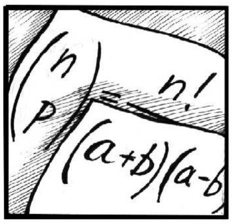
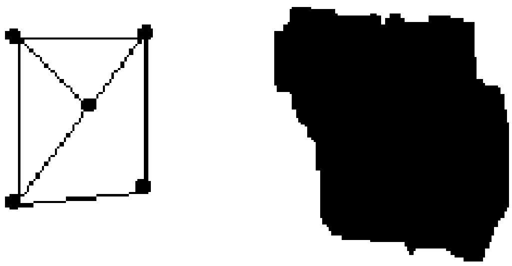


Yhtenäisyydestä

Tuomas Korppi

Johdanto

Tarkastellaan kuvassa 1 näkyviä verkkoa[1] ja $\mathbb{R}^2$:n (eli tason) osajoukkoa.



Kuva 1. Yhtenäinen verkko ja $\mathbb{R}^2$:n osajoukko.

Niillä on yhteinen ominaisuus: Ne ovat kumpikin yhtenäisiä. Kaikki verkot ja $\mathbb{R}^2$:n osajoukot eivät ole yhtenäisiä. Esimerkiksi Kuvassa 2 oleva verkko ja $\mathbb{R}^2$:n osajoukko koostuvat kumpikin kolmesta yhtenäisestä komponentista.

Kuva 2. Epäyhtenäinen verkko ja $\mathbb{R}^2$:n osajoukko.

Kuvan 2 verkko voidaan jakaa kolmeen osaan niin, että osien välillä ei ole verkon kaaria, ja kuvassa 2 näkyvä $\mathbb{R}^2$:n osajoukko voidaan puolestaan jakaa kolmeen osaan niin, että osat ovat kaukana toisistaan. Kuvan 1 objekteilla ei vastaavaa ominaisuutta ole.

Sekä verkkojen yhtenäisyyttä että $\mathbb{R}^2$:n osajoukkojen yhtenäisyyttä kuvaavat teoriat ovat hyvin tunnettuja.

Matemaattista mieltä kiinnostaa kuitenkin kysymys: Onko verkon ja $\mathbb{R}^2$:n osajoukon yhtenäisyydellä (ja vastaavasti yhtenäisillä komponenteilla) jotain yhteistä? Toisin sanoen, onko olemassa yleistä yhtenäisyyden määritelmää, josta seuraisi erikoistapauksina sekä verkon että $\mathbb{R}^2$:n osajoukon yhtenäisyys?

Paljastuu, että tällainen teoria on olemassa, ja se kehitettiin 1900-luvun alkupuolella, joskin nykyään se on painunut suurelta osin unholaan. Se löytyy teoksesta [1], luvuista 14 ja 20. Esitämme sen alla huomattavasti mukaillen.

Esitämme teorian todistuksineen. Matemaattisen tekstin lukemiseen tottumattomat lukijat voivat sivuuttaa todistukset ja vain uskoa tulokset. Niitä lukijoita varten, jotka eivät tunne joukko-opin notaatioita, liitteessä on todellinen crash course aiheesta.

Lähipisteavaruus

Tutkitaan $\mathbb{R}^2$:n osajoukkoa $A = \{(x,0) \mid 0 < x < 1\}$. Sillä on sellainen ominaisuus, että pisteet $(0,0)$ ja $(1,0)$ eivät kuulu kyseiseen joukkoon, mutta kuitenkin ovat

[1] Tässä kirjoitelmassa verkot ovat suuntaamattomia, jos muuta ei mainita.

lähellä joukkoa A. Vastaavasti, jos B on verkon solmujen joukon osajoukko, voidaan ajatella, että solmu on lähellä joukkoa B, jos solmusta on kaari johonkin joukon B solmuun.

Sekä verkon että $\mathbb{R}^2$:n osajoukon rakenne voidaan siis ilmaista läheisyyden avulla: Kerrotaan, mitkä pisteet ovat lähellä mitäkin tutkittavan olion osajoukkoa. Seuraavaksi aksiomatisoimmekin lähelläolemisrelaation, eli annamme sellaisen lähelläolemisen määritelmän, että sitä voidaan soveltaa sekä verkkoihin että $\mathbb{R}^2$:n osajoukkoihin. Seuraavat ominaisuudet tuntuvat luonnollisilta lähelläolemisen ominaisuuksilta.

