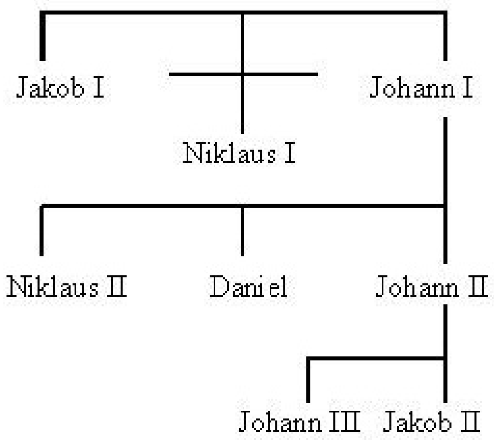
Bernoullien merkillinen tiedemiesdynastia

Johan Stén
tutkija, VTT

(Kirjoitus on aikaisemmin julkaistu Tieteessä tapahtuu -lehden numerossa 4/2012.)

Euroopan oppineiden sukujen joukossa sveitsiläinen Bernoulli-matemaatikkosuku on aivan ainutlaatuinen. Kolmessa peräkkäisessä sukupolvessa, ja lähes sadan vuoden ajan, seitsemän (joidenkin mukaan kahdeksan) tämän suvun jäsentä vaikutti eksaktien tieteiden – matematiikan, fysiikan ja astronomian – eturintamassa. Silti näiden matemaatikko-Bernoullien kirjoittamia teoksia on yleensä turha lähteä kirjastojen hyllyiltä etsimään: jos niitä ylipäätään on, ne ovat poikkeuksetta piilossa varastojen kätköissä. Heistä ei ole liioin kirjoitettu kattavaa biografiaa, vaikka anekdootteja heidän välisistään kilpailuista kuulee tämän tästä.

Bernoullien vaikutus tieteiden kehitykseen on ollut kiistatta valtaisa. Luonnontieteiden ja tekniikan opiskelijat tuntevat Bernoulli-nimen lukuisista laeista ja yhtälöistä, mutta hyvin harva tietää, kenestä Bernoullista kulloinkin on kyse. Tässä katsauksessa pyrin valottamaan Bernoulli-suvun matemaattisia saavutuksia ja niiden heijastuksia tieteisiin. Koska Bernoullien suvussa samat etunimet toistuvat sukupolvesta toiseen, on niihin selvyydeksi tapana liittää roomalainen järjestysnumero (numerointi koskee ainoastaan suvun matemaatikkojäseniä). Tässä käsiteltyjen kaikkein kuuluisimpien edustajiensa jälkeen Bernoullin suku ei suinkaan ole sammunut: Bernoulli-nimisiä eri alojen professoreja on riittänyt Baselin yliopistossa näihin päiviin saakka, ja onpa suku levinnyt Suomeenkin.



Matemaatikko-Bernoullien sukupuu.

Suvun juuret ovat Espanjan Alankomaihin kuuluneessa Antwerpenissa, nykyisessä Belgiassa. Bernoullit ovat protestantteja. Espanjalaisten harjoittaman uskonnollisen sorron takia suvun kantaisä muutti 1500-luvun lopulla Frankfurtiin, mutta asettui myöhemmin Baseliin, jossa suku menestyi ja nousi kansainväliseen kuuluisuuteen. Suvussa kaksi lahjaa näyttäisi korostuvan ylitse muiden: matemaattinen ja taiteellinen. Suvun ”päämies” oli kauppias ja kaupungin raatimies Niklaus Bernoulli (1623–1708), jonka yhdestätoista lapsesta kaksi poikaa – Jakob I (1655–1705) ja Johann I (1667–1748) – loivat perustan suvun tieteelliselle maineelle. Niklausveljestä tuli taidemaalari (1662–1716), ja hänen käsialaansa on mm. Jakob I:n muotokuva. Edellisen poika

Niklaus I (1687–1759) vuorostaan seurasi setiensä Jakobin ja Johannin viitoittamaa tiedemiespolkua ja mm. toimitti ja julkaisi Jakobin kirjoitukset postuumisti.

Ensimmäinen sukupolvi

Jakob I Bernoulli opiskeli aluksi isänsä toivomuksesta filosofiaa ja teologiaa, mutta siirtyi valmistumisensa jälkeen 1676 omaehtoisesti matematiikan ja fysiikan pariin. Opintomatkoillaan mm. Ranskaan, Hollantiin ja Englantiin hän tutustui aikansa tieteellisiin virtauksiin; karteesiolaiseen luonnonfilosofiaan, analyyttiseen geometriaan ja englantilaisten empiristien luonnonoppeihin. Palattuaan Baseliin 1682 hän ryhtyi opettamaan perustamassaan kokeellisen fysiikan seminaarissa. Hän perehtyi syvällisesti Descartes'n geometriaan sekä englantilaisten John Wallisin ja Isaac Barrow'n (Newtonin opettajan) kirjoituksiin differentiaalilaskennasta, julkaisten niistä poikineita omia tutkielmiaan *Acta eruditorum*issa, aikansa arvostetussa tiedejulkaisussa. Samassa sarjassa julkaistiin vuonna 1684 Gottfried Wilhelm Leibnizin kuuluisa analyysin perusteita koskeva artikkeli nimeltään *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illi calculi genus*, jota Jakob I Bernoulli innolla tutki. Pian hän oppikin hallitsemaan menetelmän täydellisesti ja sai oppilaakseen lahjakkaan veljensä Johannin, josta myöhemmin kehkeytyi hänen pahin kilpailijansa.

