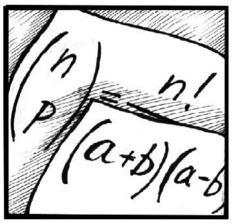


# Vedonlyönnin matematiikkaa

***Jukka Liukkonen***
Metropolia ammattikorkeakoulu

Vedonlyönnissä *vedonlyöntitoimisto* sitoutuu maksamaan vedonlyöjälle eli *asiakkaalle* hänen vetoon sijoittamansa rahamäärän eli *panoksen* tietyllä *kertoimella* kerrottuna, mikäli vedonlyöjän veikkaama tulos toteutuu. Muussa tapauksessa asiakkaan maksamat rahat jäävät vedonlyöntitoimistolle. Jos toimisto julkistaa kertoimet ennen vedonlyönnin alkamista, kertoimia sanotaan *kiinteiksi*. Käytännössä kertoimet useimmiten määräytyvät asiakkaiden yhteenlaskettujen panosten perusteella ja ne muuttuvat sitä mukaa kun uusia vetoja lyödään. Tämän esityksen tavoitteena on tutustuttaa lukija (itse asiassa kirjoittaja, jos rehellisiä ollaan!) vedonlyönnin matematiikkaan ja erityisesti arbitraasin käsitteeseen. Sen takia tarkastelemme mahdollisimman yksinkertaista tilannetta, jossa kertoimet ovat kiinteät.

Olkoon vedonlyönnin *kohteena* kahden jalkapallojoukkueen, sanokaamme $FC_1$ ja $FC_2$, tietyn pelin tulokset kiinteillä kertoimilla. Tulosvaihtoehdot ovat

(1) joukkue $FC_1$ voittaa,

(x) joukkueet pelaavat tasapelin ja

(2) joukkue $FC_2$ voittaa.

Kun tulokset koodataan reaaliluvuiksi $x_1$, $x_2$ ja $x_3$, niitä voidaan pitää satunnaismuuttujan $X$ arvoina: esimerkiksi $x_1 = 1$ ($FC_1$ voittaa), $x_2 = 1.5$ (tasapeli) ja $x_3 = 2$ ($FC_2$ voittaa). Vedonlyöntitoimisto asettaa vedonlyöntikertoimet $\lambda_1$, $\lambda_2$ ja $\lambda_3$ sen perusteella, miten todennäköisiksi se arvioi pelin tulosvaihtoehdot. Kertoimiin vaikuttaa luonnollisesti myös se, kuinka suuren osan asiakkaan sijoittamista varoista toimisto keskimäärin haluaa palauttaa asiakkaalle. Olkoot kohteen tulosvaihtoehtojen $x_1$, $x_2$ ja $x_3$ arvioidut todennäköisyydet vastaavasti $p_1$, $p_2$ ja $p_3$. Niiden summan tulee tietysti olla yksi:

$$p_1 + p_2 + p_3 = \sum_{k=1}^{3} p_k = 1. \tag{1}$$

Jos asiakas sijoittaa vetoihin tulosten $x_1$, $x_2$ ja $x_3$ puolesta $r_1$, $r_2$ ja $r_3$ euroa tässä järjestyksessä, asiakkaan saama *palautus* on vastaavasti $\lambda_1 r_1$, $\lambda_2 r_2$ tai $\lambda_3 r_3$ riippuen siitä, mikä tulosvaihtoehdoista toteutuu:

| Pelin tulos | Todennäköisyys | Kerroin | Panos | Palautus |
|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | $p_1$ | $\lambda_1$ | $r_1$ | $\lambda_1 r_1$ |
| $x_2$ | $p_2$ | $\lambda_2$ | $r_2$ | $\lambda_2 r_2$ |
| $x_3$ | $p_3$ | $\lambda_3$ | $r_3$ | $\lambda_3 r_3$ |

Asiakkaan saaman palautuksen odotusarvo $\mu$ on

$$\mu = p_1\lambda_1 r_1 + p_2\lambda_2 r_2 + p_3\lambda_3 r_3 = \sum_{k=1}^{3} p_k\lambda_k r_k.$$

