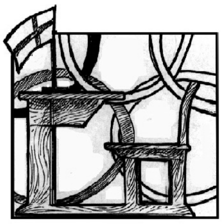


Yksi helppo, viisi vaikeaa? – Kansainväliset matematiikkaolympialaiset 2012

Matti Lehtinen
Helsingin yliopisto

Kansainväliset matematiikkaolympialaiset pidettiin heinäkuussa 2012 53. kerran. Kilpailujen historiassa tämä oli kolmas kerta, kun toimittiin eteläisen pallonpuoliskon talvessa, ilmastossa, jossa esimerkiksi Suomen koululaiset ovat tottuneet oppia saamaan ja osaamistaan osoittamaan. Kilpailijoita oli 548, maita 100, Etelä-Korea oli paras ja Suomi sijalla 65; Suomen Otte Heinävaara sai hopeamitalin. Nämä ja muut tilastotiedot löytyvät Matematiikkaolympialaisten virallisilta verkkosivuilta `http://www.imo-official.org/year_info.aspx?year=2012`.

Olympialaisissa ratkotaan aina kuusi tehtävää kahdessa neljän ja puolen tunnin mittaisessa kokeessa. Tehtävät päättää kaikkien osallistujamaiden joukkueenjohtajista koostuva tuomaristo. Tuomaristo on sidottu asiantuntijaraadin etukäteen laatimaan 30 tehtävän ehdokaslistaan, ja sen pohjana puolestaan ovat kaikista osallistujamaista pyydetyt ehdotukset. Niitä oli tänä vuonna saatu 136 kaikkiaan 40 maasta. Kuuden tehtävän joukkoon on tapana valita ainakin yksi edustaja kultakin neljältä kilpailumatematiikan vakiintuneelta osa-alueelta, nimittäin algebrasta, geometriasta, kombinatoriikasta ja lukuteoriasta. Tapana on myös luokitella tehtävät helpoiksi, keskinkertaisiksi ja vaikeiksi. Kutakin tällaista on sarjaan pyritty saamaan kaksi kappaletta. Kun helpot tehtävät ratkaisevat melkein kaikki kilpailijat ja vaikeita ei juuri kukaan, niin paremmuusjärjestys on usein jäänyt riippumaan vain kahdesta keskinkertaisesta tehtävästä. Tämän vuoden tuomaristo oli tiedostanut ongelman ja pyrki lisäämään keskinkertaisten tehtävien osuutta helppojen ja vaikeiden kustannuksella. Lopputulokset osoittivat, että tässä ei aivan onnistuttu: kahden vaikeimman tehtävän ratkaisu onnistui vain kymmenkunnalle viidestä ja puolesta sadasta kilpailijasta.

Olympiatehtävien ratkaisuihin voi tutustua esimerkiksi Suomen matemaattisen yhdistyksen Valmennusjaoston sivuilla osoitteessa `http://solmu.math.helsinki.fi/olympia/IMO/2012/ratk2012.pdf`.

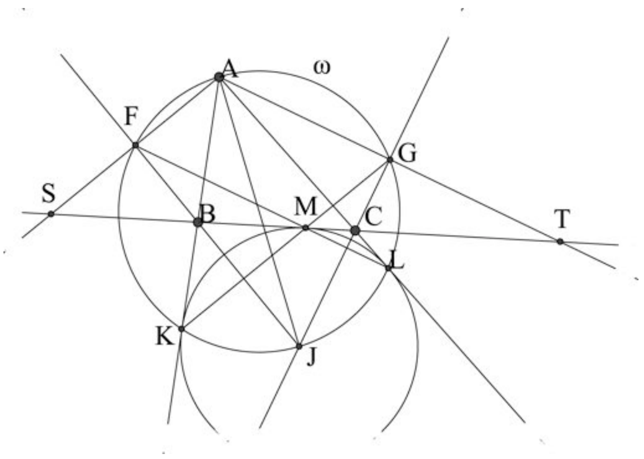
Tässä kirjoituksessa pyritään tuomaan esiin ratkaisun löytämisen kannalta olennaisia asioita. Etenkin vaikeimpien tehtävien kohdalla yksityiskohtiin asti ei mennä.

Helpoimmaksi tehtäväksi ennakoitiin olympialaisten tehtävää 1, jonka aihepiiri oli klassinen geometria:

Kolmion ABC kärkeä A vastassa olevan sivuympyrän keskipiste on J. Sivuympyrän ja sivun BC sivuamispiste on M. Ympyrä sivuaa suoraa AB pisteessä K ja suoraa AC pisteessä L. Suorien LM ja BJ leikkauspiste on F ja suorien KM ja CJ leikkauspiste on G. Olkoon vielä S suorien AF ja BC ja T suorien AG ja BC leikkauspiste. Todista, että M on janan ST keskipiste.