Kieltäydyttyään kertaalleen pappisvirasta Jakob I Bernoulli tuli nimitetyksi 1687 Baselin yliopiston matematiikan professoriksi, jossa virassa hän vaikutti elämänsä loppuun. Hänen työnsä differentiaalilaskennan parissa oli uraauurtavaa, sillä Leibnizin kalkyyli edusti tuohon aikaan monella tapaa uudenlaista ja vaikeatajuista ajattelua. Artikkeleissaan *Journal des sçavans*issa ja *Acta eruditorum*issa Jakob I Bernoulli sovelsi ja kehitti analyysia erilaisiin mekaniikan ongelmiin. Hän mm. löysi kaavan käyrän kaarevuussäteelle ja ratkaisi Leibnizin ja Christiaan Huygensin tutkiman isokronisen käyrän ongelman (*Acta eruditorum*, 1690). Tämä tarkoittaa sellaisen radan määräämistä kitkatta liikkuvalle kappaleelle, että sitä noudattamalla se liukuisi maan vetovoimakentässä mistä tahansa pisteestä käyrän pohjalle yhtä nopeasti. Ongelman merkitys on siinä, että Bernoullin ratkaisu noudattaa ensimmäistä kertaa analyysissa nykyäänkin käytettyä menettelytapaa: 1) differentiaaliyhtälön johtaminen, 2) muuttujien separointi, 3) eri yhtälöiden integrointi ja vakioiden määrittäminen. Lisäksi tässä tapauksessa tarkastellaan erikseen integraalien minimi- tai maksimiarvoa, mikä on variaatiolaskennaksi kutsutun matematiikan haaran perusongelma [Goldstine 1980]. Aihetta käsitteli sittemmin Johann I Bernoulli ja hänen oppilaansa Leonhard Euler.

Vuonna 1691 Jakob I Bernoulli haastoi aikalaisensa määrittämään *ketjukäyrän*, ts. vapaasti roikkuvan, päistään kiinnitetyn ketjun, täsmällisen muodon. Nykyään puhuttaisiin tässä yhteydessä *funktiosta*, mutta tuohon aikaan koko käsitettä ei ollut olemassa. Nykykielellä oikea vastaus on hyperbolinen kosini, joka sisältää eksponenttifunktion. Käyrän muodon ratkaisivat itsenäisesti Leibniz, Huygens ja Johann I Bernoulli. Ongelma ei ole triviaali ottaen huomioon, ettei eksponenttifunktiota ja sen ominaisuuksia vielä täysin tunnettu. Jakob I osoitti myöhemmin ketjukäyrän painopisteen sijaitsevan kaikista mahdollisista käyränmuodoista alimpana, mikä vahvisti vuosisatoja teoreettisessa mekaniikassa tunnetun säännön, jonka mukaan rakenteen painopiste aina pyrkii hakeutumaan mahdollisimman alas. Samalla ratkesi eräs vuosisatoja kiinnostusta herättänyt rakennustekninen kysymys, eli vapaasti seisovan holvikaaren optimaalisen muodon ongelma. Voidaan nimittäin osoittaa, että vakain holvin muoto on ylösalainen ketjukäyrä eikä esim. paraabeli, kuten jotkut olivat arvelleet. Vuonna 1695 Jakob I käsitteli vaikeampaa ongelmaa: ns. *Bernoullin differentiaaliyhtälöä*,

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x)y^n(x), \quad n \neq 0, 1,$$

jolla epälineaarisuudestaan huolimatta on eksakteja ratkaisuja (yhtälö voidaan linearisoida sopivalla muuttujan vaihdolla ja lopuksi ratkaista ns. integroivan tekijän avulla). Jakob I Bernoullin muita taidonnäytteitä oli tuulen täyttämän purjeen muodon differentiaaliyhtälön ratkaiseminen sekä toisesta päästä kiinnitetyn ja toisesta päästä kuormitetun elastisen sauvan kaaren muodon selvittäminen. Merkittävä oli myös hänen vipuvarsilaille perustuva todistuksensa heilurin värähtelykeskipistettä koskevalle teoreemalle, jonka Huygens oli esittänyt monivartiselle heilurikellolle teoksessa *Horologium oscillatorum* (1673).

Edellä mainituilla töillään Jakob I Bernoulli oli osoittanut olevansa aikakautensa etevimpiä matemaatikoita. Tässä vaiheessa pienoinen huoli nuoremman veljen Johann I:n nopeasta kehityksestä oli ehkä ymmärrettävää, mutta tilannetta pahensi molempien veljesten äärimmäinen herkkyys, ylpeys ja keskinäinen epäluulo. Vuonna 1696 Jakob I Bernoulli haastoi aikalaisensa isoperimetrisellä ongelmalla: Tehtävänä on määrittää pisteiden $x = -c$ ja $x = c$ välinen käyrä $y(x)$, jonka pituus $L > 2c$ on vakio, siten että y^n:n integraali $-c$:stä c:hen on suurin mahdollinen. Sekä Leibniz että Johann I Bernoulli vastasivat haasteeseen, mutta Jakob ei kelpuuttanut ainuttakaan ratkaisuyritystä. Tämä laukaisi veljesten välillä tunnetun ja elinikäiseksi muodostuneen kiistan, jopa suoranaisen vihanpidon. Myös Leibniz sai aika ajoin osakseen molempien Bernoullien kitkerää kritiikkiä.

Ars conjectandi (Arvaamisen taito, 1713) lienee keskeneräisyydestään huolimatta Jakob I Bernoullin omaleimaisin teos. Se on todennäköisyysteorian klassikoita, jonka yksityiskohtia vieläkin tutkitaan. Teoksessa Bernoulli täsmensi todennäköisyyden käsitettä ja erotti ensimmäisenä *apriorisen* ts. etukäteen laskettavan (esim. noppapeli) todennäköisyyden *aposteriorisesta*, ts. sellaisesta todennäköisyydestä, joka voidaan päätellä tuloksista jälkikäteen (esim. todennäköisyys kuolla johonkin sairauteen). Lukuisten esimerkkien lomassa teoksessa mm. johdetaan induktiivisesti eksponenttikehitelmä käyttäen ns. Bernoullin lukuja sekä todistetaan *suurten lukujen laki*, jonka mukaan satunnaismuuttujan tulosten aritmeettinen keskiarvo lähestyy muuttujan odotusarvoa, kun kokeiden lukumäärä lähestyy ääretöntä. *Ars conjectandin* merkitystä kuvaa se, että teoksen 300-vuotisjuhlavuosi 2013 on julistettu kansainväliseksi tilastotieteen vuodeksi, jota juhlistetaan mm. konferenssein ja juhlaesitelmin. Kansainvälisen tilastotieteen järjestön (ISI) matemaattisen tilastotieteen ja todennäköisyyslaskennan jaoston nimi on osuvasti *Bernoulli Society*.

