Sinin yhteenlaskukaava helposti

Jorma Merikoski
emeritusprofessori, Tampereen yliopisto

Aluksi

”Vanhassa lukiomatematiikassa” sinin yhteenlaskukaava

$$\sin(\phi+\theta)=\sin\phi\cos\theta+\cos\phi\sin\theta \tag{1}$$

(missä $\phi,\theta\in\mathbb{R}$) johdettiin keskitason lukiolaisen kannalta mutkikkaalla geometrisella tarkastelulla [7], jonka muunnelma löytyy lähteestä [8]. Sittemmin tämä kaava johdettiin vektoreilla, mutta edelleen keskitason lukiolaiselle melko vaikeasti. Silloin tutkittiin kantavektorien kahden kierron yhdistämistä [5, 3] tai johdettiin aluksi kosinin yhteenlaskukaava skalaaritulon avulla [6]. Nykyisissä oppikirjoissa sinin yhteenlaskukaava ja muut vastaavat kaavat annetaan ilman perusteluja.

Voidaanko sinin yhteenlaskukaava johtaa helposti? Huomaamme, että voidaan. Ne lukijat, jotka eivät tiedä kompleksiluvuista mitään eivätkä tässä vaiheessa haluakaan tietää, voivat sivuuttaa luvut Helppo tapa ja Vielä Eulerin kaavasta.

Helppo tapa

Matematiikan kiinnostavimpiin kaavoihin kuuluu *Eulerin kaava*

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta. \tag{2}$$

Tässä e on Neperin luku, i imaginaariyksikkö (siis $\mathrm{i}^2=-1$) ja θ reaaliluku. Jos z on kompleksiluku (siis $z=x+\mathrm{i}y$, missä $x,y\in\mathbb{R}$), niin e^z määritellään esimerkiksi sarjakehitelmänä

$$\mathrm{e}^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\dots. \tag{3}$$

Voidaan todistaa, että reaalimuuttujan eksponenttifunktion kaikki laskusäännöt säilyvät.

Eulerin kaavan perusteella

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}=\cos(-\theta)+\mathrm{i}\sin(-\theta)=\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta. \tag{4}$$

Yhtälöparista (2), (4) saamme

$$\cos\theta=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2},\quad \sin\theta=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}. \tag{5}$$

Jatkamme yksinkertaisella laskulla. Yhtälöiden (5) perusteella

$$\begin{aligned}\sin\phi\cos\theta&=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}}{2\mathrm{i}}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2}\\&=\frac{1}{4\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta})\\&=\frac{1}{4\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\phi+\theta)}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\phi-\theta)}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\phi-\theta)}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\phi+\theta)})\\&=\frac{1}{2}\Big(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\phi+\theta)}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\phi+\theta)}}{2\mathrm{i}}+\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\phi-\theta)}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\phi-\theta)}}{2\mathrm{i}}\Big)\\&=\frac{1}{2}(\sin(\phi+\theta)+\sin(\phi-\theta)).\end{aligned}$$

Vastaavasti

$$\cos\phi\sin\theta=\frac{1}{2}(\sin(\phi+\theta)+\sin(\theta-\phi)).$$

Koska $\sin(\phi - \theta) = -\sin(\theta - \phi)$, on siis

$$\begin{aligned}\sin\phi\cos\theta + \cos\phi\sin\theta &= \frac{1}{2}(\sin(\phi+\theta) + \sin(\phi-\theta)) \\ &\quad + \frac{1}{2}(\sin(\phi+\theta) + \sin(\theta-\phi)) \\ &= \sin(\phi+\theta).\end{aligned}$$

Sinin yhteenlaskukaava (1) on näin todistettu.

Kirjoitettuani yllä olevan osoittautui, että lyhempi todistus [9, 10] saadaan soveltamalla yhtälön

$$e^{i(\phi+\theta)} = e^{i\phi}e^{i\theta}$$

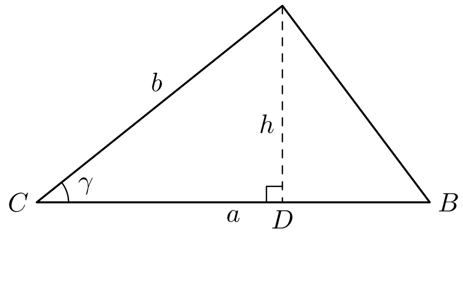
kumpaankin puoleen Eulerin kaavaa. Yksityiskohdat jätän lukijalle harjoitustehtäväksi. Päätin kuitenkin säilyttää alkuperäisen todistuksen, koska se sisältää ”bonuksena” kaavat (5), joissa sini ja kosini palautetaan kiinnostavasti eksponenttifunktioon. Toisaalta tämä lyhempi tapa sisältää oikeastaan paremman ”bonuksen”: saadaan myös kosinin yhteenlaskukaava.

Helppo ja alkeellinen tapa

Edellinen todistus ei sovi lukioon, mutta satuin löytämään [1, s. 162] keskitason lukiolaisellekin kohtuullisen todistuksen. Kirjoittaja viittaa lähteeseen [2] ja arvelee, että todistus löytyy muualtakin mutta ei ole laajalti tunnettu.

