuo Itämaat? Luultavasti legendan sepittäjät ovat ajatelleet seutua, joka Raamatussa tunnetaan Kaksoisvirtain maana eli Mesopotamiana ja joka nykyään on levotonta Irakia. Aluehan on itään päin Palestiinasta.

Joulukertomus ei tietäjien osalta ole vain mielikuvitusta. Kaksoisvirtain, siis Eufrat- ja Tigris-jokien alueella oltiin muinaisuudessa todellakin monissa suhteissa tiedon kärjessä. Erityisesti tähtitiede ja matematiikka olivat aikakauden kehittyneimpiä. Ja yhä voimme tunnistaa muutamia arkielämäämmekin kuuluvia laskennon piirteitä, joiden juuret ovat lähes neljän tuhannen vuoden päässä, matemaattisessa kulttuurissa, jota on tapana kutsua *babylonialaiseksi*. Nimitys on hiukan yleistävä, koska vuosisatojen ja -tuhansien aikana aluetta asuttivat monet kansat alkaen sumerilaisista.

Mesopotamian kulttuurin ja matematiikankin yhdistävä ulkoinen piirre on alueen varhaisten asukkaiden sumerilaisten kehittämä nuolenpää- eli kiilakirjoitus, jota sitten kaikki myöhemmätkin alueen asukkaat käyttivät. Kirjoitussymbolien kiilamuoto johtuu siitä, että ne synnytettiin painamalla poikkileikkaukseltaan kolmiomaista kirjoitinpuikkoa vinosti saveen. Koviksi poltetut savitaulut ovat erittäin kestäviä, ja arkeologit ovat kaivaneet niitä esiin tuhansittain. Joukossa on kolmisensataa taulua, joiden sisältö on tunnistettu matemaattiseksi.

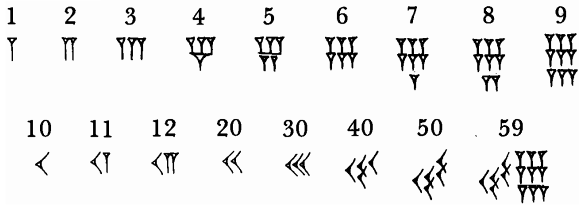
Mielenkiintoisimmat taulut ovat vuosilta 1800–1600 eKr. Tuolloin Mesopotamiaa vallitsivat babylonialaiset ja sen hallitsijat kuuluivat lainsäätäjäkuningas Hammurabin dynastiaan.

60-kantainen paikkajärjestelmä

Olemme tottuneet luvun 10 vallitsevaan asemaan maailmassamme. Kun nimeämme lukuja tai kirjoitamme niitä, pohjana on kymmenen. Useimmat mittayksikkömme ja niiden nimeäminen perustuvat kymmenjärjestelmään. Merkittävän poikkeuksen muodostavat kuitenkin ajan ja kulman mittaamisen yksiköt. Tunti jakautuu 60 minuuttiin samoin kuin kulmanmittauksen aste, ja minuutissa on 60 sekuntia.

Tämä poikkeama (jota Ranskan vallankumouksen aikaan 1700-luvun viimeisinä vuosina yritettiin tuloksetta korjata) perustuu babylonialaisten käytäntöihin 4000 vuoden takaa. Taustalla oli myös nerokas oivallus, joka muuntuneena elää yhä. Kysymyksessä oli lukujen merkitseminen paikkajärjestelmän avulla. Sama numeromerkki voi tarkoittaa eri lukua siitä riippuen, mihin kohtaa numeron merkintää se on laitettu. Merkinnässä 512 ”5” tarkoittaa viittä sataa, merkinnässä 51 viittä kymmentä ja merkinnässä 5 vain viittä.