Jakob I Bernoullin hautaepitafia koristaa teksti *Eadem mutata, resurgo* – vaikkakin muuntuneena, nousen jälleen – kirjoitettuna spiraalikäyrän ympärille. Teksti viittaa logaritmiseen spiraaliin, jonka käyttäytymistä Jakob I Bernoulli oli tarkastellut napakoordinaatistossa. Hän kutsui käyrää nimellä *spira mirabilis* ilmaistakseen sen merkillistä itsesimilaarisuutta, ts. ominaisuutta säilyttää muotonsa ja nousukulmansa joka kohdassa. Toisaalta spiraali on mahdollinen vertauskuva ylösnousemukselle. Hautaepitafi on nähtävissä Baselin Münsterin katedraalin viereisessä kryptassa.

Jakob I Bernoullin hautaepitafin spiraali ei valitettavasti ole logaritminen, kuten oli tarkoitus, vaan pikemminkin yksinkertainen Arkhimedeen spiraali. (Kuva: Osmo Pekonen, 2007).

Johann I Bernoullista piti isänsä toivomuksesta tulla kauppias, mutta isoveljensä Jakobin tavoin hänen mielenkiintonsa kohdistui tieteisiin. Hän saikin opiskella lääketiedettä ja valmistui lääkäriksi. Samalla hän ryhtyi opiskelemaan Jakob I:n ohjauksessa matematiikkaa, jossa pian saavutti veljensä tason. Opintomatkallaan Pariisiin 1691 hän pääsi matemaattisilla tiedoillaan filosofi-teologi Nicolas Malebranchen tieteelliseen piiriin, jossa tutustui matematiikkaa harrastavaan markiisi Guillaume François Antoine de L'Hôpitaliin. Tämä pyysi Johann I Bernoullia opettamaan hänelle uuden infinitesimaalikalkyylin salat hyvää korvausta vastaan. Niin tapahtui, ja opetus jatkui kirjeitse Johann I:n palattua Baseliin 1692. Opetukseen kuului esimerkiksi raja-arvoja koskeva *l'Hôpitalin sääntö*:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

silloin kun $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Kaava sisältyi sittemmin L'Hôpitalin 1696 anonyymina julkaisemaan oppikirjaan *Analyse des infiniment petits*, joka oli ensimmäinen ranskan kielellä julkaistu analyysia koskeva teos. Siitä tuli erittäin suosittu differentiaalilaskennan oppikirja 1700-luvulla. Johann I Bernoullia teoksen julkaiseminen raivostutti, sillä vaikka esipuheessa kirjoittaja asiallisesti kiitti häntä saamastaan opetuksesta, Johann I:n mielestä kunnia koko teoksesta kuului yksinomaan hänelle. Pariisissa Johann I Bernoulli tutustui myös matemaatikko Pierre Varignoniin, josta Leibnizin ja Huygensin tapaan tuli hänen elinikäinen kirjeenvaihtokumppani. Tänä aikana Johann I:n päähuomio oli integraalilaskennassa. Hän ymmärsi integroinnin olevan derivoinnin käänteisoperaatio, mikä ei tuolloin ollut itsestään selvää. Näin ollen Leibnizin keksimä tulon derivointisääntö johti helposti osittaisintegrointisäännön keksimiseen, jota hän myös taitavasti sovelsi esimerkiksi johtamalla sarjakehitelmän (eri merkinnöillä, tosin)

$$\int_0^x y\,\mathrm{d}x = yx - y'\frac{x^2}{2} + y''\frac{x^3}{6} - \cdots$$

mielivaltaisen (mutta riittävän sileän) käyrän $y(x)$ alisen pinta-alan laskemiseksi.

Jakob-veljen ollessa matematiikan professori Baselissa Johann I:n menestymisen mahdollisuudet kotikaupungissaan olivat rajalliset. Veljesten yhteistyönä alkanut matemaattinen löytöretki oli muuttunut kilpailuksi ja lopulta katkeraksi riidaksi. Apuun riensi Huygens, jonka suosituksesta Johann I:lle avautui Alankomaiden Groningenin yliopiston matematiikan professuuri, jota hän piti hallussaan kymmenen vuotta. Aika Groningenissa oli Johann I:lle vaikea, sillä onnellisesta perheenlisäyksestä huolimatta uusi kaupunki ja sen ilmapiiri ei häntä miellyttänyt [Sierksma 1992]. Johann I:n kiihkeä luonne näet ajoi hänet lukuisiin tieteellisiin ja uskonnollisiin kiistoihin, samalla kun hänen terveytensä horjui. Vuonna 1696 hän julisti *Acta Eruditorum*issa kilpailun *brakistokroniksi* nimittämänsä nopeimman putoamiskäyrän löytämiseksi. Puolen vuoden määräaikaan mennessä ratkaisuja oli tullut ainoastaan kuusi kappaletta; ne on julkaistu samassa sarjassa 1697: ongelman esittäjältä itseltään, Jakob-veljeltä, Newtonilta, Leibnizilta, L'Hôpitalilta (joka tosin oli saanut Johann I Bernoullilta opastusta) ja Ehrenfried von Tschirnhausilta. Oikea ratkaisu *sykloidi* osoittautui samaksi kuin Jakob I Bernoullin aiemmin löytämä "tautokroni" eli isokroninen putoamiskäyrä. Ratkaisu osoittaa, että heilurikellon heilurin painopisteen pitäisi ympyrän kaaren sijaan kulkea pitkin sykloidia, jotta heilurin taajuus pysyisi vakiona heilunta-amplitudista riippumatta. Se on teknisesti haastavaa, mutta tällaisia heilurin varsia on todellakin valmistettu. Johann I Bernoulli ratkaisi brakistokroniongelman nerokkaalla oivalluksella: Käyttäen hyväksi Pierre de Fermat'n lyhimmän ajan periaatetta, jonka mukaan valo aina kulkee paikasta toiseen nopeinta reittiä, hän muunsi mekaanisen ongelman optiseksi ja johti sykloidisen ratkaisun tunnetusta valon taittumislaista kerrostuneessa väliaineessa [Goldstine 1980].