- Jos x kuuluu joukkoon A, niin se on lähellä joukkoa A.
- Mikään piste ei ole lähellä tyhjää joukkoa.
- Jos $A \subset B$, ja piste x on lähellä joukkoa A, niin x on myös lähellä joukkoa B.

Itse asiassa ilmenee, että nämä ominaisuudet ovat riittäviä sen teorian kehittämiseen, minkä teemme tässä kirjoitelmassa.

Nyt muodollinen määritelmä:

Olkoon X joukko. Merkitään $\mathcal{P}(X)$:llä kaikkien X:n osajoukkojen[2] joukkoa.

Pari $(X, \bar{\in})$ on *lähipisteavaruus*, jos X on joukko ja $\bar{\in}$ on relaatio $\bar{\in} \subset X \times \mathcal{P}(X)$, joka toteuttaa seuraavat aksioomat:

1. Jos $A \subset X$ ja $a \in A$, niin $a \bar{\in} A$.
2. $x \bar{\in} \emptyset$ ei päde millään $x \in X$.
3. Jos $A \subset B \subset X$ ja $x \in X$, jolle $x \bar{\in} A$, niin tällöin $x \bar{\in} B$.

Jos $x \bar{\in} A$, sanomme, että x on joukon A lähipiste. Jos $A \subset X$, merkitään $\operatorname{cl} A = \{x \in X \mid x \bar{\in} A\}$.

Seuraavaksi selitämme, kuinka verkot ja tason osajoukot voidaan mieltää lähipisteavaruuksina.

Olkoon (X, S) verkko, missä X on solmujen joukko ja S kaarien joukko. Määritellään, että jos $x \in X$ ja $A \subset X$, niin x on joukon A lähipiste, $x \bar{\in} A$, jos $x \in A$ tai solmusta x on kaari johonkin joukon A solmuun. Kiinnostunut lukija voi helposti tarkistaa, että antamamme lähipisteen määritelmä verkossa toteuttaa kaikki lähipisterelaation aksioomat. Nyt verkko (X, S) voidaan mieltä lähipisteavaruutena $(X, \bar{\in})$.

Olkoon sitten $X \subset \mathbb{R}^2$. Jos $x, y \in X$, merkitään $d(x, y)$:llä pisteiden x ja y etäisyyttä (linnuntietä). Jos $A \subset X$ ja $x \in X$, sanomme, että x on joukon A lähipiste, $x \bar{\in} A$, jos kaikilla $\epsilon > 0$ on olemassa $y \in A$, jolle $d(x, y) < \epsilon$. Kiinnostunut lukija voi tarkistaa, että antamamme lähipisteen määritelmä toteuttaa kaikki lähipisteavaruuden aksioomat. Nyt X voidaan mieltää lähipisteavaruutena $(X, \bar{\in})$.

Olkoon $X = \mathbb{R}^2$. Esimerkiksi joukon $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid d(x, 0) < 1\}$ lähipisteiden joukko on $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid d(x, 0) \leq 1\}$. Toisena esimerkkinä joukon $A = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid d(x, 0) \leq 1\}$ lähipisteiden joukko on joukko A itse.

Jos $X \subset \mathbb{R}^2$, $(X, \bar{\in})$ toteuttaa vielä seuraavat ehdot:

- Kaikilla $A, B \subset X$ ja kaikilla $x \in X$ pätee $x \bar{\in} (A \cup B)$ jos ja vain jos $x \bar{\in} A$ tai $x \bar{\in} B$.
- Kaikilla $A \subset X$ pätee $\operatorname{cl} \operatorname{cl} A = \operatorname{cl} A$.

Nämä ehdot toteuttavia lähipisteavaruuksia kutsutaan topologisiksi avaruuksiksi, ja ne näyttelevät hyvin keskeistä roolia modernissa matematiikassa.

Yhtenäisyys

Tutkitaan kuvassa 2 esiintyviä verkkoa ja $\mathbb{R}^2$:n osajoukkoa, jotka kumpikin koostuvat kolmesta komponentista. Laittamalla kaksi komponenttia yhteen lokeroon ja yksi komponentti toiseen lokeroon, havaitaan, että ne voidaan kumpikin jakaa kahteen erilliseen osaan (ja helposti havaitaan, että mistä tahansa yhtä suuremmasta komponenttimäärästä koostuva kokonaisuus voidaan aina jakaa kahteen osaan, mutta kahdesta komponentista koostuvaa kokonaisuutta ei voida jakaa useampaan kuin kahteen osaan). Kuvan 1 objekteilla, jotka ovat yhtenäisiä, ei tätä ominaisuutta ole. Näin ollen määrittelemmekin epäyhtenäisyyden käyttäen tätä ideaa:

Olkoon $(X, \bar{\in})$ lähipisteavaruus. Sanomme, että X on *epäyhtenäinen*, jos on olemassa $A, B \subset X$ siten, että seuraavat ehdot pätevät:

1. $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$.
2. $A \cap B = \emptyset$
3. $A \cup B = X$.
4. $\operatorname{cl} A = A$ ja $\operatorname{cl} B = B$.

