Jännenelikulmioiden juhlaa – Tyttöjen matematiikkaolympialaisten tehtäväsatoa

Anne-Maria Ernvall-Hytönen
Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

Cambridgessa järjestettiin 10–16.4.2012 kautta aikain ensimmäiset Euroopan tyttöjen matematiikkaolympialaiset. Kilpailun idea oli saatu Kiinasta, jossa tyttöjen kilpailuja on ollut jo pitkään. Kilpailun tarkoitus oli kannustaa tyttöjä matematiikkakilpailuihin tarjoamalla yksi mukava väliporras matkalla kansainvälisiin matematiikkaolympialaisiin. Ajatus on hyvä: kansainvälisissä matematiikkaolympialaisissa tyttöjen määrä on vain n. 10 %, jolloin moni tyttö väistämättä tuntee itsensä joukosta poikkeavaksi. Tehtävät ovat haastavia. Tarkoituksella.

Kilpailuun osallistui joukkue kuudestatoista Euroopan maasta, sekä Indonesiasta, Saudi-Arabiasta ja Yhdysvalloista. Suomea edustivat Pihla Karanko, Katja Kulmala, Neea Palojärvi ja Jiali Yan. Joukkueenjohtajana toimi FT Anne-Maria Ernvall-Hytönen ja varajohtajana FL Esa Vesalainen. Jiali Yan saavutti pronssimitaliin oikeuttavan sijan, ja Neea Palojärvi sai kunniamaininnan. Kilpailun voittivat Bulgarian Pavlena Nenova ja Yhdysvaltain Danielle Wang. Suomen joukkueen osallistumisen mahdollisti Teknologiateollisuuden satavuotissäätiön sekä Matematiikan rahaston tuki.

Keskustellaanpa vielä hetki tehtävien valinnan filosofiasta ennen itse tehtäviin siirtymistä. Kilpailu on kaksipäiväinen, molempina päivinä neljä tehtävää ja aikaa neljä ja puoli tuntia. Molempina päivinä on tarkoitus olla yksi helppo tehtävä, eli tehtävät 1 ja 5. Matematiikkakilpailujen tyypilliset alat – algebra, geometria, kombinatoriikka ja lukuteoria – ovat kaikki edustettuna molempina päivinä. Algebra ei täälläkään ole varsinaista algebraa siinä mielessä kuin se yliopistossa ymmärretään, vaan kokonaisuus kilpailumatematiikan osa-aloja, kuten funktionaaliyhtälöitä, epäyhtälöitä, polynomeja, jonoja jne. Kilpailun tehtävät oli valinnut komitea, eikä siis joukkueenjohtajista koostuva raati. Tehtäväsarja oli hyvä, mutta en voi väittää kannattavani kyseistä mallia, jossa joukkueenjohtajien valta on redusoitu veto-oikeuden käyttöön tehtävän kohdalla, mikäli ehdokas on jo tunnettu. Joukkueenjohtajat tietenkin myös käänsivät tehtävät.

Viimeisen tehtävän (tehtävä 8) on tarkoitus olla hyvin hankala, kuten tehtävänvalintakomitean johtaja Geoff Smith luonnehti: ”Siltä varalta, että täällä on uusi Lisa Sauermann, että hänelläkin on jotain tekemistä.” (Lisa Sauermann on IMO:n historian Hall of Famen kärki, joka hallitsi kilpailuja muutamat viime vuodet.) Toinen huomattava asia on, että molemmissa geometrian tehtävissä seikkailee jännenelikulmio. Jännenelikulmiot ovat toki erinomaisen hyödyllisiä, mutta hieman yllättävältä tämä silti tuntuu. Kuitenkin ehkäpä vielä yllättävämpää oli, että tulkinnan mukaan kolme tai neljä tehtävää oli enemmän tai vähemmän kombinatorisia.