Tehtävätekstiin liittyi vielä sivuympyrän määritelmä.

Kolmion sivuympyröitähän ovat ne kolme ympyrää, jotka sivuavat yhtä kolmion sivuista ja kahden muun jatkeita.



Tehtävän monista eri ratkaisutavoista yksinkertaisin lienee se, jossa hyödynnetään kahdesti tietoa, jonka mukaan ympyrän tangenttien leikkauspisteestä sivuamispisteisiin piirretyt janat ovat yhtä pitkät. Niin muodoin $AK = AL$, $BK = BM$ ja $CM = CL$. Väitteen $SM = MT$ todistamiseksi riittää siis, jos saadaan näytettyä, että $SB = BA$ ja $CT = CA$. Nyt $SB = BA$ toteutuu, jos kolmio BAS on tasakylkinen. Koska BF on kulman $\angle SBA$ puolittaja, tasakylkisyyden osoittamiseksi riittää näyttää, että $BF \perp AS$. Tämä puolestaan onnistuu, kun keksii käyttää apukuviota, ympyrää ω, jonka halkaisija on AJ. Kun käyttää hyväkseen kehäkulmalausetta ja tietoja kulmanpuolittajista, joilla piste J on, pystyy osoittamaan, että F on ympyrällä ω; koska AJ on ympyrän halkaisija, kulma $\angle AFJ$ on suora, ja todistuksen saa helposti vietyä loppuun.

Selvästi helpoimmaksi tehtävä osoittautuikin. Täydet 7 pistettä annettiin 402 kilpailijalle ja peräti 36 maan kaikki kilpailijat saivat tehtävästä täydet pisteet. Tehtävä oli kilpailutehtävistä ainoa, jonka selvä enemmistö kilpailijoista ratkaisi. Suomi ja muut Pohjoismaat joutuvat aina juuri geometriassa antamaan tasoitusta maille, joissa vielä geometriaa opetetaan. Tanska keräsi tehtävästä 33 pistettä, Suomi 22, Ruotsi ja Norja 20.

Annettujen pisteiden keskiarvolla mitattuna toiseksi helpoin olympialaisten tehtävä oli toisen kilpailupäivän ensimmäinen tehtävä. Se oli tyypiltään funktionaaliyhtälötehtävä, jossa etsittävä kokonaislukufunktio toteuttaa annetun ehdon argumentin arvoilla, joita myös sitoo ehto.

Määritä kaikki ne funktiot $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, *joille pätee*

$$f(a)^2+f(b)^2+f(c)^2 = 2f(a)f(b)+2f(b)f(c)+2f(c)f(a)$$

kaikille sellaisille kokonaisluvuille a, b, c, *joilla* $a + b + c = 0$. *(Tässä* $\mathbb{Z}$ *tarkoittaa kokonaislukujen joukkoa.)*

Ehkäpä hiukan yllättävästi yhtälöllä on kahdenlaisia ratkaisuja. Yksinkertaiset sijoitukset osoittavat, että välttämättä $f(0) = 0$ ja $f(-a) = f(a)$. Sijoitus $a = b$, $c = -2a$ johtaa yhtälöön $f(2a)^2 = 4f(a)f(2a)$, joten $f(2a) = 0$ tai $f(2a) = 4f(a)$. Jos $f(x) = 0$ jollain $x \neq 0$, niin sijoitus $b = x$, $c = -a - x$ johtaa yhtälöön $f(a+x) = f(a)$; tällöin f:llä on jaksona x. Jos $f(1) = 0$, f on identtisesti 0; jos $f(1) = k \neq 1$, niin $f(2) = 0$ tai $f(2) = 4k$. Jos $f(2) = 0$, f:n jakso on 2 ja f on muotoa $f(x) = k$, kun x on pariton, ja $f(x) = 0$, kun x on parillinen. Mutta jos $f(2) = 4k$, niin $f(4) = 0$ tai $f(4) = 16k$. Edellinen vaihtoehto johtaa funktioon, jonka jakso on 4. Koska tällöin $f(3) = f(-1) = f(1) = k$, funktio saa arvon k kaikilla parittomilla argumentin arvoilla, arvon 0 argumenteilla, jotka ovat jaollisia 4:llä, ja arvon $4k$ niillä parillisilla luvuilla, jotka eivät ole jaollisia 4:llä. Entä jos $f(4) = 16k \neq 0$? Nyt esimerkiksi sijoitukset $(a, b, c) = (1, 2, -3)$ ja $(a, b, c) = (1, 3, -4)$ osoittavat, että $f(3)$ toteuttaa kaksi toisen asteen yhtälöä, joiden yhteinen juuri on $f(3) = 9k$. Siis $f(x) = kx^2$, kun $x \in \{1, 2, 3, 4\}$. Induktioaskeleen $f(x) = kx^2 \Rightarrow f(x+1) = k(x+1)^2$ ottamiseksi on esimerkiksi käytettävä sijoituksia $(a, b, c) = (x, 1, -x-1)$ ja $(a, b, c) = (x-1, 2, -x-1)$, joiden avulla saa $f(x+1)$:lle jälleen kaksi toisen asteen yhtälöä, joiden yhteinen juuri on $f(x+1) = k(x+1)^2$.