Jakob-veljen kuoltua Baselissa 1705 Johann I Bernoulli nimitettiin itseoikeutetusti kotikaupunkinsa yliopiston ainoaan matematiikan professuuriin. Hänen oppilaitaan olivat paitsi omat pojat Niklaus II (1695–1728), Daniel (1700–1782) ja Johann II (1710–1790) myös Leonhard Euler (1707–1783). Silloinen maanmiehemme, ruotsalainen Samuel Klingenstierna (1698–1765), joka Euroopan kiertueellaan vieraili Baselissa, teki niin ikään taidoillaan syvän vaikutuksen opettajaansa Johann I Bernoulliin [Rodhe 2002]. Palattuaan Ruotsiin Klingenstierna juurrutti leibnizilaisen infinitesimaalilaskennan Upsalan yliopistoon ja sitä kautta vähitellen myös Turun Akatemian opiskelijoihin.

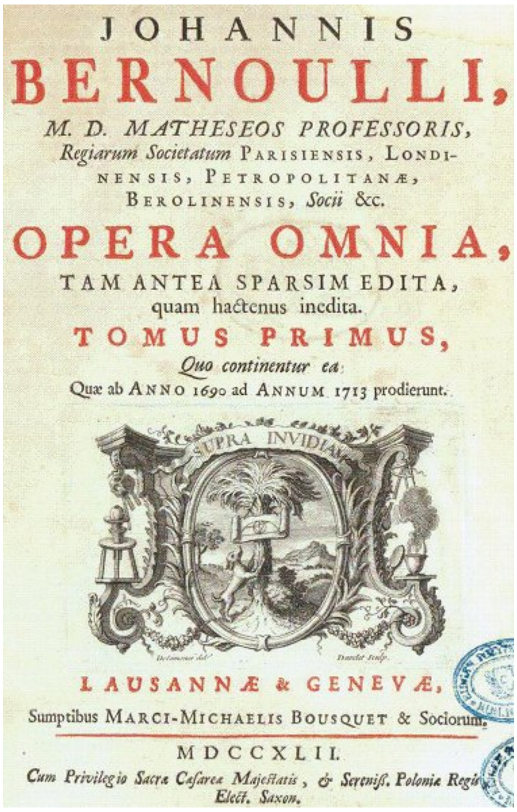
Johann I Bernoullin lukuisista saavutuksista jälkimmäiseltä Baselin kaudelta mainittakoon *virtuaalisen työn periaate* (1717): mekaanisen systeemin tekemä kokonaistyö tasapainon järkkyessä on nolla. Tämä voidaan ymmärtää vipuvarsilain yleistykseksi. Johann I Bernoulli kutsui voiman ja virtuaalisen liikkeen tuloa "energiaksi" (oikeammin: työ) ja osoitti sen olevan johdettavissa Leibnizin esittämän "elävän voiman" (*vis viva*) säilymislaista. Newtoniin ja hänen teorioihinsa Johann I Bernoulli suhtautui väheksyvästi, ja tämän asenteen hän istutti myös oppilaisiinsa. Leibnizin ja Newtonin välisessä kuuluisassa differentiaalilaskennan keksimisen prioriteettikiistassa hän puolusti tiukasti Leibnizia. Vielä 1730 hän jarrutti toimillaan Newtonin vetovoimateorian omaksumista Ranskassa selittämällä Keplerin planeettaliikkeen lakien olevan sopusoinnussa karteesiolaisen pyörreteorian kanssa [Shank 2008]. Johann I Bernoulli ei kaihtanut arveluttaviakaan keinoja kunniansa varjelemiseksi. Veljensä Jakobin kuoltua hän julisti ratkaisseensa tämän vuonna 1696 keksimän isoperimetrisen ongelman itsenäisesti. Hän myös mitä ilmeisimmin plagioi poikansa Danielin hydrodynamiikan teosta pyrkien osoittamaan, että olisi kirjoittanut oman hydrauliikan teoksensa aiemmin [Darrigol 2005]. Johann I Bernoullin *Opera Omnia* valmistui 1745, kolme vuotta ennen hänen kuolemaansa.

Toinen sukupolvi

Niklaus I Bernoulli, Jakob I:n ja Johann I:n veljenpoika ja edellisen oppilas, oli lahjakas muttei kovin tuottelias matemaatikko. Valmistuttuaan 17-vuotiaana maisteriksi Baselin yliopistosta puolustamalla Jakob I:n äärettömien sarjojen teoriaa hän väitteli 22-vuotiaana todennäköisyyslaskennan soveltamisesta oikeustieteisiin. Hän toimi viisi vuotta Padovan yliopiston matematiikan professorina, mutta muutti takaisin Baseliin logiikan ja sittemmin lakitieteen professoriksi. Hän kokosi ja julkaisi setänsä Jakob I:n teokset sekä keskeneräisen *Ars Conjectandi*n, mutta hänen omat matemaattiset oivalluksensa jäivät enimmäkseen runsaan kirjeenvaihdon lomaan. Niklaus I Bernoulli pohti mm. "Pietarin paradoksina" tunnettua päätöksentekoongelmaa. Se koskee kuviteltua uhkapeliä, jossa tappion todennäköisyys pienenee samalla kun tappiosumma rajattomasti kasvaa. Voittosumman odotusarvo on ääretön, mutta tuskinpa kukaan järkevä ihminen ryhtyisi tällaista peliä pelaamaan. Paradoksin oikean tulkinnan esitti myöhemmin Niklauksen nuorempi serkku Daniel Bernoulli.