Babylonialainen numeromerkintä noudatti samaa periaatetta, mutta meidän kymmenen numeromerkkimme sijasta he muotoilivat nuolenpäistä 59 erilaista numeromerkkiä, jotka yksinään tarkoittivat lukuja yhdestä 59:ään. Mutta lukua 60 he merkitsivät samalla merkillä kuin ykköstä. Luvun 61 merkkinä oli kaksi vierekkäistä ykkösen merkkiä, 62 syntyi ykkösen ja kakkosen merkeistä jne. Babylonialaiset eivät aluksi hoksanneet puuttuvan merkin korvaavan nollan periaatetta, jolla me erotamme toisistaan vaikkapa luvut 1 ja 10 tai 11 ja 101. Niinpä asiayhteydestä oli ymmärrettävä, milloin ykkösen merkki tarkoitti lukua 1, 60, $60 \cdot 60 = 3600$ tai vaikkapa $1/60$. Babylonialaisen merkintätavan peruja ovat yhä asteen tai tunnin jako minuuteiksi ja edelleen sekunneiksi. Lukujärjestelmää, jonka kantaluku on 60, kutsutaan *seksagesimaalijärjestelmäksi*. Kun emme enää osaa tai halua käyttää babylonialaisten nuolenpäämerkintöjä, niin vakiintuneeksi tavaksi on tullut merkitä niin, että esimerkiksi merkinnällä $a, b; c$ tarkoitetaan seksagesimaalilukua $a \cdot 60 + b + c/60$ ja a, b, c kirjoitetaan meille tutuilla numeroilla. Siten $3, 25; 30$ on luku $3 \cdot 60 + 25 + 30/60 = 205{,}5$.

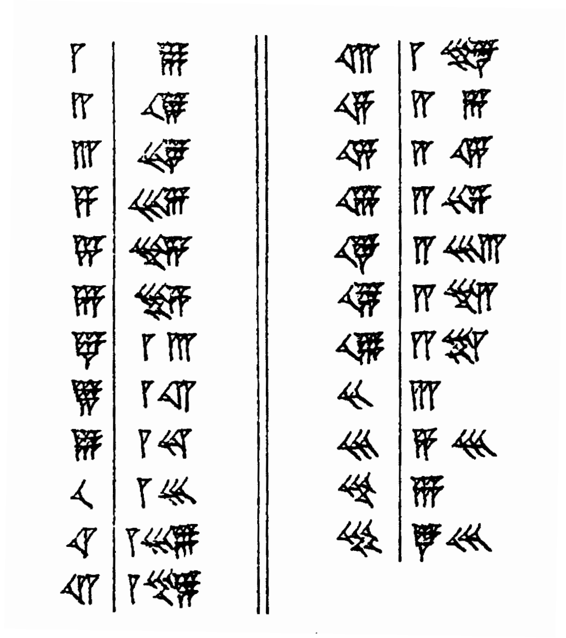


Nuolenpääkirjoituksen numeroita.

Mistä tuo 60 saatiin? Sitä ei tiedetä, mutta jo kaikkein vanhimmissa säilyneissä sumerilaisissa savitauluissa, jotka ovat ajalta ennen nuolenpääkirjoituksen syntyä, esiintyi yksinkertaisia symboleja, jotka liittyivät neljään lukuun: 1, 10, 60 ja 3600.

Babylonialaisten käytännöllinen numeromerkintä teki tarkat numerolaskut periaatteessa yhtä helpoiksi kuin nykyäänkin. Kun me laskemme päässä tai paperilla, käytämme hyväksi muistiamme, johon on alakoulussa yritetty tallettaa lukujen 1 – 9 välisten yhteen- ja kertolaskujen tulokset. Lopusta huolehtivat laskusäännöt, jotka esimerkiksi tekevät mahdolliseksi useampinumeroisten lukujen laskutoimitukset. Babylonialaisten laskijoiden tilanne oli haastavampi: 60-järjestelmän käyttö edellyttää isomman yhteenlasku- ja kertolaskutaulun hallintaa kuin mitä me tarvitsemme. Lukuisia savitauluja, joihin on kirjoitettu laskijoiden työtä helpottavia kertotauluja, on löytynyt.

Toisaalta 60-järjestelmän jakolaskut olivat usein helpompiakin. Tämä johtuu siitä, että luvulla 60 on monta tekijää ja sellaiset murtoluvut $\frac{1}{k}$, missä k on 60:n tekijä, ovat yksinkertaisia seksagesimaalilukuja ($\frac{1}{2} = 0; 30$, $\frac{1}{3} = 0; 20$, $\frac{1}{4} = 0; 15$, $\frac{1}{5} = 0; 12$, $\frac{1}{6} = 0; 10$, $\frac{1}{8} = 0; 7, 30$ jne. Jakolaskujen helpottamiseksi käytössä oli käänteislukutauluja. Näissä tyyppiä $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{11}$ jne. oleville luvuille annettiin likimääräisiä seksagesimaaliarvoja.