Tehtävät

Tehtävä 1. Olkoon ABC kolmio, jonka ympäri piirretyn ympyrän keskipiste on O. Pisteet D, E ja F ovat sivujen BC, CA ja AB sisäpisteitä, tässä järjestyksessä, niin että DE on kohtisuorassa CO:ta vastaan ja DF on kohtisuorassa BO:ta vastaan. (Se, että piste on sisäpiste, tarkoittaa esimerkiksi, että piste D on suoralla BC, ja että D on pisteiden B ja C välissä tuolla suoralla.) Olkoon K kolmion AFE ympäri piirretyn ympyrän keskipiste. Osoita, että suorat DK ja BC ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

Tehtävä 2. Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Määritä luvun n funktiona suurin mahdollinen positiivinen kokonaisluku m, jolla on seuraava ominaisuus: Taulukko, jossa on m riviä ja n saraketta voidaan täyttää reaaliluvuilla niin, että mille tahansa kahdelle eri riville $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ ja $[b_1, b_2, \cdots, b_n]$ pätee

$$\max(|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|, \ldots, |a_n - b_n|) = 1.$$

Tehtävä 3. Etsi kaikki funktiot $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, joilla

$$f\left(yf(x+y) + f(x)\right) = 4x + 2yf(x+y)$$

kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$.

Tehtävä 4. Kokonaisluvuista koostuvaa joukkoa A kutsutaan summatäydeksi, jos $A \subset A + A$, eli jos jokainen joukon A alkio $a \in A$ on joukon A jonkin alkioparin $b, c \in A$ summa (b ja c eivät välttämättä ole erisuuria). Kokonaisluvuista koostuvan joukon A sanotaan olevan nollasummavapaa, jos 0 on ainoa kokonaisluku, jota ei voida esittää joukon A äärellisen epätyhjän osajoukon alkioiden summana. Onko olemassa summatäyttä nollasummavapaata kokonaisluvuista koostuvaa joukkoa?

Tehtävä 5. Luvut p ja q ovat alkulukuja ja toteuttavat ehdon

$$\frac{p}{p+1} + \frac{q+1}{q} = \frac{2n}{n+2}$$

jollakin positiivisella kokonaisluvulla n. Etsi kaikki mahdolliset erotuksen $q - p$ arvot.

Tehtävä 6. Äärettömän monta ihmistä on rekisteröityneenä yhteisöverkkoon, jonka nimi on Pärstäkerroin. Jotkut kahden eri käyttäjän muodostamat parit ovat rekisteröityneet ystäviksi, mutta jokaisella käyttäjällä on vain äärellinen määrä ystäviä. Jokaisella käyttäjällä on ainakin yksi ystävä. (Ystävyys on symmetristä, eli jos A on käyttäjän B ystävä, niin B on käyttäjän A ystävä.) Jokaisen on valittava yksi ystävistään parhaaksi ystäväkseen. Jos A valitsee käyttäjän B parhaaksi ystäväkseen, ei siitä (valitettavasti) seuraa, että B valitsisi käyttäjän A parhaaksi ystäväkseen. Sellaista joka on valittu parhaaksi ystäväksi, kutsutaan 1-parhaaksi ystäväksi. Yleisemmin, jos $n > 1$ on positiivinen kokonaisluku, niin käyttäjä on n-paras ystävä, jos hänet on valittu sellaisen käyttäjän parhaaksi ystäväksi, joka on $(n-1)$-paras ystävä. Sellaista, joka on k-paras ystävä kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla k, kutsutaan suosituksi.
(a) Todista, että jokainen suosittu käyttäjä on jonkun suositun käyttäjän paras ystävä.
(b) Osoita, että jos käyttäjillä voi olla äärettömän paljon ystäviä, niin on mahdollista, että suosittu käyttäjä ei ole yhdenkään suositun käyttäjän paras ystävä.

Tehtävä 7. Olkoon ABC teräväkulmainen kolmio, jonka ympäri piirretty ympyrä on Γ ja ortokeskus H. Olkoon K sellainen ympyrän Γ piste, joka on eri puolella janaa BC kuin A. Olkoon L pisteen K peilaus suoran AB suhteen, ja olkoon M pisteen K peilaus suoran BC suhteen. Olkoon E toinen kolmion BLM ympäri piirretyn ympyrän ja ympyrän Γ leikkauspiste. Osoita, että suorat KH, EM ja BC leikkaavat samassa pisteessä. (Kolmion ortokeskus on korkeusjanojen leikkauspiste.)

Tehtävä 8. Sana on jonkin aakkoston kirjainten äärellinen jono. Sana on *toistava*, jos se on on saatu kirjoittamalla peräkkäin vähintään kaksi identtistä sanaa (esimerkiksi *ababab* ja *abcabc* ovat toistavia, mutta *ababa* ja *aabb* eivät ole). Osoita, että jos sanalla on sellainen ominaisuus, että minkä tahansa kahden vierekkäisen kirjaimen paikan vaihtaminen keskenään tekee siitä toistavan, niin sen kaikki kirjaimet ovat samoja. (Huomaa, että on mahdollista vaihtaa kahden vierekkäin sijaitsevan identtisen kirjaimen paikkaa säilyttäen sana samana.)