Niklaus II Bernoulli oli isänsä Johann I Bernoullin ensimmäinen lapsi ja ylpeyden aihe, joka jo 11-vuotiaana hämmästytti kielitaidoillaan. Hän syntyi Baselissa, varttui Groningenissä, kirjoittautui sittemmin Baselin yliopistoon ja valmistui sieltä oikeustieteen lisensiaatiksi 1715. Isä opetti pojalleen matematiikkaa siinä määrin, että tämä saattoi auttaa häntä tieteellisessä kirjeenvaihdossa. Nuori Niklaus liitti kirjeisiin omiakin oivalluksiaan, julkaisi tutkielmia liikeradoista ja differentiaaliyhtälöistä sekä ryhtyi lopuksi opettamaan matematiikkaa veljelleen Danielille. Oltuaan kolme vuotta Bernin yliopiston oikeustieteen professorina hän sai yhdessä Danielin kanssa kutsun Pietarin vasta perustetun keisarillisen tiedeakatemian virkaan Leibnizin oppilaan Christian Wolffin suosituksesta. Isä Johann I Bernoulli oli jo kieltäytynyt kutsusta. Epäonnekseen Niklaus II sairastui kuumetautiin ja kuoli oltuaan Pietarissa vain kahdeksan kuukautta. Pietariin oli kuitenkin jo tuossa vaiheessa kutsuttu Johann I Bernoullin lahjakkain oppilas Leonhard Euler [ks. Stén 2007].

Groningenissä syntynyt **Daniel Bernoulli** ei isänsä Johann I:n painostuksesta huolimatta halunnut ryhtyä kauppiaaksi. Sen sijaan hän sai luvan opiskella lääketiedettä eri yliopistoissa ja valmistui tohtoriksi Baselissa 1721 hengitystä koskevalla väitöskirjalla. Lisäksi hän opiskeli matematiikkaa aluksi isänsä, sittemmin


JOHANNIS
BERNOULLI,
M. D. MATHESEOS PROFESSORIS,
Regiarum Societatum PARISIENSIS, LONDINENSIS, PETROPOLITANÆ, BEROLINENSIS, Socii &c.
OPERA OMNIA,
TAM ANTEA SPARSIM EDITA, quam hactenus inedita.
TOMUS PRIMUS,
Quo continentur ea
Quæ ab ANNO 1690 ad ANNUM 1713 prodierunt.
SUPRA INVIDIAM
LAUSANNÆ & GENEVÆ,
Sumptibus MARCI-MICHAELIS BOUSQUET & Sociorum.
MDCCXLII.
Cum Privilegio Sacræ Cæsareæ Majestatis, & Sereniss. Poloniæ Regis Elect. Saxon.

Vasemmalla Johann I Bernoullin koottujen teosten ensimmäisen volyymin (1742) otsikkolehti. Kuvassa puun runkoon kiinnitetty sykloidikäyrä sekä teksti jonka tieteenhistoria voisi kyseenalaistaa: "Supra invidiam" – "kateuden yläpuolella". Oikealla Johann I Bernoullin hautakivi Baselin Pietarinkirkossa mainitsee hänet oman aikakautensa Arkhimedeeksi sekä yhdenvertaiseksi Descartes'n, Newtonin ja Leibnizin kanssa. Newtonin nimen mainitsemisesta voi arvella, ettei epitafi ole Johann I:n itsensä suunnittelema. Vieressä sijaitsevat myös Danielin, Johann II:n ja Niklaus I Bernoullin hautakivet (Kuva: kirjoittaja, 2010).

isoveljensä Niklaus II:n johdolla. Italiaan suuntautuneen opintomatkan aikana hän julkaisi paljon huomiota herättäneen teoksen *Exercitationes quaedam mathematicae* (Venetsia, 1724), jossa hän mm. ratkaisi italialaisen matemaatikon, kreivi Jacopo Riccatin mukaan nimetyn toisen asteen differentiaaliyhtälön