Merkitsemme kolmion ABC sivuja ja kulmia tavanomaisesti, ja merkitsemme $\Delta(T)$:llä annetun kolmion T alaa. Kertaamme aluksi, miten $\Delta(T)$ saadaan, kun tunnetaan T:n kaksi sivua ja niiden välinen kulma. Olkoon sivun $BC = a$ vastainen korkeusjana $AD = h$. Koska $h = b\sin\gamma$, on

$$\Delta(ABC) = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}ab\sin\gamma.$$



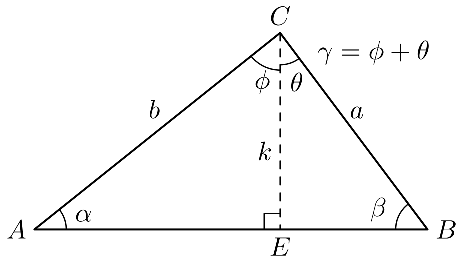
Johdamme nyt sinin yhteenlaskukaavan. Olkoon kolmion ABC sivun $AB = c$ vastainen korkeusjana $CE = k$. Merkitsemme $\angle ACE = \phi$ ja $\angle BCE = \theta$. Jos kulmat α ja β ovat teräviä, niin toisaalta

$$\Delta(ABC) = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}ab\sin(\phi+\theta),$$

mutta toisaalta

$$\begin{aligned}\Delta(ABC) &= \Delta(ACE) + \Delta(BCE) \\ &= \frac{1}{2}bk\sin\phi + \frac{1}{2}ak\sin\theta \\ &= \frac{1}{2}ba\cos\theta\sin\phi + \frac{1}{2}ab\cos\phi\sin\theta \\ &= \frac{1}{2}ab(\sin\phi\cos\theta + \cos\phi\sin\theta).\end{aligned}$$

Näin saamme kaavan (1) tapauksessa $0 < \phi, \theta < \frac{\pi}{2}$. Tyydymme siihen.



Jos α tai β on tylppä, niin vastaavalla tavalla saadaan sinin vähennyslaskukaava.

Vielä Eulerin kaavasta

Kompleksiluvun z sini ja kosini määritellään tavallisesti sarjakehitelminä

$$\begin{aligned}\sin z &= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \ldots, \\ \cos z &= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots.\end{aligned} \tag{6}$$

Eulerin kaava voidaan havainnollisesti perustella sijoittamalla kaavoihin (3) ja (6) $z = i\theta$, tekemällä yksinkertaisia laskutoimituksia ja muuttamalla sarjojen termien järjestystä. Jätän nämä laskut lukijalle harjoitustehtäväksi.

Täsmällisen todistuksen esittäminen tällä tavalla vaatii kuitenkin perehtymistä kompleksianalyysiin. Nimittäin pitää tietää, miksi kyseiset sarjat suppenevat kaikilla $z \in \mathbb{C}$. Lisäksi pitää tietää, miksi termien järjestystä saa muuttaa.

Mutta voidaanko Eulerin kaava perustella havainnollisesti pelkillä lukion tiedoilla? Voidaan ja monellakin tavalla, jotka tosin ovat edellistä mutkikkaampia. Silloinen lukiolainen Timo Kiviluoto [4] esitti kolme tapaa.

Lopuksi

Sinin ja kosinin yhteen- ja vähennyslaskukaavoilla on trigonometriassa erittäin keskeinen merkitys. Itse asiassa niistä ja parista lisäominaisuudesta saadaan koko trigonometria. Siis sini ja kosini voidaan määritellä paitsi sarjakehitelmillä myös tällä tavalla. Muitakin tapoja on olemassa.

Näiden kaavojen suuri merkitys ei näy nykyisissä opetussuunnitelmissa eikä oppimateriaaleissa. Kuten Halmetoja [3] jo ehdottikin, trigonometrian opiskelu pitäisi lukion pitkässä matematiikassa aloittaa ensin kertaamalla perusmääritelmät ja sitten johtamalla nämä kaavat.

Kiitokset

Kiitän Markku Halmetojaa ja Pentti Haukkasta kirjoitustani parantaneista huomautuksista.

Viitteet

[1] R. Askey, Mathematical content. – Kirjassa S. G. Krantz, *How to Teach Mathematics, Second Edition*, Amer. Math. Soc., 1999, s. 161–171.

[2] I. M. Gelfand and M. Saul, *Trigonometry*, Birkhäuser, 2001.

[3] M. Halmetoja, Lukion trigonometriaa, Solmu 2012/1. `http://solmu.math.helsinki.fi/2012/1/trigonometriaa.pdf`

[4] T. Kiviluoto, Eulerin kaavaa johtamassa, Solmu 2002/1. `http://solmu.math.helsinki.fi/2002/1/kiviluoto/`

[5] Y. Lehtosaari, J. Leino ja P. Norlamo, *Laaja matematiikka 2, kurssit 5–8*, Kirjayhtymä, 1983.

[6] H. Oinas-Kukkonen, J. Merikoski ja R. Niva, *Akseli 2, Matematiikan laaja oppimäärä*, Weilin+Göös, 2. p., 1984.

[7] K. Väisälä, *Trigonometria*, 9. p., WSOY, 1967.

[8] `http://solmu.math.helsinki.fi/olympia/kirjallisuus/trig.pdf`

[9] `http://en.wikipedia.org/wiki/Proofs_of_trigonometric_identities`

[10] `http://mathworld.wolfram.com/TrigonometricAdditionFormulas.html`