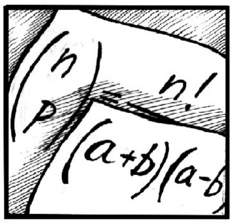

Eksponenttijakaumasta

Jorma Merikoski
Informaatiotieteiden yksikkö, Tampereen yliopisto
jorma.merikoski@uta.fi

Eksponenttijakauman tiheysfunktio

$$f(x) = \begin{cases} ae^{-ax}, & \text{kun } x \geq 0, \\ 0, & \text{kun } x < 0, \end{cases}$$

missä $a > 0$. On helppo osoittaa, että f todellakin on tiheysfunktio ja että tämän jakauman sekä odotusarvo että keskihajonta on $1/a$. On myös helppo osoittaa, että eksponenttijakauman kertymäfunktio

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-ax}, & \text{kun } x \geq 0, \\ 0, & \text{kun } x < 0. \end{cases}$$

Lukiossa eksponenttijakaumaa käsitellään vain ohimennen (ks. esim. [1, teht. 299]), jos ollenkaan, mutta se ansaitsisi enemmän huomiota. Nimittäin satunnaismuuttuja on ”muistiton”, jos ja vain jos se noudattaa eksponenttijakaumaa. Tämä seuraa kiinnostavalla tavalla eksponenttifunktion ominaisuuksista. Käsittelemme tätä asiaa enimmäkseen Rossin kirjan [2, luku 5.2.2] perusteella.

Mitä tarkoittaa satunnaismuuttujan muistittomuus? Olettakaamme, että tietty laite L on pysynyt käyttökunnossa melko kauan. Lisääkö vai vähentääkö tällainen tieto todennäköisyyttä sille, että L toimii edelleen hyvin? Voitaisiin ajatella, että se vähentää, koska L on jo tullut näin ”vanhaksi”. Toisaalta voitaisiin ajatella päinvastoin, että se lisää, koska L on jo osoittautunut näin ”kestäväksi”. Kumpi vastaus on oikea, riippuu tietenkin L:stä ja tarkasteltavien ajanjaksojen pituuksista. Mutta tämä esimerkki oikeuttaa myös ”kompromissiin” näiden vastausten välillä eli ajattelemaan, ettei tällaisella tiedolla ole vaikutusta. Silloin todennäköisyys sille, että L toimii edelleen, ei riipu siitä, kuinka kauan L on jo toiminut. Toisin sanoen L:n jäljellä oleva ”elinaika” on ”muistiton” sikäli, ettei se riipu L:n ”iästä”.

Yleisesti sanomme, että satunnaismuuttuja X on *muistiton*, jos

$$P(X > s + t \,|\, X > t) = P(X > s)$$

eli

$$P(X > s + t) = P(X > s)P(X > t)$$

kaikilla $s, t \geq 0$.

Eksponenttijakauma on helppo osoittaa muistittomaksi. Nyt herää mielenkiintoinen käänteisongelma: Onko olemassa muita muistittomia jakaumia? Näytämme, ettei ole.

Tarkastelemme satunnaismuuttujaa X, jonka kertymäfunktio on F. Merkitsemme $\bar{F}(x) = P(X > x)$. Tällöin X on muistiton, jos ja vain jos

$$\bar{F}(s + t) = \bar{F}(s)\bar{F}(t)$$

kaikilla $s, t \geq 0$. Määritämme aluksi kaikki ne oikealta jatkuvat funktiot g (kertymäfunktion täytyy olla oikealta jatkuva), jotka toteuttavat *funktionaaliyhtälön*

$$g(s+t) = g(s)g(t) \tag{1}$$

kaikilla $s, t \geq 0$.

Aluksi huomaamme, että välttämättä

$$g(\tfrac{2}{n}) = g(\tfrac{1}{n} + \tfrac{1}{n}) = g(\tfrac{1}{n})g(\tfrac{1}{n}) = g(\tfrac{1}{n})^2$$

kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$. Edelleen näemme induktiolla, että