$$ax^n \mathrm{d}x + y^2 \mathrm{d}x = b\,\mathrm{d}y.$$

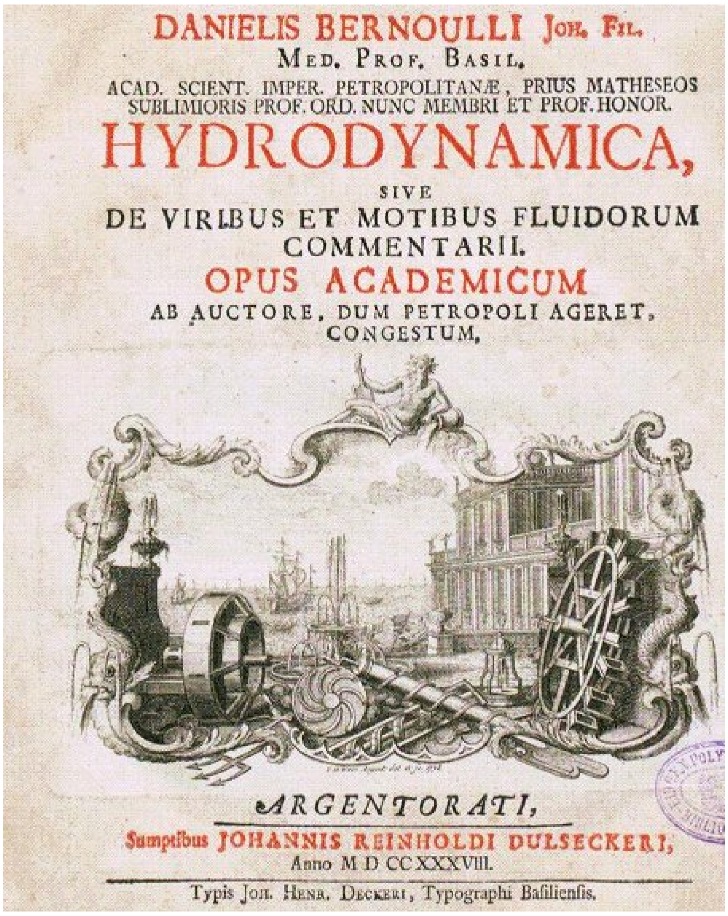
Daniel Bernoullin ratkaisu perustui muuttujien x ja y erottamiseen eksponentin n tietyillä arvoilla; tarkastelua yleistivät myöhemmin Leonhard Euler ja Jean d'Alembert. Vuonna 1725 Daniel Bernoulli voitti ensimmäistä kertaa Pariisin kuninkaallisen tiedeakatemian palkintokilpailun tutkielmallaan merellä toimivasta *klepsydrasta* (vesikellosta tai tiimalasista). Saavuttamansa maineen perusteella hän sai kutsun Pietarin vastaperustettuun tiedeakatemiaan, jonne lähti 1725 isoveljensä Niklaus II:n kanssa.

Vajaan vuoden kuluttua Niklaus II:n äkillinen kuolema Pietarissa järkytti Danielia syvästi. Kaikeksi onneksi hän sai tiedeakatemian johtajat suostutelluiksi värväämään Baselista nuoren Leonhard Eulerin, joka saapui Pietariin 1727. Hänestä Daniel sai läheisen kumppanin ja työtoverin. Daniel Bernoullin Pietarin kausi 1725–1733 oli hänen elämänsä hedelmällisimpiä. Tällöin syntyi mm. käsikirjoitus kuuluisaan *Hydrodynamica*-teokseen (julkaistu Strasbourgissa 1738) [ks. Darrigol 2005], jossa ensimmäistä kertaa sovelletaan kineettisen energian käsitettä ja massan säilymislakia virtausmekaniikkaan sekä johdetaan samalla virtausviivalla (oikeammin putkessa) sisäisen paineen p, virtausnopeuden v ja tiheyden ρ välinen yhteys

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \vartheta = \text{vakio},$$

missä ϑ on voimatermi. Yhtälön avulla voidaan selittää esimerkiksi miten lentokoneen kyky nousta ilmaan riippuu siipiprofiilista tai miksi kaksi rinnatusten kulkevaa laivaa pyrkivät ajautumaan toisiaan kohti. Teoksessa ennakoidaan puhtaasti teoreettisilla päättelyillä myös kineettisen kaasuteorian perusyhtälöitä.

Daniel Bernoulli tutki pitkään värähteleviä järjestelmiä. Hän ratkaisi ensimmäisenä vapaasti roikkuvan köyden värähtelyongelman Besselin funktion sarjakehitelmänä. Häneltä on peräisin superpositioperiaate, jonka mukaan soittimen tuottama ääni koostuu äärettömästä määrästä harmonisia värähtelyitä, jotka voidaan ilmaista trigonometrisin funktioin. Nämä harmo-



DANIELIS BERNOULLI Joh. Fil.
Med. Prof. Basil.
ACAD. SCIENT. IMPER. PETROPOLITANÆ, PRIUS MATHESEOS SUBLIMIORIS PROF. ORD. NUNC MEMBRI ET PROF. HONOR.
HYDRODYNAMICA,
SIVE
DE VIRIBUS ET MOTIBUS FLUIDORUM COMMENTARII.
OPUS ACADEMICUM
AB AUCTORE, DUM PETROPOLI AGERET, CONGESTUM.
ARGENTORATI,
Sumptibus JOHANNIS REINHOLDI DULSECKERI,
Anno M D CCXXXVIII.
Typis Joh. Henr. Deckeri, Typographi Basilienſis.

Daniel Bernoullin Hydrodynamica on ensimmäinen virtaavien nesteiden ja kaasujen dynamiikkaa koskeva kokonaisesitys. Otsikkolehdellä näkyy virtaavan veden teknisiä sovellutuksia, mm. "Arkhimedeen ruuvi". Baselin Pietarinkirkossa olevassa muistotaulussa lukee mm. "Daniel Bernoulli, Johanneksen poika, matemaatikko, fyysikko ja filosofi, jonka vertaista tai suurempaa ei maan päällä ole nähty". Yläpuolinen veistosallegoria viittaa Hydrodynamica-teokseen. (Kuva: kirjoittaja 2010).

niset perusmuodot toteuttavat yksitellen ns. aaltoyhtälön, jonka muodon johtivat toisistaan riippumatta Jean d'Alembert (1746) ja Euler (1747). Tässä lineaarisessa osittaisdifferentiaaliyhtälössä,

$$\sigma \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

joka kuvaa esimerkiksi päistään kiinnitetyn värähtelevän kielen liikettä, $y(x,t)$ kuvaa kielen poikittaista siirtymää, T jännitystä ja σ kielen tiheyttä (massa/pituusyksikkö). D'Alembert ilmaisi yleisimmän ratkaisun yhtälölle muodossa $y = \Psi(ct + x) + \Gamma(ct - x)$, jossa $c = \sqrt{T/\sigma}$ ja jossa funktiot Ψ ja Γ toteuttavat samanaikaisesti aaltoyhtälön ja (mahdolliset) reunaehdot.

