Sekalaisia kilpailutehtäviä

Heikki Pokela
Tapiolan lukio

Edellisen numeron tehtävistä

Tämän vuoden ensimmäisessä Solmussa jätettiin lukijan ratkottaviksi pari tehtävää. Ensimmäisessä piti etsiä kaikki kokonaisluvut x, jotka toteuttavat yhtälön

$$2^x(4-x) = 2x + 4. \tag{1}$$

Koska 2^x on positiivinen, on lausekkeiden $2x + 4$ ja $4 - x$ oltava samanmerkkiset. Niillä ei ole yhteisiä nollakohtia, joten tutkittavaksi jää x:n arvot $-1, 0, 1, 2$ ja 3. Näistä yhtälön (1) toteuttavat $x = 0$, $x = 1$ ja $x = 2$. Myös muita ratkaisutapoja löytyy, mutta todennäköisesti suurin osa niistä johtaa hyvin pitkään algebralliseen pyörittelyyn. Kilpatehtäville on tyypillistä, että yksi ratkaisutapa on lyhyt, muut pitkiä.

Toisena tehtävänä oli osoittaa, että jos m ja s ovat positiivisia kokonaislukuja joiden tulo on 2000^{2001}, niin yhtälöllä

$$mx^2 - sy^2 = 3 \tag{2}$$

ei ole kokonaislukuratkaisuja. (Kilpailutehtävä Makedoniasta)

Tehtävä voidaan ratkaista ristiriitatodistuksella. Oletetaan, että (2) toteutuu joillakin positiivisilla kokonaisluvuilla x ja y, ja että m ja s ovat tehtävän ehdot toteuttavia lukuja. Koska $2000 = 16 \cdot 125$, voimme kirjoittaa

$$ms = (2^4 5^3)^{2001} = 2^{8004} 5^{6003}.$$

Kakkosen saaminen tekijäksi on hyödyllistä, sillä nyt voidaan ottaa parillisuus ja parittomuus työkaluksi tehtävän ratkaisussa. Koska ms on parillinen, eivät m ja s voi molemmat olla parittomia. Jos s on parillinen, on m:n oltava pariton, sillä $mx^2 = 3 + sy^2$ on pariton. Voimme siis tässä tapauksessa kirjoittaa $m = 5^\alpha$, missä α on kokonaisluku, joka toteuttaa ehdon $0 \leq \alpha \leq 6003$. Tästä seuraa, että $s = 2^{8004} 5^{6003-\alpha}$, joten alkuperäinen yhtälö saadaan muotoon

$$5^\alpha x^2 = 3 + 2^{8004} 5^{6003-\alpha} y^2. \tag{3}$$

Yhtälön oikea puoli on kongruentti luvun 3 kanssa modulo 4. Vasemmalla puolella on x^2, joka neliönä on 0 tai 1 modulo 4, joten siitä ei 5:llä kertomalla saa lukua, joka olisi kongruentti 3:n kanssa modulo 4.

Jos puolestaan m on parillinen, niin s on pariton. Siis $s = 5^\beta$ jollakin kokonaisluvulla β, joka toteuttaa $0 \leq \beta \leq 6003$. Nyt $m = 2^{8004} 5^{6003-\beta}$, ja alkuperäinen yhtälö on

$$3 + 5^\beta y^2 = 2^{8004} 5^{6003-\beta} x^2. \tag{4}$$

Yhtälöstä (4) nähdään, että β ei voi toteuttaa ehtoa $0 < \beta < 6003$, sillä tässä tapauksessa seuraisi $5 \mid 3$, mikä on mahdotonta. Jos $\beta = 0$, niin

$$y^2 \equiv -3 \equiv 2 \pmod 5.$$

Jos $\beta = 6003$, niin $x^2 \equiv 3 \pmod 5$, koska

$$2^{8004} = 4^{4002} \equiv (-1)^{4002} \equiv 1 \pmod 5.$$

Siispä tämäkin vaihtoehto johtaa ristiriitaan, sillä lukujen neliöt ovat kongruentteja lukujen 0, 1 tai 4 kanssa modulo 5. Aktiivinen lukiolainen voi varmistaa asian laskemalla lukujen $5n$, $5n+1$, $5n+2$, $5n+3$ ja $5n+4$ neliöt.

Maol loppukilpailu 2013

Loppukilpailuun kutsuttiin syksyllä pidetyistä alkusarjoista kolme ensimmäisen vuoden, kuusi toisen vuoden ja noin kaksitoista kolmannen vuoden lukio-opiskelijaa. Varsinkin näille kolmelle nuorimmalle kutsutulle edessä oli todella haastetta, sillä loppukilpailu ei tunne sarjajakoa. Kuitenkaan he eivät yleensä jää aivan tuloslistan loppupäähän, saati pisteittä. Joskus joku heistä pääsee kymmenen parhaan joukkoon. Niin kävi tänäkin vuonna.

Viidestä tehtävästä viimeistä oli vuotta aiemmin käytetty Etelä-Korean matematiikkakilpailujen loppukilpailussa, ja se käsitteli lukuteoriaa.