Kaikki kolme mahdollista ratkaisumuotoa toteuttavat annetun yhtälön. Tämän toteamiseksi on tehtävä muutaman rivin laskut. Niiden puuttuminen tai sivuuttaminen ”on helppo nähdä, että” -toteamuksella johti pistemenetyksiin; eräät joukkueet tätä kovin protestoivat. Täysin pistein palkittiin 143 kilpailijaa, ja ratkaisun monimuotoisuus mahdollisti tehtävien suurimman pistehajonnan.

Seuraavaksi helpoin, mutta toiseksi eniten täysin oikeiksi arvioituja ratkaisuja tuottanut oli ensimmäisen kilpailupäivän toinen tehtävä. Sekin oli algebraa, ja käsitteli matemaattiikkakilpailujen vakioaihetta, epäyhtälöitä.

Olkoon $n \geq 3$ *ja olkoot* $a_2, a_3, \ldots, a_n$ *positiivisia reaalilukuja, joille pätee* $a_2 a_3 \cdots a_n = 1$. *Todista, että*

$$(1+a_2)^2(1+a_3)^3 \cdots (1+a_n)^n > n^n.$$

Tehtävän ratkaisemiseksi ei tarvinnut huolellisesti kilpailuihin valmentautuneen epäyhtälötyökaluista muuta kuin aritmeettisen ja geometrisen keskiarvon välisen epäyhtälön ja oivalluksen, että $1+a_k$ on kirjoitettavissa k:n luvun summaksi

$$1 + a_k = (k-1) \cdot \frac{1}{k-1} + a_k.$$

Kun summaan soveltaa mainittua epäyhtälöä, saa relaation

$$(1+a_k)^k \geq \frac{k^k}{(k-1)^{k-1}} a_k,$$

ja kun nämä eri k:n arvoilla kertoo keskenään ja tekee ilmeiset supistukset, saa epäyhtälön

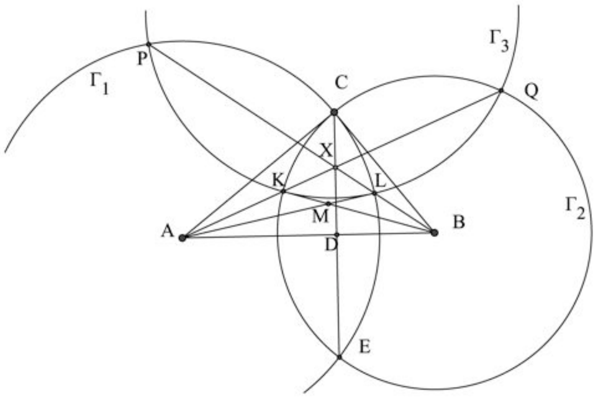
$$\prod_{k=2}^{n}(1+a_k)^k \geq n^n \prod_{k=2}^{n} a_k = n^n.$$

On vielä torjuttava yhtäsuuruuden mahdollisuus. Yhtäsuuruuden toteutumiselle olisi välttämätöntä, että $a_k = \dfrac{1}{k-1}$ kaikilla k, $2 \leq k \leq n$, mutta silloin lukujen a_k tulo ei voisi olla 1.

Tehtävän pistejakauma oli hyvin kaksihuippuinen. Tarpeellisen oivalluksen tehneet saivat yleensä täydet pisteet. Niitä annettiin 172:lle kilpailijalle. Toisaalta 263 kilpailijaa jäi kokonaan pisteittä.

Neljäs useamman kuin muutaman kilpailijan ratkaisema tehtävä oli toisen päivän toinen tehtävä, sekin hyvin klassisentyyppistä kilpailugeometriaa.

Kolmiossa ABC on $\angle BCA = 90°$ ja D on C:stä piirretyn korkeusjanan kantapiste. Olkoon X janan CD sisäpiste. Olkoon K se janan AX piste, jolle $BK = BC$ ja L se janan BX piste, jolle $AL = AC$. Olkoon M AL:n ja BK:n leikkauspiste. Osoita, että $MK = ML$.