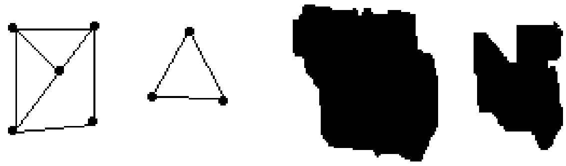
Viimeinen ehto voidaan ilmaista myös muodossa

- Jos $x \in B$, niin $x \bar{\in} A$ ei päde, ja jos $x \in A$, niin $x \bar{\in} B$ ei päde.

Kyseinen ehto siis sanoo, että osien välillä ei vallitse lähipisterelaatioita.

Lukija voi helposti tarkistaa, että kuvan 3 verkko ja $\mathbb{R}^2$:n osajoukko ovat epäyhtenäisiä tämän määritelmän mukaan. (Asian osoittamiseksi valitaan A:ksi ja B:ksi X:n yhtenäiset komponentit.)

[2] Joukon X osajoukoiksi lasketaan myös joukot $\emptyset$ ja X.



Kuva 3. Kahdesta komponentista koostuva verkko ja $\mathbb{R}^2$:n osajoukko.

Sanomme, että $(X, \bar{\in})$ on *yhtenäinen*, jos se ei ole epäyhtenäinen. Kuvassa 1 esitetyt verkko ja $\mathbb{R}^2$:n osajoukko ovat tämän määritelmän mukaan yhtenäisiä.

Komponenttien määrä

Olkoon $(X, \bar{\in})$ lähipisteavaruus. Olkoon $A \subset X$. Nyt $(A, \bar{\in}_A)$ on lähipisteavaruus, kun $\bar{\in}_A \subset A \times \mathcal{P}(A)$ määritellään

$$x \mathrel{\bar{\in}_A} B \text{ jos ja vain jos } x \mathrel{\bar{\in}} B$$

kaikilla $B \subset A, x \in A$. Merkitään A:n sulkeumaoperaattoria cl_A, eli jos $B \subset A$, $\mathrm{cl}_A B$ on kaikkien niiden A:n pisteiden joukko, jotka ovat lähellä joukkoa B.

Ylläolevan määritelmän perusteella mitä tahansa X:n osajoukkoa voidaan käsitellä lähipisteavaruutena, joten minkä tahansa X:n osajoukon yhtenäisyydestä ja epäyhtenäisyydestä voidaan puhua.

Jos $A \subset X$, sanomme, että A on X:n *yhtenäinen komponentti*, jos seuraavat ehdot pätevät:

1. A on yhtenäinen.
2. Jos $B \subset X$ on sellainen, että $A \subset B$, $A \neq B$, niin tällöin B on epäyhtenäinen.

Siis X:n yhtenäiset komponentit ovat X:n maksimaalisia yhtenäisiä osajoukkoja.

Tämän määritelmän nojalla kuvassa 2 on verkko ja $\mathbb{R}^2$:n osajoukko, joilla on kummallakin kolme yhtenäistä komponenttia.

Seuraavaksi todistamme kaksi yhtenäisten komponenttien perustulosta. Ensinnäkin sen, että jokainen piste kuuluu johonkin yhtenäiseen komponenttiin, sekä sen, että kahden yhtenäisen komponentin leikkaus on tyhjä. Aloitamme kuitenkin kahdella lemmalla, joista ensimmäistä käytämme jatkossa ilman eri viittausta.

Lemma 1. *Olkoon $(X, \bar{\in})$ lähipisteavaruus ja $B \subset X$ sellainen, että $\mathrm{cl}\, B = B$. Olkoon $A \subset X$. Tällöin $\mathrm{cl}_A(A \cap B) = A \cap B$.*

Todistus: Selvästi $A \cap B \subset \mathrm{cl}_A(A \cap B)$ ja $\mathrm{cl}_A(A \cap B) \subset A$. Siis täytyy todistaa $\mathrm{cl}_A(A \cap B) \subset B$.