Yhdeksän kertotaulua seksagesimaalijärjestelmässä.

Babylonian algebraa ja algoritmeja

Peruslaskutoimitusten lisäksi babylonialaiset hallitsivat muita taitavia laskumenetelmiä. Esim. neliöjuuri $\sqrt{a}$ saatettiin laskea varsin tarkan likiarvomenetelmän

$$\sqrt{a} = \sqrt{n^2 + b} \approx n + \frac{b}{2n} = \frac{1}{2}\left(n + \frac{a}{n}\right)$$

avulla; tässä n^2 on suurin a:ta pienempi kokonaisluvun neliö. Approksimaatio on sama kuin se, joka saadaan, kun neliöjuurifunktion potenssisarjasta otetaan kaksi ensimmäistä termiä. Babylonialaisella menetelmällä esimerkiksi luvun $\sqrt{27}$ likiarvo on 5,2, mikä ei ole kaukana oikeasta arvosta 5,19615... Toisessa menetelmässä lähdetään approksimaatiosta jostain $\sqrt{a}$:n mahdollisesta likiarvosta a_1 ja muodostetaan sitten peräkkäin

$$b_1 = \frac{a}{a_1}, \quad a_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}, \quad b_2 = \frac{a}{a_2} \quad \text{jne.}$$

Näin saadaan muutaman askelen jälkeen sangen tarkka $\sqrt{a}$:n likiarvo. Itse asiassa syntyy kaksi lukujonoa, joiden raja-arvo on $\sqrt{a}$. Tätä babylonialaiset tuskin oivalsivat: raja-arvo tuli matematiikkaan vasta tuhansia vuosia myöhemmin. – Edellä kaavoina esitetyt laskutoimitukset esiintyvät savitauluissa vain luvuilla tehtyinä. Matematiikan kaavakieli syntyi vasta muutama sata vuotta sitten, samoin se, että kaavoihin laitetaan kirjaimia lukuja edustamaan.

Toisen asteen yhtälön ratkaisukaava opitaan koulussa, mutta tarpeen vaatiessa usein tarkistetaan esimerkiksi taulukkokirjasta. Mutta jo noin 4000 vuotta vanhat babylonialaiset tekstit osoittavat, että babylonialaiset tunsivat toisen asteen yhtälön ratkaisumenetelmän. Se ei kylläkään esiinny yleispätevänä ratkaisukaavana, vaan numeroesimerkkien muodossa. Esimerkit ovat kuitenkin selvästi tunnistettavissa yleisen metodin opetusvälineiksi. Eräässä tulkitussa savitaulussa kysytään neliön sivua, jos ala vähennettynä sivulla on 14, 30 (eli $14 \cdot 60 + 30 = 870$). Tehtävän ratkaisu on seuraava:

Ota puolet yhdestä, eli 0; 30 ja kerro 0; 30 0; 30:llä, joka on 0; 15; lisää tämä 14, 30:een, joka on 14, 30; 15. Tämä on 29; 30:n neliö. Lisää 0; 30 29; 30:een, ja tulos on 30 eli neliön sivu.

Selvästi kyseessä on yhtälön $x^2 - px = q$ ratkaisukaavan

$$x = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} + \frac{p}{2}$$

käyttö, kun $p = 1$ ja $q = 870$. – Koska negatiiviset luvut eivät olleet käytössä (ne keksittiin Intiassa vasta ensimmäisellä vuosituhannella jKr.), antiikin aikana toisen asteen yhtälöt saattoivat olla vain muotoa $x^2 = px + q$, $x^2 + px = q$ ja $x^2 + q = px$, missä p ja q ovat positiivisia.

Esitellään vielä toinen tyypillinen babylonialainen esimerkki yhtälönratkaisusta, nykyaikaisin symbolein ja merkinnöin: määritä x, jolle $x^2 + 6x = 16$. Aseta $y = x + 6$. Ratkaistavana on yhtälöryhmä

$$\begin{cases} y - x = 6 \\ \quad xy = 16. \end{cases}$$

Jos $y = a + 3$ ja $x = a - 3$, niin jälkimmäinen yhtälö on $a^2 - 9 = 16$, josta $a = 5$, $x = 2$. – Tyyppiä $7x^2 + 6x = 1$ olevaa yhtälöä ei sievennetty nykytapaan jakamalla x^2:n kertoimella, vaan kertomalla koko yhtälö 7:llä: yhtälöksi saadaan $(7x)^2 + 6(7x) = 7$ eli $y^2 + 6y = 7$, josta $y = 1$, $x = \frac{1}{7}$.