Etsi kaikki kokonaislukukolmikot (m, p, q), jotka toteuttavat yhtälön

$$2^m p^2 + 1 = q^5. \tag{5}$$

ja joissa lisäksi $m > 0$ *sekä* p *ja* q *ovat alkulukuja.*

Ratkaisu lähtee liikkeelle siirtämällä ykkönen oikealle puolelle. Koska $q^5 - 1$ on jaollinen $(q-1)$:llä, $q-1$ on muotoa $2^n p^k$, missä $n \leq m$ ja k on 0, 1 tai 2. Tällaisten eksponenttiehtojen asettaminen tulee melko usein vastaan kilpatehtävien yhtälöissä, joissa etsitään kokonaislukuratkaisuja. Yhdistämällä edellisen tuloksen ja yhtälön (5) saamme yhtälöparin

$$\begin{cases} 2^m p^2 = q^5 - 1 \\ 2^n p^k = q - 1. \end{cases} \tag{6}$$

Jakamalla yhtälöt (6) puolittain saadaan

$$2^{m-n} p^{2-k} = \frac{q^5 - 1}{q - 1} = q^4 + q^3 + q^2 + q + 1, \tag{7}$$

missä oikea puoli on pariton, joten $m = n$. Binomikaavaa soveltamalla saadaan

$$2^m p^2 + 1 = q^5 = (2^m p^k + 1)^5 \geq 2^{5m} p^{5k} + 1,$$

mistä seuraa

$$2^m p^2 \geq 2^{5m} p^{5k}$$

ja edelleen

$$p^{2-5k} \geq 2^{4m} \geq 1.$$

Eksponenteista tulee vaatimukseksi $2 - 5k \geq 0$. Aiemmin k:lle saatu ehto antaa ainoaksi vaihtoehdoksi $k = 0$ ja siten $q - 1 = 2^m$. Alkuperäinen yhtälö on nyt

$$2^m p^2 + 1 = (2^m + 1)^5. \tag{8}$$

Avaamalla yhtälössä (8) sulut, vähentämällä ykköset ja jakamalla luvulla 2^m saadaan

$$p^2 = 2^{4m} + 5 \cdot 2^{3m} + 10 \cdot 2^{2m} + 10 \cdot 2^m + 5. \tag{9}$$

Jos nyt $m \geq 2$, niin yhtälöstä (9) seuraa

$$\mathrm{p}^2 \equiv 5 \pmod 8,$$

minkä aktiivinen lukiolainen toteaa mahdottomaksi. Täten $m = 1$. Sijoittamalla ratkaistut luvut aiempiin yhtälöihin saadaan lopuksi $(m, p, q) = (1, 11, 3)$.

Pari tehtävää pohdittavaksi

Funktionaalitehtävät edellyttävät kuvauksiin liittyvien perusominaisuuksien ymmärtämistä. Tällaisia ominaisuuksia ovat mm. käänteiskuvaus ja useat sisäkkäiset funktio-operaatiot. Seuraavaa tehtävää ei ehkä heti aavista funktionaalitehtäväksi.

Olkoon $a = \sqrt[1992]{1992}$. *Kumpi luvuista*

$$\mathrm{a}^{\mathrm{a}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\mathrm{a}}}}}} \quad \textit{vai } 1992 \tag{10}$$

on suurempi? Yhtälön vasemmalla puolella on 1992 kappaletta a-kirjaimia.

Lausekkeiden arvoihin, siis lukuihin, liittyvät pohdinnat kuten numeroiden määrät, ensimmäiset tai viimeiset numerot ratkeavat yleensä kongruenssin laskusäännöillä. Joskus binomikaava ja induktio riittävät, kuten seuraavassa tehtävässä.

Määritä luvun

$$2^5 + 2^{5^2} + 2^{5^3} + \ldots + 2^{5^{1991}} \tag{11}$$

kaksi viimeistä numeroa, kun luku kirjoitetaan kymmenjärjestelmässä.

Vihjeeksi edelliseen vaikkapa se, että kannattaa katsoa, mihin kahteen numeroon kaksi ensimmäistä termiä päättyvät kymmenjärjestelmässä. Päätelmän voi yrittää sen jälkeen yleistää induktiolla.

Kilpailutehtävien ratkaisuissa esiintyvät usein kongruenssi, induktio, parillisuus, neliön ei-negatiivisuus, kehäkulmat, yhdenmuotoisuus, sopivien lukujen sijoittaminen funktionaaliyhtälöiden sisälle, polynomiyhtälöiden juurten ominaisuudet ja muutamat muut perusasiat. Hienous lienee juuri tässä. Varsin rajatulla matematiikan osa-alueella, kilpailumatematiikalla, voidaan kehittää nuoren lukiolaisen matemaattista oppimiskykyä melko rajattomasti. Haasteet kilpailumatematiikassa eivät lopu kesken.

Ratkaisuihin palattaneen jonkin seuraavan Solmun palstoilla.