Lähipisteavaruuden määritelmän ehdosta 3 seuraa, että jos $C \subset D$, niin $\mathrm{cl}\, C \subset \mathrm{cl}\, D$. Näin ollen $\mathrm{cl}_A(A \cap B) \subset \mathrm{cl}(A \cap B) \subset \mathrm{cl}\, B = B$. $\square$

Lemma 2. *Olkoon $(X, \bar{\in})$ lähipisteavaruus, ja $(C_i)_{i \in I}$ kokoelma X:n yhtenäisiä osajoukkoja siten, että on olemassa $x \in X$, jolle $x \in C_i$ kaikilla $i \in I$. Tällöin $\bigcup C_i$ on yhtenäinen.*

Todistus: Tehdään vastaoletus: $\bigcup C_i$ on epäyhtenäinen. Olkoot A ja B kuten epäyhtenäisyyden määritelmässä. Symmetrian perusteella voidaan olettaa $x \in A$. Olkoon i sellainen, että $C_i \cap B \neq \emptyset$. Nyt $A \cap C_i$ ja $B \cap C_i$ ovat kuten epäyhtenäisyyden määritelmässä joukolle C_i, joka on yhtenäinen. Ristiriita. $\square$

Korollaari 3. *Olkoon $(X, \bar{\in})$ lähipisteavaruus ja $x \in X$. Tällöin x kuuluu johonkin X:n yhtenäiseen komponenttiin.*

Todistus: Olkoon $(C_i)_{i \in I}$ kaikkien X:n yhtenäisten osajoukkojen kokoelma, jotka sisältävät x:n. Koska x:n yksiö $\{x\}$ on yhtenäinen, kokoelma on epätyhjä. Lemman 2 nojalla $\bigcup C_i$ on maksimaalinen yhtenäinen osajoukko, eli yhtenäinen komponentti. $\square$

Korollaari 4. *Jos C ja D ovat X:n yhtenäisiä komponentteja, $C \neq D$, niin $C \cap D = \emptyset$.*

Todistus: Tehdään vastaoletus, $C \cap D \neq \emptyset$. Joko $C \not\subset D$ tai $D \not\subset C$. Oletetaan symmetrian perusteella ensimmäinen. Nyt $C \cup D$ on Lemman 2 nojalla yhtenäinen, joten D ei ole maksimaalinen, eikä näin ollen yhtenäinen komponentti. Ristiriita. $\square$

Yhtenäiseksi todistaminen

Lähipisteavaruuksia voidaan todistaa epäyhtenäisiksi yksinkertaisesti löytämällä joukot A ja B, jotka ovat kuten epäyhtenäisyyden määritelmässä. Yhtenäiseksi todistaminen on usein vaikeampaa, ja tässä luvussa esittelemme pari tulosta, joista yhtenäisyys tietyissä tapauksissa seuraa.

Aluksi esittelemme tuloksen, jonka avulla voidaan osoittaa verkon yhtenäisyys. Olkoon $(X, \bar{\in})$ verkkoa vastaava lähipisteavaruus ja $x \in X$. Merkitään $\mathrm{cl}\, x = \mathrm{cl}\{x\}$, ja $\mathrm{cl}^n x = \mathrm{cl}\,\mathrm{cl} \ldots \mathrm{cl}\, x$, missä sulkeumia otetaan n kappaletta.

Teoreema 5. *Olkoon $(X, \bar{\in})$ verkkoa vastaava lähipisteavaruus ja $x \in X$. Jos on olemassa $n \in \mathbb{N}$, jolle $\mathrm{cl}^n x = X$, niin X on yhtenäinen.*

Todistus: Tehdään vastaoletus: X on epäyhtenäinen. Olkoot A ja B kuten epäyhtenäisyyden määritelmässä. Symmetrian perusteella voidaan olettaa $x \in A$. Määritellään jokaiselle $y \in X$ arvo $v(y)$ siten, että $v(y)$ on pienin luku m, jolla $y \in \mathrm{cl}^m x$ (ja määritellään $v(x) = 0$). Olkoon $z \in B$ piste, jolla on pienin

v-arvo joukon B pisteistä. Nyt pisteestä z on särmä johonkin sellaiseen pisteeseen z', jolle $v(z') = v(z) - 1$. Mutta $v(z)$:n minimaalisuuden perusteella $z' \in A$. Siis $z \in \operatorname{cl} A$. Ristiriita. □

Seuraavaksi esittelemme tuloksen, josta seuraa aika monen $\mathbb{R}^2$:n osajoukon yhtenäisyys. Aloitamme kuitenkin aputuloksilla.