Ratkaisut

Ratkaisu 1. Kehäkulmalauseen nojalla $\angle COB = 2\angle A$. Lisäksi $OB = OC$, joten $\angle OBC = \angle BCO = 90° - \angle A$. Samoin $\angle FKE = 2\angle A$ ja $\angle KFE = \angle FEK = 90° - \angle A$. Koska DE ja CO ovat kohtisuorassa toisiaan vasten, pätee $EDC = 90° - \angle DCO = 90° - \angle BCO = \angle A$, ja vastaavasti $\angle BDF = \angle A$, joten $\angle FDE = 180° - 2\angle A$. Täten $KFDE$ on jännenelikulmio, joten samaa jännettä vastaaville kulmille pätee $\angle KDE = \angle KFE = 90° - \angle A$. Siis $\angle KDC = 90°$, joten DK on kohtisuorassa suoraa BC vastaan.

Ratkaisu 2. Missään vaaditut ominaisuudet täyttävässä taulukossa ei sarakkeen suurin ja pienin alkio voi erota kuin korkeintaan yhdellä. Siispä, jos jokainen sarakkeen arvo, joka ei ole suurin eikä pienin, vaihdetaan (ihan miten vaan) sarakkeen suurimmaksi tai pienimmäksi arvoksi, ei se muuta minkään sellaisten a_i, b_i arvoja, joilla $|a_i - b_i| = 1$, eikä se myöskään muuta mitään erotusta suuremmaksi kuin yksi, joten taulukolla on yhä vaadittu ominaisuus. Kuitenkin tällaisen muutoksen jälkeen, riippumatta siitä, mitä minkäkin sarakkeen pienin ja suurin arvo ovat, on jokaisessa sarakkeessa vain kaksi mahdollista vaihtoehtoa, suurempi ja pienempi. Koska tehtävän ehdon mukaan mitkään kaksi riviä eivät voi olla identtisiä, erilaisia rivejä voi olla korkeintaan 2^n kappaletta. Tämä on siis ehdoton maksimi. Toisaalta, tämä voidaan saavuttaa ottamalla taulukkoon kaikki n:n alkion mittaiset luvuista 0 ja 1 koostuvat rivit.

Ratkaisu 3. Kun $y = 0$, saadaan $f(f(x)) = 4x$, joten f on bijektio. Lisäksi

$$f(0) = f(4 \cdot 0) = f(f(f(0))) = 4f(0),$$

ja täten $f(0) = 0$. Kun $x = 0$ ja $y = 1$, saadaan tehtävänannon yhtälön sekä ensimmäisen yhtälön avulla

$$4 = f(f(1)) = 2f(1),$$

joten $f(1) = 2$, ja $f(2) = f(f(1)) = 4$. Sijoituksella $y = 1 - x$ saadaan

$$f(2(1-x) + f(x)) = 4x + 4(1-x) = 4 = f(2)$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Koska f on injektio, saadaan $f(x) = 2 - 2(1-x) = 2x$. On helppo tarkistaa, että tämä funktio toteuttaa alkuperäisen ehdon. Siispä $f(x) = 2x$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$ on etsitty funktio.

Ratkaisu 4. Ehkä yllättävästikin tällainen joukko on olemassa. Asetetaan

$$A = \{F_{2n} \mid n = 1, 2, \ldots\} \cup \{-F_{2n+1} \mid n = 1, 2, \ldots\},$$

missä F_k on k:s Fibonaccin luku ($F_1 = 1$, $F_2 = 1$. $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$, kun $k \geq 1$), ja osoitetaan, että tämä käy esimerkistä. Nyt $F_{2n} = F_{2n+2} + (-F_{2n+1})$ ja $-F_{2n+1} = (-F_{2n+3}) + F_{2n+2}$, kun $n \geq 1$, joten A on summatäysi (ja peräti yksikäsitteisellä esityksellä). Fibonaccin luvuille pätee $F_2 = F_1$, $F_3 = F_2 + 1$. Näistä ja luvut määrittelevästä palautuskaavasta saadaan induktiolla $F_{2k} = F_{2k-1} + F_{2k-3} + \cdots + F_1$ ja $F_{2k+1} = F_{2k} + F_{2k-2} + \cdots + F_2 + 1$. Näistä ominaisuuksista seuraa, että 0 ei ole kahden A:n alkion summa. Jos näin olisi, olisi myös

$$\sum_{i=1}^{s} F_{2n_i} = \sum_{j=1}^{t} F_{2n_j+1}.$$

Molemmissa summissa on oltava enemmän kuin yksi yhteenlaskettava, joten se summista, jossa suurin yhteenlaskettava on suurempi, on itseisarvoltaan aidosti suurempi kuin toinen.