Tehtävän varsin lyhyt ja elegantti ratkaisu perustuu olennaisesti pisteen potenssille ympyrän suhteen. Ensin on vain löydettävä ympyrät. Tehtävän ehto antaa kaksi: A-keskisen, C:n ja L:n kautta kulkevan Γ_1:n ja B-keskisen, C:n ja K:n kautta kulkevan Γ_2:n. Ympyrät leikkaavat C:n lisäksi pisteessä E, BX leikkaa Γ_1:n L:n lisäksi pisteessä P ja AX Γ_2:n K:n lisäksi pisteessä Q. Piste X on ympyröiden yhteisellä jänteellä CE, joten sillä on sama potenssi $CX \cdot XE$ molempien ympyröiden suhteen. Erityisesti $KX \cdot XQ = LX \cdot XP$. Mutta nyt pisteen potenssia voidaan soveltaa vähemmän tavalliseen suuntaan, osoittamaan, että neljä pistettä on samalla ympyrällä. Jos Γ_3 on pisteiden P, K, L kautta kulkeva ympyrä ja KX leikkaa tämän ympyrän myös pisteessä Q', niin $PX \cdot XL = KX \cdot XQ'$. Aikaisemman yhtälön perusteella päätellään, että $Q' = Q$, ts. että P, K, L ja Q ovat kaikki ympyrällä Γ_3. Koska $AC \perp BC$, A:n potenssi Γ_2:n suhteen on $AC^2 = AK \cdot AQ$. Mutta silloin myös $AL^2 = AK \cdot AQ$; kun tämä tulkitaan A:n potenssiksi Γ_3:n suhteen, niin nähdään, että AL on Γ_3:n tangentti. Samoin on KB, ja väite $MK = ML$ seuraa heti.

Tämä tehtävä osoittautui olennaisesti vaikeammaksi kuin sarjan toinen geometriatehtävä. Täydet pisteet sai 86 kilpailijaa, mutta kokonaan pisteittä jäi 349.

Ensimmäisen kilpailupäivän viimeinen tehtävä kuului aihealueeseen kombinatoriikka. Siinä esiteltiin melko eksoottinen peli.

Valehteluleikki on peli, jossa on kaksi pelaajaa A ja B. Pelin säännöt perustuvat positiivisiin kokonaislukuihin k ja n, jotka ovat molempien pelaajien tiedossa.

Pelin alussa A valitsee kokonaisluvut x ja N, $1 \leq x \leq N$. A pitää luvun x salassa, mutta ilmoittaa B:lle rehellisesti luvun N. B pyrkii saamaan tietoa luvusta x tekemällä A:lle kysymyksiä. Jokaisessa kysymyksessä hän esittää jonkin positiivisten kokonaislukujen joukon S (samaa joukkoa on voitu käyttää jo aikaisemmassa kysymyksessä) ja kysyy A:lta, kuuluuko x joukkoon S. B voi tehdä niin monta kysymystä kuin haluaa. A:n on heti vastattava jokaiseen B:n kysymykseen joko kyllä tai ei, mutta hän voi valehdella niin usein kuin haluaa. Ainoa rajoitus on, että jokaisen $k+1$:n peräkkäisen vastauksen joukossa on oltava ainakin yksi rehellinen. Kysyttyään niin monta kysymystä kuin on halunnut, B ilmoittaa positiivisten kokonaislukujen joukon X, jossa on enintään n alkiota. Jos x kuuluu joukkoon X, B voittaa. Muussa tapauksessa hän häviää. Todista, että

1. *jos $n \geq 2^k$, niin B:llä on voittostrategia;*
2. *jokaista tarpeeksi suurta k:ta kohden on olemassa sellainen $n \geq 1{,}99^k$, että B:llä ei ole voittostrategiaa.*