Monien muiden eurooppalaisten tiedemiesten tapaan Daniel Bernoulli ei viihtynyt Pietarissa ja sen ankarassa ilmastossa, vaan palasi 1733 häntä tapaamaan tulleen veljensä Johann II:n kanssa mieluusti Baseliin ottaakseen vastaan siellä vapaana olleen anatomian professuurin. Vasta 1750 Daniel Bernoulli saattoi vaihtaa anatomian professuurin fysiikkaan, missä virassa hän jatkoi luennoimista vuoteen 1776 saakka. Hänen tutkimusaiheensa liittyivät läheisesti toisaalta fysiikkaan, astronomiaan ja fysiologiaan, toisaalta todennäköisyyslaskentaan. Toisin kuin isänsä Johann I hän ymmärsi Newtonin ja Leibnizin teorioiden sopivan yhteen. Vuonna 1734 hän jakoi isänsä kanssa Pariisin tiedeakatemian palkintokilpailun planeettojen ratatasoja koskevalla tutkielmalla. Sinänsä hienolla saavutuksella oli onneton ja kauaskantoinen seuraus, sillä Johann I koki palkinnon jakamisen poikansa kanssa nöyryyttävänä ja tuimistuneena katkaisi välit Danieliin loppuiäkseen. Daniel jatkoi kuitenkin osallistumista Pariisin tiedeakatemian palkintokilpailuihin. Kaiken kaikkiaan hän voitti kilpailun kymmenen kertaa, joko yksin tai veljensä tai isänsä kanssa. Daniel Bernoulli tunnettiin lempeänä ja elämäntavoiltaan vaatimattomana miehenä, jonka oppilaaksi Baseliin hakeuduttiin pitkienkin matkojen päästä.

Johann II Bernoulli oli Johann I:n nuorin poika ja hänen seuraajansa Baselin yliopiston matematiikan professorin virassa. Hän voitti Pariisin tiedeakatemian palkintokilpailun kolmasti. Eräs kilpailutehtävä koski valon etenemistä, jota Johann II mallinsi pitkittäisenä värähtelynä elastisessa pyörteisessä väliaineessa. Johann II Bernoullin kirjeenvaihtopiiri oli laaja (ks. esim. [Nagel, 2005]). Vuonna 1756 ranskalainen Pierre Louis Moreau de Maupertuis erosi saavuttamastaan Berliinin tiedeakatemian presidentin virasta ja muutti hyvän ystävänsä Johann II Bernoullin luokse Baseliin [Terrall 2002]. Maupertuis oli hänkin Johann I Bernoullin entinen oppilas. Muuton taustalla oli Leibnizin ja Newtonin kiistojen tragikoominen jälkinäytös. Johann I Bernoullin vähäpätöinen oppilas Samuel König pyrki osoittamaan, että pienimmän vaikutuksen periaate, jonka Maupertuis ja Euler olivat kukin tahollaan esittäneet vuonna 1744, oikeastaan olikin Leibnizin keksimä. Syntyneen kiistan seuraukset olivat Maupertuis'lle kohtalokkaat, sillä hän joutui Voltairen säälimättömän parjauksen kohteeksi ja hänen terveytensä horjui. Maupertuis kuoli Baselissa 1759 Johann II Bernoullin kotona **Engelhof**-talossa, osoitteessa Nadelberg 4, joka on nykyisin Baselin yliopiston hallinnassa [Pekonen 2010].

Seuraavat sukupolvet

Johann II:n pojista peräti neljä jatkoi suvun matemaattista perinnettä. Näistä **Johann III Bernoulli** (1744–1807) oli menestynein. Hän valmistui jo 14-vuotiaana oikeustieteiden maisteriksi ja palkattiin 20-vuotiaana johtamaan Preussin kuninkaallisen tiedeakatemian observatoriota, mihin tehtävään hän ei kuitenkaan sopinut. Hänen lahjansa olivat pikemminkin kirjallisia, matematiikassa hänen saavutuksensa jäivät vaatimattomiksi. Hän toimi kuitenkin matematiikan jaoksen virassa koko ikänsä toimittaen mm. Berliinin Efemeridejä, aikansa tähtitieteellistä vuosikirjaa, ja ollen kirjeenvaihdossa johtavien astronomien kanssa. Ulkomaanmatkoiltaan Johann III Bernoulli kirjoitti useita kulttuurihistoriallisesti kiintoisia matkakirjoja. Hän tiedosti varhain sukunsa ainutlaatuisuuden ja ryhtyi kokoamaan edeltäjiensä ja kollegojensa kirjallista jäämistöä, jonka hän rahapulassa päätyi myymään Ruotsin kuninkaalliselle tiedeakatemialle. *Bernoulliana*a säilytettiin Tukholman observatoriossa liki koskemattomana, kunnes suomalaissyntyinen astronomi Hugo Gyldén (1841–1891) kiinnostui aineistosta. Bernoullien kirjeenvaihto palautettiin Baseliin, kun Otto Spiess vuonna 1935 käynnisti Bernoullien koottujen teosten editoinnin. Pelkästään Johann III Bernoullin kirjekokoelmassa on tuhansia kirjettä. Mainittakoon, että 16 niistä on suomalaiselta Anders Johan Lexelliltä.

Veljensä Johann III:n tapaan **Jakob II Bernoulli** (1759–1789) opiskeli ensin oikeustiedettä, mutta löysi sittemmin oikean kutsumuksensa matematiikasta. Vuonna 1782 hän haki setänsä Danielin professuuria, mutta hävisi viran arvonnassa. Ollessaan opintomatkalla Italiassa hän sai vuorostaan kutsun Pietarin tiedeakatemialta, jossa matemaattinen tutkimus oli merkittävästi heikentynyt Eulerin ja Lexellin poismenon jälkeen. Jakob II tarttui innolla uuteen tehtävään, seuraten mekaniikan tutkimuksillaan setänsä Danielin jalanjälkiä. Hän solmi avioliiton Eulerin pojantyttären kanssa 1789, mutta kuoli samana kesänä tapaturmaisesti hukkumalla Nevaan. Näin Pietari oli osoittautunut kohtalokkaaksi jo toiselle Bernoullille.