Olkoon $A \subset \mathbb{R}$. Sanomme, että $x \in \mathbb{R}$ on joukon A yläraja, jos kaikilla $a \in A$ pätee $a \leq x$. Reaaliluvuilla on seuraava käyttökelpoinen ominaisuus: Jos $A \subset \mathbb{R}$ on epätyhjä ja joukolla A on yläraja, tällöin joukon A ylärajojen joukossa on pienin yläraja. Kutsumme joukon A pienintä ylärajaa joukon A *supremumiksi.*

Lemma 6. *Jokainen jana $\mathbb{R}^2$:ssa on yhtenäinen.*

Todistus: Olkoon J jana, jonka päätepisteet ovat x ja y. Kun $t \in [0,1]$, merkitään $f(t) = (1-t)x + ty$. Nyt $J = \{f(t) \mid t \in [0,1]\}$. Tehdään vastaoletus: J on epäyhtenäinen. Olkoot A ja B kuten epäyhtenäisyyden määritelmässä. Oletetaan symmetrian perusteella, että $x \in A$.

Olkoon t_0 supremum luvuista $t \in [0,1]$, joille jana pisteestä x pisteeseen $f(t)$ sisältyy joukkoon A. Nyt mielivaltaisen lähellä $f(t_0)$:aa on joukon A pisteitä, joten $f(t_0) \in \operatorname{cl} A$, ja koska $A = \operatorname{cl} A$, $f(t_0) \in A$.

Jos $t_0 = 1$, pätee $J = A$ ja $B = \emptyset$, mikä on ristiriita. Siis $t_0 < 1$. Nyt mielivaltaisen lähellä $f(t_0)$:aa on joukon B alkioita, joten $f(t_0) \in \operatorname{cl} B = B$. Siis $f(t_0) \in A \cap B$, ristiriita. □

Olkoot $J_1, \ldots, J_n$ janoja siten, että kaikilla i, $i = 1, \ldots, n-1$, janan J_i loppupiste on janan J_{i+1} alkupiste. Tällöin kutsumme yhdistettä $\bigcup J_i$ *murtoviivaksi.*

Korollaari 7. *Murtoviiva on yhtenäinen.*

Todistus: Yhdestä janasta koostuva murtoviiva on yhtenäinen Lemman 6 perusteella. Useammasta janasta koostuva murtoviiva voidaan näyttää yhtenäiseksi induktiolla käyttäen Lemmaa 2. □

Teoreema 8. *Olkoon $X \subset \mathbb{R}^2$ sellainen, että mitkä tahansa kaksi X:n pistettä voidaan yhdistää murtoviivalla joukon X sisällä. Tällöin X on yhtenäinen.*

Todistus: Tehdään vastaoletus: X on epäyhtenäinen. Olkoot A ja B kuten epäyhtenäisyyden määritelmässä. Valitaan $x \in A$, $y \in B$. Olkoon M murtoviiva pisteestä x pisteeseen y. Mutta nyt $M \cap A$ ja $M \cap B$ ovat kuten epäyhtenäisyyden määritelmässä joukolle M. Siis M on epäyhtenäinen, mikä on ristiriita edellisen korollaarin kanssa. □

Esimerkki 9. *Olkoon X annulus $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq d(x,0) \leq 2\}$. Nähdään helposti, että mitkä tahansa kaksi X:n pistettä voidaan yhdistää murtoviivalla joukon X sisällä. Siis X on yhtenäinen.*

Lopuksi

Olkoon X joukko. Sanomme, että $d\colon X \times X \to [0,\infty[$ on metriikka (eli etäisyysfunktio), jos se toteuttaa seuraavat ehdot:

1. $d(x,y) = 0$ jos ja vain jos $x = y$.
2. Kaikilla $x, y \in X$ pätee $d(x,y) = d(y,x)$.
3. Kaikilla $x, y, z \in X$ pätee $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

Huomataan, että tavallinen etäisyys (linnuntietä) missä tahansa $\mathbb{R}^n$:n osajoukossa on metriikka. Lisäksi missä tahansa metriikalla varustetussa joukossa X voidaan määritellä osajoukkojen lähipisteet samalla tavalla kuin teimme sen $\mathbb{R}^2$:n osajoukoille. Metriikan avulla määritelty $\bar{\in}$ toteuttaa aina, paitsi lähipisteavaruuden aksioomat, myös topologisen avaruuden ehdot

- Kaikilla $A, B \subset X$ ja kaikilla $x \in X$ pätee $x \bar{\in} A \cup B$ jos ja vain jos $x \bar{\in} A$ tai $x \bar{\in} B$.
- Kaikilla $A \subset X$ pätee $\operatorname{cl}\operatorname{cl} A = \operatorname{cl} A$.