Merkitään symbolilla $r$ asiakkaan sijoittamien panosten summaa:

$$r = r_1 + r_2 + r_3 = \sum_{k=1}^{3} r_k.$$

Suhdetta $\mu/r$ kutsutaan *palautusprosentiksi*. Jotta vedonlyöntitoimisto hyötyisi toiminnastaan taloudellisesti, palautusprosentin tulee olla pienempi kuin yksi – siis alle 100 %. Yleisessä tapauksessa palautusprosentti riippuu panoksista $r_k$. Kertoimet $\lambda_k$ on kuitenkin mahdollista säätää *panosinvarianteiksi* eli sellaisiksi, että palautusprosentti ei riipu panoksista. Tällöin panostuksilla

$$\begin{cases} r_1 = r \\ r_2 = 0 \\ r_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} r_1 = 0 \\ r_2 = r \\ r_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} r_1 = 0 \\ r_2 = 0 \\ r_3 = r \end{cases}$$

tulee olla sama palautusprosentti $c$. Vaatimukset

$$c = \frac{\mu}{r} = \frac{p_i \lambda_i r}{r} = p_i \lambda_i$$

johtavat *panosinvarianssiehtoihin*

$$\lambda_i = \frac{c}{p_i} \quad \Leftrightarrow \quad p_i = \frac{c}{\lambda_i}, \qquad i = 1,2,3. \tag{2}$$

Merkitsemällä

$$\Lambda = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{\lambda_i}$$

ja ottamalla huomioon yhtälö (1) saadaan

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} &= \frac{1}{c} \sum_{i=1}^{3} p_i = \sum_{i=1}^{3} \frac{p_i}{c} \\ &= \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{\lambda_i} = \Lambda \quad \Rightarrow \quad c = \frac{1}{\Lambda}. \end{aligned} \tag{3}$$

Tässä artikkelissa kertoimet oletetaan panosinvarianteiksi, ellei erikseen mainita.

**Esimerkki 1** Olkoot vedonlyöntitoimiston ilmoittamat panosinvariantit vedonlyöntikertoimet $\lambda_1 = 2.30$, $\lambda_2 = 2.90$ ja $\lambda_3 = 3.00$. Koska

$$\Lambda = \frac{1}{2.30} + \frac{1}{2.90} + \frac{1}{3.00} \approx 1.1129,$$

palautusprosentti on

$$c \approx \frac{1}{1.1129} \approx 0.8986 \approx 90\ \%.$$

Vedonlyöntitoimiston arvioimat todennäköisyydet ovat siten

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{c}{\lambda_1} \approx \frac{0.8986}{2.30} \approx 0.3907 \approx 39\ \% \\ p_2 &= \frac{c}{\lambda_2} \approx \frac{0.8986}{2.90} \approx 0.3099 \approx 31\ \% \\ p_3 &= \frac{c}{\lambda_3} \approx \frac{0.8986}{3.00} \approx 0.2995 \approx 30\ \% \end{aligned}$$

■

Summasta

$$\sum_{k=1}^{3} cr\lambda_k^{-1} = cr \sum_{k=1}^{3} \frac{1}{\lambda_k} = cr\Lambda \overset{(3)}{=} r$$

nähdään, että panokset voidaan asettaa kaavan

$$r_k = cr\lambda_k^{-1} \tag{4}$$

mukaisiksi, $k = 1,2,3$. Tällä panostuksella asiakkaan saama palautus on aina tasan $cr$. Vaihtoehdon $x_i$ toteutuessa nimittäin palautus on $\lambda_i r_i = \lambda_i cr\lambda_i^{-1} = cr$ kaikilla $i = 1,2,3$. Panostusta (4) voidaan siis kutsua *neutraaliksi panostukseksi*. Tilanne muuttuu asiakkaan kannalta mielenkiintoiseksi, jos

$$\Lambda < 1. \tag{5}$$

Silloin palautusprosentti on yhtälön (3) nojalla suurempi kuin 100 %. Mikään positiiviseen taloudelliseen tulokseen tähtäävä vedonlyöntitoimisto ei tahallaan aseta tällaisia kertoimia, mutta entä jos toimistoja on useita ja niillä on erilaiset kertoimet samalle kohteelle. Asiakashan voi hajauttaa vetonsa eri toimistojen kesken. Toimistot ovat saattaneet arvioida kohteen tulosvaihtoehtojen todennäköisyydet eri tavalla, mistä on seurauksena eri kertoimet yhtälön (2) mukaisesti.