Riittää siis osoittaa, että kaikki nollasta poikkeavat kokonaisluvut voidaan esittää joukon A erisuurten alkioiden summana, eli lukujen $1, -2, 3, -5, 8, -13, 21, \ldots$ avulla. Tämä voidaan tehdä käyttäen niin kutsuttua ahnetta algoritmia: Kun esitetään luku n, aloitetaan valitsemalla $m = \pm F_k$, missä $|m| \geq |n|$, lukujen n ja m etumerkit ovat samat, ja m on itseisarvoltaan pienin nämä ehdot toteuttava luku. Tämän jälkeen jatketaan induktiivisesti, käsitellen seuraavaksi lukujen m ja n erotus. On helppo nähdä, että mitään lukua ei käytetä kahdesti: Osoitetaan tämä induktiolla. Tapaus $k = 2$ (eli $m = 1$) on alkutilanne. Induktio-oletus on, että niillä n, joilla algoritmi alkaa alkiolla $\pm F_\ell$, kun $\ell \leq k$, ei mitään alkiota jouduta käyttämään kahdesti, eikä myöskään jouduta käyttämään alkioita $\pm F_j$, kun $j > \ell$. Induktion saattaminen loppuun on suoraviivaista.

Ratkaisu 5. Tämä tehtävä on ratkaistavissa tarkastelemalla lukujen p, q ja n parillisuutta, ja jakamalla tarkastelu osiin. Käydään tässä kuitenkin läpi hieman lyhyempi, joskin ehkä hieman enemmän kekseliäisyyttä vaativa ratkaisu.

Kun tehtävän yhtälön molemmilta puolilta vähennetään 2, ja kerrotaan yhtälö tämän jälkeen luvulla -1, saadaan

$$\frac{1}{p+1} - \frac{1}{q} = \frac{4}{n+2}.$$

Täten $q > p + 1$. Edelleen

$$q - p - 1 = \frac{4(p+1)q}{n+2}.$$

Koska q ei voi olla luvun $p+1$ tekijä (eli vasen puoli ei ole luvulla q jaollinen), on luvun q oltava luvun $n+2$ tekijä. Kirjoitetaan $\frac{n+2}{q} = u$, missä u on positiivinen kokonaisluku. Nyt

$$q - p - 1 = \frac{4(p+1)}{u},$$

joten $uq - u(p+1) = 4(p+1)$. Täten $p+1$ on luvun uq tekijä. Koska q on alkuluku ja $q > p+1$, ei $p+1$ voi olla luvun q tekijä, vaan sen on oltava u:n tekijä. Kirjoitetaan $v = \frac{u}{p+1}$. Nyt

$$q - p = 1 + \frac{4}{v} \in \{2, 3, 5\}.$$

Kaikki kolme tapausta ovat mahdollisia, sillä kolmikoksi (p, q, n) voidaan valita $(3, 5, 28)$ tai $(2, 5, 28)$ tai $(2, 7, 19)$. Huomaa, että kaikki alkulukukaksoset tuottavat ratkaisun kolmikolla $(p, p+2, 2(2p^2 + 6p + 3))$.

Ratkaisu 6. Merkitään henkilön A parasta ystävää $f(A)$:lla. Olkoon lisäksi $f^0(x) = x$, ja $f^{k+1}(x) = f(f^k(x))$, eli kuka tahansa, joka on k-paras ystävä, on $f^k(A)$ jollekin A. Olkoon X suosittu, ja olkoon x_k sellainen henkilö, jolle $f^k(x_k) = X$. Koska henkilöllä X on vain äärellinen määrä ystäviä, äärettömän monen henkilöistä $f^{k-1}(x_k)$ (jotka kaikki siis ovat valinneet henkilön X parhaaksi ystäväkseen) on oltava samoja, jonka siis myös täytyy olla suosittu.