$$g(\tfrac{m}{n}) = g(\tfrac{1}{n})^m \tag{2}$$

kaikilla $m, n \in \mathbb{Z}_+$. Asettamalla nyt $m = n$ saamme

$$g(1) = g(\tfrac{1}{n})^n$$

eli

$$g(\tfrac{1}{n}) = g(1)^{\frac{1}{n}}. \tag{3}$$

Yhtälöiden (2) ja (3) perusteella

$$g(\tfrac{m}{n}) = g(1)^{\frac{m}{n}} \tag{4}$$

kaikilla $m, n \in \mathbb{Z}_+$ eli

$$g(x) = g(1)^x, \tag{5}$$

kun $x > 0$ on rationaalinen. Lisäksi tämä pätee arvolla $x = 0$, koska g on oikealta jatkuva. Mutta (5) pätee myös x:n ollessa irrationaalinen. Nimittäin tässä tapauksessa on olemassa sellainen jono (x_k) x:ää suurempia rationaalilukuja, että $x = \lim_{k\to\infty} x_k$, joten g:n oikeanpuolisen jatkuvuuden, yhtälön (4) ja eksponenttifunktion jatkuvuuden perusteella

$$\begin{aligned} g(x) &= g(\lim_{k\to\infty} x_k) \\ &= \lim_{k\to\infty} g(x_k) \\ &= \lim_{k\to\infty} g(1)^{x_k} \\ &= g(1)^{\lim_{k\to\infty} x_k} = g(1)^x. \end{aligned}$$

Siis (5) on voimassa kaikilla ei-negatiivisilla reaaliluvuilla x.

Merkitsemällä $a = -\ln g(1)$ saamme

$$g(x) = \mathrm{e}^{-ax}. \tag{6}$$

Siis g:n täytyy olla muotoa (6), missä $a \in \mathbb{R}$ on mielivaltainen. Toisaalta jokainen tämänmuotoinen funktio toteuttaa selvästi funktionaaliyhtälön (1). Näin ollen tuon funktionaaliyhtälön kaikki oikealta jatkuvat ratkaisut ja vain ne ovat muotoa (6) (ja siis jatkuvia).

Kertymäfunktiota F koskeva vastaava ehto on

$$\bar{F}(x) = \mathrm{e}^{-ax}$$

eli

$$F(x) = 1 - \mathrm{e}^{-ax}$$

kaikilla $x \geq 0$. Mutta nyt täytyy olla $a > 0$, jotta F olisi kertymäfunktio. On helppo nähdä, että $F(x) = 0$, kun $x < 0$. Olemme siis osoittaneet, että eksponenttijakauma on ainoa muistiton jakauma.

Seuraava esimerkki on asiallisesti sama kuin [2, esim. 5.2]. Olkoon P jokin sellainen paikka, jossa "asiakkaita" palvellaan kahdelta "luukulta" tai muusta "palvelupisteestä". Kun A tulee P:hen, kummallakin luukulla on asiakas; olkoot he B ja C. Ottamansa jonotusnumeron perusteella A pääsee asioimaan heti sen jälkeen, kun B tai C on lopettanut. Saatuaan asiansa toimitetuksi A poistuu heti. Millä todennäköisyydellä joko B tai C vielä jatkaa silloin asiointiaan?

Tätä tehtävää ei tietenkään voida ratkaista ilman lisäoletuksia. On yksinkertaisinta olettaa, että luukulla asioinnin kesto noudattaa eksponenttijakaumaa tietyllä parametrilla a. Kun A pääsee luukulle, asiointi toisella luukulla kestää vielä ajan, joka eksponenttijakauman muistittomuuden takia noudattaa tätä samaa eksponenttijakaumaa. Olkoon X siellä asioiva B tai C. Tällöin A:n ja X:n välinen tilanne on täysin symmetrinen, joten kysytty todennäköisyys on $\frac{1}{2}$.

Mutta eikös todennäköisyyden sille, että X saa asiansa toimitetuksi ennen A:ta, pitäisi olla suurempi kuin $\frac{1}{2}$, koska X on jo ehtinyt jonkin aikaa asioida A:n aloittaessa? Oikeastaan todennäköisyys $\frac{1}{2}$ saattaa vaikuttaa suorastaan järjettömältä. Kuitenkin järjellisyys tai järjettömyys riippuu täysin siitä, miten hyvin tai huonosti eksponenttijakauma sopii mallintamaan asioinnin kestoa. Lukijan mietittäväksi jää keksiä esimerkki, jossa tämä jakauma sopii hyvin, ja toinen esimerkki, jossa se sopii huonosti. Tämä tehtävä on helppo, mutta lukija saa myös vaikean tehtävän: Onko funktionaaliyhtälöllä (1) epäjatkuvia ratkaisuja?

Viitteet

[1] M. Halmetoja, K. Häkkinen, J. Merikoski, L. Pippola, H. Silfverberg, T. Tossavainen, *Matematiikan taito 13: Differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssi*, WSOY, 2008.

[2] S. M. Ross, *Introduction to Probability Models.* 7th Ed., Acad. Pr., 2000.