Olkoon ehto (5) voimassa. Tutkitaan mahdollisuutta saada voitto $v$ varmasti. Kaikilla $i = 1,2,3$ pitää siis olla

$$\lambda_i r_i - r = v \quad \Leftrightarrow \quad r_i = \frac{r+v}{\lambda_i}. \tag{6}$$

Summaamalla saadaan

$$\begin{aligned} r &= \sum_{i=1}^{3} r_i = (r+v) \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{\lambda_i} = (r+v)\Lambda \\ \Leftrightarrow \quad & (1-\Lambda)\, r = v\Lambda \\ \Leftrightarrow \quad & r = \frac{\Lambda}{1-\Lambda}\, v. \end{aligned} \tag{7}$$

Tällöin

$$r_i \overset{(6)}{=} \frac{\frac{\Lambda}{1-\Lambda} v + v}{\lambda_i} = \frac{v}{(1-\Lambda)\lambda_i}.$$

Yhteenvetona saadaan seuraava tulos:

**Lause 1** Jos vedonlyöntikertoimet toteuttavat yhtälön $\Lambda < 1$, ja panokset ovat

$$r_i = \frac{v}{(1-\Lambda)\lambda_i}, \quad i = 1,2,3,$$

asiakas saa aina positiivisen voiton $v$ riippumatta siitä, mikä tulosvaihtoehdoista $x_1$, $x_2$ ja $x_3$ toteutuu.

Lauseessa kuvattu vedonlyöntimenettely on esimerkki *arbitraasista*, hinnoitteluerojen mahdollistamasta riskittömään tuottoon johtavasta toimintatavasta. Arbitraasi voidaan toteuttaa vain ehdolla $\Lambda < 1$.

**Esimerkki 2** Muutetaan esimerkki 1 sellaiseksi, että vetoa lyödään samanaikaisesti kolmessa vedonlyöntitoimistossa. Oheiseen taulukkoon on merkitty kunkin toimiston osalta palautusprosentti ja toimiston arvio tulosvaihtoehtojen todennäköisyyksistä. Lopuksi on laskettu kerrointen käänteisluvuille $\lambda_k^{-1} = p_k c^{-1}$ likiarvot. Toimisto numero 3 on sama kuin esimerkissä 1.

| Tsto | Pal.-pros. | Todennäköisyydet prosentteina | | | Kerrointen käänteisluvut | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $c$ | $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ | $\lambda_1^{-1}$ | $\lambda_2^{-1}$ | $\lambda_3^{-1}$ |
| 1 | 95 | 35 | 29 | 36 | 0.37 | 0.31 | 0.38 |
| 2 | 93 | 42 | 26 | 32 | 0.45 | 0.28 | 0.34 |
| 3 | 90 | 39 | 31 | 30 | 0.43 | 0.34 | 0.33 |

Ideana on veikata kussakin toimistossa vain yhtä tulosvaihtoehtoa. Katsomalla kolmelta viimeisimmältä sarakkeelta pienimmät luvut havaitaan, että summa $\Lambda = \lambda_1^{-1} + \lambda_2^{-1} + \lambda_3^{-1}$ saa pienimmän arvon, kun toimistossa 1 veikataan tulosta $x_1$, toimistossa 2 veikataan tulosta $x_2$ ja toimistossa 3 veikataan tulosta $x_3$ (sattumalta tuli sama järjestys). Koska tämä pienin arvo on $0.98 < 1$, voimme soveltaa arbitraasivedonlyöntiä.

Seuraavassa taulukossa ajatellaan, että vetoa lyödään kuvitteellisessa toimistossa, jonka kertoimet on kerätty kolmesta todellisesta toimistosta edellä kuvatun mukaisesti. Todennäköisyyksiä merkitään sekaannusten välttämiseksi symbolilla $q_k$. Viimeisille sarakkeille on laskettu kertoimet $\lambda_k = c_k q_k^{-1}$ ja panokset $r_k = v(1-\Lambda)^{-1}\lambda_k^{-1}$. Laskenta on tehty maksimitarkkuudella, mutta luvut esitetään kahdella desimaalilla. Panokset on laskettu päämääränä saada 100 euron varma voitto. Siis $v = 100$.