Jos taas on mahdollista olla äärettömän paljon ystäviä, niin tarkastellaan henkilöitä X_i positiivisilla kokonaisluvuilla i ja henkilöitä $P_{i,j}$, missä $i < j$ ja j on positiivinen kokonaisluku. Valitkoon X_i henkilön X_{i+1} parhaaksi ystäväkseen, ja valitkoon taas $P_{i,i}$ henkilön X_1 parhaaksi ystäväkseen, ja valitkoon $P_{i,j}$ henkilön $P_{i+1,j}$ parhaaksi ystäväkseen, kun $i < j$. Nyt kaikki henkilöt X_i ovat suosittuja, mutta X_1 ei ole suositun henkilön paras ystävä.

Ratkaisu 7. Koska $BMEL$ on jännenelikulmio, pätee $\angle BEM = \angle BLM$. Lisäksi tehtävänannon konstruktion mukaan $|BK| = |BL| = |BM|$, joten

$$\begin{aligned}\angle BLM &= 90^\circ - \frac{1}{2}\angle MBL\\ &= 90^\circ - \left(180^\circ - \frac{1}{2}\angle KBL - \frac{1}{2}\angle KBM\right)\\ &= \left(\frac{1}{2}\angle KBL + \frac{1}{2}\angle KBM\right) - 90^\circ\\ &= (180^\circ - \angle B) - 90^\circ\\ &= 90^\circ - \angle B.\end{aligned}$$

Huomataan myös, että $\angle BEM = \angle BAH$, joten suorien EM ja AH leikkauspiste N on ympyrällä Γ. Olkoon X suorien KH ja BC leikkauspiste, ja olkoon N' suorien MX ja AH leikkauspiste. Koska BC puolittaa jänteen KM, kolmio KM on tasakylkinen. Koska suorat AH ja MK ovat yhdensuuntaisia, kolmio HXN' on tasakylkinen. Koska suorat AH ja BC ovat kohtisuorassa toisiaan vasten, on N' pisteen H peilaus suoran BC suhteen. Tunnetusti tällainen peilaus on ympäripiirretyllä ympyrällä, eli ympyrällä Γ, joten $N = N'$. Täten pisteet E, M, N ja M, X, N' ovat samalla suoralla MN, eli suora EM kulkee pisteen X kautta.

Ratkaisu 8. Tätä tehtävää voi lähestyä hyvin monella eri tavalla. Esitetään nyt ratkaisu, joka ei ole käsittämättömän pitkä, ja joka ei käytä mitään kovin syvällistä tietämystä.

Kutsutaan sanaa vakioksi, jos sen kaikki kirjaimet ovat samoja. Tarkastellaan epävakiota sanaa W, jonka pituus $|W| = w$, ja johdetaan tästä (ennen pitkää) ristiriita tehtävän väitteen kanssa, eli tehdään vastaoletustodistus. Koska sanassa W on ainakin kaksi erisuurta kirjainta, olkoon $W = AabB$, missä $a \neq b$. Voidaan olettaa, että $B = cC$, epätyhjä sana, eli $W = AabcC$ (emme oletaan mitään sanoista A ja C, edes epätyhjyyttä). Sopivilla vaihdoilla saadaan toistavat sanat $W' = AbacC = P^{w/p}$, jonka jakson P pituus p jakaa luvun w, $1 < p < w$ ja $W'' = AacbC = Q^{w/q}$, jonka jakson Q pituus q jakaa luvun q, $1 < q < w$. Kuitenkin, jos sana UV on toistava, niin on myös sana VU toistava, ja samalla jakson mitalla (mutta jakso ei välttämättä ole sama). Voimmekin siis jatkossa työskennellä toistavien sanojen $W_0' = CAbac$ (jakso P', jakson pituus p) ja $W_0'' = CAacb$ (jakso Q', jakson pituus q) kanssa. Nyt pääajatus on se, että kahden toistavan sanan yhteinen alkuosa ei voi olla liian pitkä.

Jos sana $a_1a_2\dots a_w = T^{w/t}$ on toistava, jaksolla T ja jakson pituudella $t \mid w$, $1 \le t \le w$. niin silloin sana (ja sen alasanat ovat t-jaksoisia, eli $a_k = a_{k+t}$ kaikilla $1 \le k \le w-t$. Siispä sana CA on sekä p-jaksoinen että q-jaksoinen.

Tässä kohtaa voisi käyttää Wilf-Finen lausetta, mutta koska se ei yleissivistykseen kuulu, muotoillaan ja todistetaan hieman heikompi väite.

Väite. Olkoot p ja q positiivisia kokonaislukuja, ja olkoon N sana, jonka pituus on n, ja joka on sekä p-jaksollinen että q-jaksollinen. Jos $n \ge p+q$, niin N on $\mathrm{syt}(p,q)$-jaksollinen.