Babylonialaisessa matematiikassa esiintyy jopa toista astetta korkeamman asteen polynomiyhtälöihin johtavia tehtäviä; sellaisia ratkaistiin erikoistapauksissa käyttämällä apuna mm. $n^3 + n^2$-taulukkoja. Taulukoiden avulla ratkaistiin myös korkolaskujen yhteydessä vastaan tulevia eksponenttiyhtälöitä.

Geometria ei ollut vahva alue

Babylonialaisten matematiikka (kuten muidenkin muinaiskulttuurien matematiikka) suuntautui voittopuolisesti laskentoon ja algebraan. Geometriasta lienee heille ollut tuttu ainakin Pythagoraan lauseen sisältö. Eräässä savitauluista puretussa tehtävässä kysytään, miten kauas 30 yksikköä pitkän sauvan alapää joutuu pystysuorasta seinästä, kun yläpäätä lasketaan 6 yksikköä. Pythagoraan lauseen mukainen ratkaisu on $\sqrt{30^2 - (30-6)^2} = \sqrt{324} = 18$.

Omalaatuisin todiste siitä, että Pythagoraan lause tunnettiin Babyloniassa, on luonteeltaan aritmeettinen, nimittäin paljon tutkittu ja monien selitysten kohteena ollut savitaulu, joka tunnetaan nimellä *Plimpton 322*. Siinä on seksagesimaalilukuja

$1; 59, 0, 15$	$1, 59$	$2, 49$
$1; 56, 56, 58, 14, 50, 6, 15$	$56, 7$	$1, 20, 25$
$1; 55, 7, 41, 15, 33, 45$	$1, 16, 41$	$1, 50, 49$
$1; 53, 10, 29, 32, 52, 16$	$3, 31, 49$	$5, 9, 1$
...	...	...

Yksi taulun selitys on, että siinä olevat luvut olisivat lukuja $(\frac{c^2}{b^2}, a, c)$, missä $a^2 + b^2 = c^2$. Tämän ehdon toteuttavat positiivisten kokonaislukujen kolmikot (a, b, c) ovat ns. *Pythagoraan lukuja*. On tunnettua, että jos kolmikon luvuilla ei ole yhteisiä tekijöitä, niin luvuista a ja b tasan toinen on parillinen; jos se on b, niin on olemassa yhteistekijättömät kokonaisluvut p ja q siten, että $a = p^2 - q^2$, $b = 2pq$ ja $c = p^2 + q^2$. Plimpton-taulun luvut olisivat alku taulukolle, jossa ovat kaikki tällaiset, arvoilla $p \leq 125$ ja $1 < \frac{p}{q} < 1 + \sqrt{2}$ saatavat luvut järjestettynä suureen $\frac{p^2 + q^2}{2pq}$ mukaan. – Plimpton 322:n merkityksestä keskustellaan jatkuvasti, ja erilaisia tulkintoja on useita. – Kreikkalaista Pythagorasta koskevat legendat kertovat hänen saaneen oppia Babyloniasta.

Geometrisissa laskutehtävissä babylonialaiset käyttivät usein menetelmiä, jotka eivät anna ihan tarkkoja tuloksia. Erään tehtävän mukaan jana, joka jakaa nelikulmion, jonka sivut ovat a, b, c ja d, kahteen yhtä suureen osaan (ja yhdistää b- ja d-janat), olisi pituudeltaan

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}.$$

Tulos on tarkka vain, jos nelikulmio on puolisuunnikas. Myös esimerkiksi katkaistun pyramidin tilavuudelle löytyy babylonialaisista savitauluista sekä vääriä että oikeita laskutapoja.

Babylonialaisten tekstien tiedot ympyränmitannosta osoittavat, että ympyrän ala A laskettiin sen kehän p avulla kaavaa

$$A = \frac{p^2}{12}$$

vastaavalla tavalla. Tämä merkitsisi kehän ja halkaisijan yksinkertaista suhdetta 3. Eräistä teksteistä löytyy parempi likiarvo $3\frac{1}{8}$ (säännöllisen kuusikulmion piirin suhde ympäri piirretyn ympyrän kehään on 0; 57, 36).