Tehtävän kahdella osiolla on varsin erityyppinen ratkaisu. Ensimmäiseen kysymykseen vastaamiseksi riittää, kun osoitetaan, että B voi lähteä joukosta $T_0 = \{1, 2, \ldots, N\}$ ja alkio kerrallaan poistaa siitä sellaisia alkioita y, joista hän tietää, että $y \neq x$; tätä voi tehdä niin kauan kuin joukossa on jäljellä 2^k alkiota. Voidaan olettaa, että jäljellä on joukko $T = \{1, 2, \ldots, 2^k, \ldots, m\}$. B kysyy ensin enintään $k+1$ kertaa kysymyksen "onko $x = 2^k$?". Jos A vastaa aina "ei", niin ainakin yksi vastaus on oikein, joten $x \neq 2^k$. Jos taas A vastaa ainakin kerran "kyllä", B esittää seuraavaksi k kysymystä, joista jokainen on "onko x:n binääriesityksen i:s numero 0?". Jos A:n kaikki $k+1$ vastausta (mukana siis $x = 2^k$ -kysymykseen annettu "kyllä") olisivat vääriä, niiden komplementtien avulla olisi rakennettavissa x. Koska vastauksista ainakin yksi on oikea, komplementeista rakentuva y ei ole x, ja tämä y voidaan poistaa T:stä ja jos T:ssä yhä on enemmän kuin n alkiota, toistaa prosessi. Toisen kysymyksen vastaus perustuu siihen, että jos $1 < c < 2$, ja $n = \lfloor (2-c)c^{k+1} \rfloor - 1$, niin B ei pysty kysymyksillään saamaan riittävästi tietoa. Sanomme, että A valehtelee luvusta i, jos hän vastaa B:n kysymykseen "$x \in S$?" kyllä, ja $i \notin S$, tai ei, ja $i \in S$. Jälkimmäiseen kysymykseen vastauksen tarjoaa A:n vastausstrategia, joka ei riipu x:stä, ja jonka mukaan A ei koskaan valehtele enemmän kuin k kertaa mistään luvusta i. Näin B ei missään vaiheessa saa tarpeeksi tietoa x:stä. Tällöin A valitsee luvun $N = n + 1$ ja muodostaa funktion

$$\phi = \sum_{i=1}^{N} c^{m_i},$$

missä eksponentit m_i ilmoittavat, kuinka monta peräkkäistä kertaa A on valehdellut i:stä. Osoittautuu, että jos A valitsee aina seuraavan vastauksensa niin, että ϕ saa pienimmän mahdollisen arvon, niin aina $\phi < c^{k+1}$, joten jokainen $m_i \leq k$. Jos erityisesti $1{,}99 < c < 2$, niin $n > 1{,}99^k$.

Tehtävään vastasi täysien pisteiden arvoisesti 8 kilpailijaa. Kolmisenkymmentä pystyi vastaamaan ensimmäiseen osioon, mutta 481 kilpailijaa jäi pisteittä.

Olympialaisten viimeinen tehtävä valittiin sarjaan lukuteorian osastosta, mutta tehtävä on melko algebrallinen.

Määritä kaikki positiiviset kokonaisluvut n, joille on olemassa sellaiset ei-negatiiviset kokonaisluvut $a_1, a_2, \ldots, a_n$, että

$$\frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_2}} + \cdots + \frac{1}{2^{a_n}} = \frac{1}{3^{a_1}} + \frac{2}{3^{a_2}} + \cdots + \frac{n}{3^{a_n}} = 1. \quad (1)$$

Osoittautuu, että tehtävän ratkaisuiksi kelpaavat kaikki sellaiset luvut n, joille pätee $n \equiv 1 \mod 4$ tai $n \equiv 2 \mod 4$. Sen että ehto on välttämätön, näkee melko välittömästi laventamalla jälkimmäistä yhtälöä tarpeeksi korkealla 3:n potenssilla ja tulkitsemalla saatua yhtälöä $\mod 2$. Saadaan, että $1+2+\cdots+n$ on pariton, joka on yhtäpitävää edellä väitetyn kanssa.

Toisin päin päättely perustuu havaintoihin

$$\frac{1}{2^{a+1}} + \frac{1}{2^{a+1}} = \frac{1}{2^a} \quad \text{ja} \quad \frac{x}{3^{a+1}} + \frac{y}{3^{a+1}} = \frac{z}{3^a},$$

jos $x + y = 3z$. Näitä käyttäen yhtälö (1) voidaan suurempien n:ien tapauksessa redusoida tapaukseen, jossa n korvautuu luvulla $n - 12$, ja viimein todeta, että kun $n \in \{2, 5, 6, 9, 10, 13, 14\}$, vaaditut luvut löytyvät.

Tehtävään löysi ratkaisun 10 kilpailijaa; 474 jäi kokonaan pisteittä.

Solmun matematiikkadiplomit

Peruskoululaisille tarkoitetut Solmun matematiikkadiplomit I – VII tehtävineen sekä diplomin VIII tehtävät ovat tulostettavissa osoitteessa

`http://solmu.math.helsinki.fi/diplomi.html`

Opettajalle lähetetään pyynnöstä vastaukset koulun sähköpostiin. Pyynnön voi lähettää osoitteella

marjatta.naatanen(at)helsinki.fi