Todistus. Osoitetaan ensin, että kaksi epätyhjää sanaa kommutoi, eli $UV = VU$, jos ja vain jos on olemassa sana W, joka toteuttaa ehdot $|W| = \mathrm{syt}(|U|, |V|)$, $U = W^{|U|/|W|}$ ja $V = W^{|V|/|W|}$. On ilmeistä, että tällaisen sanan olemassaolosta seuraa kommutointi. Riittää siis osoittaa, että kommutointi edellyttää tätä. Käytetään induktiota luvulle $|U| + |V|$. Alkuaskeleessa $|U| + |V| = 2$, eli $|U| = |V| = 1$, jolloin ilmeisesti $W = U = V$. Kun $|U| + |V| > 2$, jos $|U| = |V|$, niin tällöin on pädettävä $U = V$, jolloin tilanne on selvä. Jos $|U| \neq |V|$, niin voidaan olettaa, että $|U| < |V|$, jolloin $V = UV'$, eli $UUV' = UV'U$, eli $UV' = V'U$, ja koska $|V'| < |V|$, pätee $2 \le |U| + |V'| < |U| + |V|$, jolloin induktio-oletuksen nojalla löytyy sana W, jolla $U = W^{|U|/|W|}$ ja $V' = W^{|V'|/|W|}$, joten $V = UV' = W^{(|U|+|V'|)/|W|} = W^{|V|/|W|}$.

Voidaan nyt olettaa, että $p \le q$, $q = kp + r$, ja pätee $N = QPS$, missä $|Q| = q$ ja $|P| = p$. Jos $r = 0$, on tilanne selvä. Jos taas näin ei ole, niin voidaan kirjoittaa $P = UV$ ja $Q = V(UV)^k$, missä $|V| = r$, ja koska $UV = VU$, niin $PQ = QP$, jolloin ylläolevan tuloksen mukaan on olemassa sana W, jonka pituus on $\mathrm{syt}(p,q)$, ja jonka avulla voidaan kirjoittaa $P = W^{p/\mathrm{syt}(p,q)}$ ja $Q = W^{q/\mathrm{syt}(p,q)}$, eli sana N on $\mathrm{syt}(p,q)$-jaksoinen.

Väite on nyt todistettu, ja voimme palata tehtävän ratkaisuun. Tarvitaan siis $|CA| \le p+q-1$, eli $w \le p+q+2$, sillä muutoin sanat W_0' ja W_0'' olisivat identtisiä, mikä on mahdotonta. Koska $p|w$ ja $1 < p < w$, pätee $2p \le w \le p+q+2$, eli $p \le q+2$. Vastaavasti $q \le p+2$. Täten $\max(p,q) \le \min(p,q)+2$. Ehdosta $k\max(p,q) = w \le p + qp2 \le 2\max p, 2+2$ saadaan $(k-2)\max(p,q) \le 2$, mutta $\max(p,q) \le 2$ on mahdoton, sillä kolmen kirjaimen loppuosa acb ei ole jaksollinen. Ja täten sen on kuuluttava sanaan Q', eli $q \ge 3$. Täten $k = 2$, ja $w = 2\max(p,q)$.

Jos $\max(p,q) = \min(p,q)$, niin $w = 2p = 2q$, mikä on ristiriita.

Jos $\max(p,q) = \min(p,q)+1$, niin $3\min(p,q) \le w = 2\max(p,q) = 2\min(p,q)+2$, eli $\min(p,q) \le 2$, joten $\min(p,q) = 2$ ja $\max(p,q) = 3$, ja ylläolevan havainnon nojalla voidaan todeta $q = 3$ ja $p = 2$, eli $c = b$. Tästä seuraa, että $w = 2\max(p,q) = 6$, joten $CA = aba = abb$, mikä on ristiriita.

Jos $\max(p,q) = \min(p,q)+2$, niin $3\min(p,q) \le w = 2\max(p,q) = 2\min(p,q)+4$, eli $\min(p,q) \le 4$. Koska $\min(p,q) \mid w = 2\max(p,q)$, niin on pädettävä joko $\min(p,q) = 2$ ja $\max(p,q) = 4$, jolloin $w = 8$, mikä on ristiriita, tai $\min(p,q) = 4$ ja $\max(p,q) = 6$, jolloin $w = 12$. Tämä on myös ristiriita.