Myös Vanhassa Testamentissa (joka ymmärrettävästi heijastelee monin tavoin babylonian kulttuuria, olivathan juutalaiset Baabelin vankeudessakin) esiintyy ”π:n arvo 3”, kuten Ensimmäinen Kuningasten Kirja (7:23) kertoo:

Hän [Salomo] teki myös meren, valetun, kymmentä kyynärää leveän reunasta reunaan, ympäriinsä pyöreän – – ja kolmenkymmenen kyynärän pituinen mittanuora ulottui sen ympäri.

Babylonian vaikutus näkyy yhä

Babylonian kulttuuri ja muinaisen Egyptin kukoistus ovat karkeasti samanaikaisia. Matematiikassa ja laskemisessa babylonialaiset olivat yleensä Niilin rantojen asukkaita edellä.

Yleisiä matemaattisia teoreemoja eivät babylonialaiset sen paremmin kuin egyptiläisetkään tietojemme mukaan tunteneet eivätkä todistaneet: heidän matematiikkansa oli (kuten ”insinöörimatematiikka” nykypäivinäkin) kokoelma toimintaohjeita, ei niiden perusteluja. Ja moni tarpeellinen tieto katsottiin aputaulukoista. Matematiikka oppina, jossa se mitä tiedetään ja tehdään, on aina vastaansanomattomasti perusteltua, syntyi vasta Kreikassa, yli tuhat vuotta babylonialaisen matematiikan kukoistuskauden jälkeen. Mutta toki suuri osa matematiikasta ja sen käytöstä tapahtuu nykyäänkin niin, että käyttäjä, insinööri esimerkiksi, soveltaa matemaattista tietoa ongelmiinsa liiemmälti perusteluja kyselemättä. Matematiikassa ja sen käytössä voi yhä nähdä sekä babylonialaisen että kreikkalaisen perinnön.

Kansainvälinen tilastojen luku- ja käyttötaitokilpailu jälleen käynnissä – tervetuloa mukaan!

Miten saada nuoret innostumaan numeroidentäyteisestä tilastojen maailmasta? MAOL ry, Suomen Tilastoseura ry ja Tilastokeskus järjestävät joka toinen vuosi käynnistyvän Suomen kansallisen Tilastokilpailun, jossa yläkoulu- ja lukioikäiset pääsevät joukkueina näyttämään tutkimuksentekotaitonsa. Kilpailun ideana on, että jokainen joukkue tekee pienen tutkimuksen valitsemastaan aiheesta: määrittää tutkimuskysymyksen, kertoo hieman taustatietoja, kerää aineiston, analysoi sen ja tiivistää tutkimuksen kulun sekä saamansa tulokset posteriin eli tietotauluun. Jokainen kilpailuun osallistuva koulu valitsee parhaan posterin yläkoulu- ja lukiosarjasta ja lähettää ne Tilastokeskukseen Suomen kansallisen raadin arvioitavaksi.

Suomen yläkoulu- ja lukiosarjojen voittajaposterit jatkavat matkaansa kansainväliseen Tilastojen luku- ja käyttötaitokilpailuun, johon osallistui viimeksi oppilaita kolmestakymmenestä eri maasta. Kansainvälisen tilastokilpailun molempien sarjojen voittajaposterit esitellään aina ISIn järjestämissä tilastokongresseissa, seuraavan kerran maailman 60. tilastokongressissa Brasiliassa kesällä 2015, ks.

`http://www.isi-web.org/isi-wscs/isi-world-statistics-congresses`.

Ilmoittaudu mukaan Tilastojen luku- ja käyttötaitokilpailuun osoitteessa

`http://tilastokoulu.stat.fi/verkkokoulu_v2.xql?page_type=opettajalle`.

Lisätietoja kansainvälisestä kilpailusta löydät osoitteesta `http://iase-web.org/islp/`.

Tilastokoulun `http://tilastokoulu.stat.fi` oppimateriaalit ja harjoitustehtävät auttavat kilpailuun valmistautumisessa!

Kirjoittanut: *Jenny Ståhlberg, Kasvatustieteen kandidaatti, Helsingin yliopisto Korkeakouluharjoittelija, Tilastokeskus*