| Tsto | Pal.-pros. | Todennäk. pros. | Kerroin | Panos eur |
|---|---|---|---|---|
| k | $c_k$ | $q_k$ | $\lambda_k$ | $r_k$ |
| 1 | 95 | 35 | 2.71 | 1972.73 |
| 2 | 93 | 26 | 3.58 | 1496.97 |
| 3 | 90 | 30 | 3.00 | 1784.85 |
| $\Sigma$ | | 91 | | 5254.55 |

Koska toimistot ovat erimielisiä todennäköisyyksistä, hajautetussa vedossa eri tulosvaihtoehtojen arvioitujen todennäköisyyksien summa on 91 % eikä 100 %. Asiakkaan saama voitto 100 euroa on vain 1.9 % noin 5250 euron kokonaispanoksesta, mutta se on riskitöntä tuottoa. Muutama tällainen voitto vuodessa tuottaisi sijoitetulle pääomalle tavoittelemisen arvoisen koron. ■

Otetaanpa vielä korostetun yksinkertainen ja äärimmäinen esimerkki, jotta varman voiton mahdollisuus tietyissä olosuhteissa tulisi varmasti selväksi:

**Esimerkki 3** Olkoon veikattavassa kohteessa kaksi tulosvaihtoehtoa $x_1$ ja $x_2$. Hajautetaan veto kahteen toimistoon $\mathrm{T}_1$ ja $\mathrm{T}_2$, joilla kummallakin on palautusprosentti 90 %. Toimisto $\mathrm{T}_1$ arvioi tuloksen $x_1$ todennäköisyydeksi 75 % ja tuloksen $x_2$ todennäköisyydeksi 25 %. Toimiston mielestä tulos $x_2$ tulee siis keskimäärin joka neljännellä pelikerralla. Jos toimisto ei tavoittelisi taloudellista hyötyä, se maksaisi tulosvaihtoehdolle $x_2$ asetetun panoksen nelinkertaisena takaisin asiakkaalle aina, kun tulos $x_2$ sattuu tulemaan. Toimisto kuitenkin haluaa asiakkaan panoksista keskimäärin 10 % itselleen, joten se maksaa tuloksen $x_2$ toteutuessa sille asetetun panoksen vain 3.6-kertaisena takaisin. Vastaavin perustein toimisto maksaa tulokselle $x_1$ asetetun panoksen kertoimella 1.2 kerrottuna takaisin tuloksen $x_1$ toteutuessa. Toimisto $\mathrm{T}_2$ arvioi todennäköisyydet juuri päinvastoin. Sen mielestä tuloksen $x_1$ todennäköisyys on 25 % ja tuloksen $x_2$ todennäköisyys on 75 %.

| Toimisto | Pal.pros. | Todennäköisyydet prosentteina | | Kertoimet | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | $p_1$ | $p_2$ | $\lambda_1$ | $\lambda_2$ |
| $\mathrm{T}_1$ | 90 | 75 | 25 | 1.2 | 3.6 |
| $\mathrm{T}_2$ | 90 | 25 | 75 | 3.6 | 1.2 |

Asiakkaan kannalta merkitykselliset tosiasiat ovat seuraavat:

1) Tuloksen $x_2$ toteutuessa $\mathrm{T}_1$ maksaa vaihtoehdolle $x_2$ asetetun panoksen 3.6-kertaisena takaisin.

2) Tuloksen $x_1$ toteutuessa $\mathrm{T}_2$ maksaa vaihtoehdolle $x_1$ asetetun panoksen 3.6-kertaisena takaisin.

Asiakas päättää lyödä toimiston $\mathrm{T}_1$ kanssa 100 eurolla vetoa sen puolesta, että $x_2$ toteutuu. Lisäksi asiakas päättää lyödä toimiston $\mathrm{T}_2$ kanssa 100 eurolla vetoa sen puolesta, että $x_2$ ei toteudu eli että $x_1$ toteutuu. Tapahtuipa sitten niin tai näin, asiakas saa aina 360 euroa takaisin. Voitto on 160 euroa 200 euron sijoituksella. Asiakas saa siis 80 % riskittömän tuoton sijoittamalleen pääomalle. ■