Bernoulli-suku on sittemmin levinnyt laajalle ja menestynyt monella saralla, ei vähiten arkkitehtuurissa. Suomalaisia kiinnostavaa on, että Johann II Bernoullin jälkeläinen, toisen polven arkkitehti Paul Bernoulli (1908–1996) opintojensa päätteeksi muutti Suomeen ja asettui Alvar Aallon arkkitehtitoimiston palvelukseen. Hän ehti toimia mm. Salon kaupunginarkkitehtina, ja hänen vanhin poikansa jatkaa Bernoulli-suvun arkkitehtuuriperinnettä Suomessa. Sukutauluista kiinnostunut voi nähdä Bernoullien Suomeen tulossa viehättävää kohtalon leikkiä, sillä Alvar Aalto on läheistä sukua Anders Johan Lexellille, jonka läheinen kollega oli Johann III Bernoulli.

Professori Fritz Nagel esittelee Bernoulli-edition julkaistuja volyymeja Baselin yliopiston kirjastossa. Helsingin yliopiston kirjastossa teoksista on suurin osa, mutta koko kokoelma olisi syytä hankkia, ovathan Bernoullit nykyisin osa Suomenkin kulttuurihistoriaa. (Kuva: kirjoittaja, 2010).

Bernoulli-tutkimus tänään

Sveitsissä Bernoulli-suvun ja heidän lähipiiriinsä kuuluneen Leonhard Eulerin merkitys tieteen historialle on tiedostettu hyvin. Heidän teostensa ja kirjeenvaihtonsa kokonaisjulkaisuhanke on ylisukupolvinen jättiläisprojekti. Sveitsin tiedeakatemia käynnisti Eulerin koottujen teoksien julkaisemisen vuonna 1907.

Yli sadan vuoden uurastuksen jälkeen työ alkaa olla loppusuoralla. Vielä valtavampi hanke on Bernoullien koottujen teosten editointi johtuen jo siitäkin, että heitä on niin monta. Hankkeen nykyinen johtaja on Fritz Nagel, jonka toimipaikka on Baselin yliopiston kirjastossa. Bernoullien kirjeenvaihdon inventaarioprojekti on tätä nykyä siirretty tietoverkkoon kaikkien tutustuttavaksi (`http://www.ub.unibas.ch/bernoulli/index.php/Briefinventar`). Organisatorisesti Eulerin ja Bernoullien tutkimuskeskukset on äskettäin yhdistetty *Bernoulli-Euler-Zentrum*iksi, jonka julkaisuhankkeista suomalainen Anders Johan Lexellkin tulee löytämään oman paikkansa.

Kirjallisuutta

Bernoulli-Sutter, René (1972). *Die Familie Bernoulli.* Basel: Helbing & Lichtenhahn.

Darrigol, Olivier (2005). *Worlds of Flow – A History of Hydrodynamics from the Bernoullis to Prandtl.* Oxford: Oxford University Press.

Dictionary of Scientific Biography (1970–1980). New York: Charles Scribner's Sons. (Artikkelit Bernoulleista).

Goldstine, Herman (1980). *History of the Calculus of Variations from the Seventeenth Through the Nineteenth Century.* New York: Springer-Verlag.

Kline, Morris (1972). *Mathematical thought from ancient to modern times.* Vol. 2. Oxford: Oxford University Press.

Nagel, Fritz (2005). "'Sancti Bernoulli orate pro nobis'. Emilie du Châtelet's Rediscovered. *Essai sur l'optique* and Her Relation to the Mathematicians from Basel". Teoksessa: Ruth Hagengruber (ed.), *Emilie du Châtelet Between Leibniz and Newton.* Archives internationales d'histoire des idées. Vol. 205, Dordrecht et al.: Springer Verlag.

Pekonen, Osmo (2002). *La rencontre des religions autour du voyage de l'Abbé Réginald Outhier en Suède en 1736–1737.* Rovaniemi: Lapland University Press.

Sierksma, Gerard (1992). "Johann Bernoulli (1667–1748): His Ten Turbulent Years in Groningen", *The Mathematical Intelligencer*, Vol. 14, No. 4, ss. 22–31.

Rodhe, Staffan (2002). *Matematikens utveckling i Sverige fram till 1731.* Uppsala: Uppsala Universitet.

Shank, J. B. (2008). *The Newton wars and the beginning of the French Enlightenment.* Chicago: Chicago University Press.

Speiser, David (1992). "The Bernoullis in Basel". *The Mathematical Intelligencer*, Vol. 14, No. 4, ss. 46–47.

Stén, Johan (2007). "Euler – moderni kolmesataavuotias". *Tieteessä tapahtuu*, No. 8, ss. 3–9.

Sussmann, Héctor J. ja Jan C. Willems (2002). "The Brachistochrone problem and modern control theory". Teoksessa: *Contemporary trends in nonlinear geometric control theory and its applications.* Singapore: World Scientific.

Terrall, Mary (2002). *The man who flattened the Earth. Maupertuis and the sciences in the Enlightenment.* Chicago: Chicago University Press.

Solmun matematiikkadiplomit

Peruskoululaisille tarkoitetut Solmun matematiikkadiplomit I – VIII tehtävineen ovat tulostettavissa osoitteessa

`http://solmu.math.helsinki.fi/diplomi.html`

Opettajalle lähetetään pyynnöstä vastaukset koulun sähköpostiin. Pyynnön voi lähettää osoitteella

marjatta.naatanen(at)helsinki.fi