Tämän tuloksen perusteella saamme suuren joukon topologisia avaruuksia.

Yllä olemme havainneet, että topologisen avaruuden yhtenäisten komponenttien lukumäärä voidaan määritellä, kun pelkästään tiedetään kaikkien osajoukkojen lähipisteet. On ehkä hiukan yllättävää, että se voidaan tehdä näin niukkojen tietojen varassa. Itse asiassa näin niukkojen tietojen varassa voidaan määritellä myös topologisen avaruuden reikien lukumäärä ja tyyppi, mutta se kuuluukin sitten algebralliseen topologiaan, jota käsitellään vasta yliopiston kursseilla, ja sielläkin vasta syventävillä vapaaehtoisilla kursseilla.

Pähkinöitä

1. Osoita, että Teoreemassa 5 annettu ehto (äärellisen) verkon yhtenäisyydelle on *jos ja vain jos* -ehto.
2. Olkoon (X,S) suunnattu verkko. Määritellään lähipisterelaatio $\bar{\in} \subset X \times \mathcal{P}(X)$, $x \bar{\in} A$ jos ja vain jos $x \in A$, tai on olemassa nuoli, jonka alkupiste on A:ssa ja loppupiste on x.

   Määritetään $\operatorname{cl}'\colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ siten, että kaikilla $A \subset X$ pätee $\operatorname{cl}' A = A \cup B$, missä B on niiden solmujen s joukko, joille on olemassa $s' \in A$ ja nuoli pisteestä s' pisteeseen s tai nuoli pisteestä s pisteeseen s'.

   Olkoon $x \in X$ ja $n \in \mathbb{N}$ siten, että $\operatorname{cl}'^{n} x = X$. Osoita, että $(X, \bar{\in})$ on yhtenäinen.
3. Olkoon $X = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}, x \neq 0\} \subset \mathbb{R}^2$. Osoita, että X ei ole yhtenäinen.

4. Olkoon $X = \{(q,0) \mid q \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R}^2$. Osoita, että X:n yhtenäiset komponentit ovat yhden pisteen kokoisia.

5. Olkoon $(X, \bar{\in})$ lähipisteavaruus ja $C \subset X$ yhtenäinen. Osoita, että $\mathrm{cl}\, C$ on yhtenäinen.

6. Osoita, että Teoreeman 8 ehto $\mathbb{R}^2$:n osajoukon yhtenäisyydelle ei ole *jos ja vain jos* -ehto. Voit esimerkiksi käyttää edellistä tehtävää hyväksi.

7. Osoita, että on olemassa lähipisteavaruus $(X, \bar{\in})$, joka ei toteuta ehtoa
   - Kaikilla $A, B \subset X$ ja $x \in X$ pätee, että $x \,\bar{\in}\, (A \cup B)$ jos ja vain jos $x \,\bar{\in}\, A$ tai $x \,\bar{\in}\, B$.

Liite: Pikajohdatus joukko-oppiin

Tässä liitteessä esittelemme joukko-opin notaation.

Joukolla tarkoitamme kokoelmaa alkioita[3]. Jos alkio x kuuluu joukkoon A, merkitsemme $x \in A$. Kaksi joukkoa A ja B ovat itse asiassa sama joukko, jos niihin kuuluvat samat alkiot. Eli formaalisti, $A = B$, jos

kaikilla x pätee $x \in A$ jos ja vain jos $x \in B$.

Jos A ja B ovat joukkoja ja kaikki A:n alkiot ovat myös B:n alkioita, sanomme, että A on B:n osajoukko, mitä merkitään $A \subset B$. Jos A on joukko, A:n osajoukoiksi lasketaan myös A itse sekä tyhjä joukko $\emptyset$.

Joukkojen A ja B yhdiste $A \cup B$ on joukko, johon kuuluvat kaikki ne alkiot, jotka kuuluvat A:han, B:hen tai molempiin. Joukkojen A ja B leikkaus $A \cap B$ on joukko, johon kuuluvat kaikki ne alkiot, jotka kuuluvat sekä A:han että B:hen.

Jos A on joukko ja P on ominaisuus, $\{a \in A \mid P(a)\}$ on joukko, johon kuuluvat ne A:n alkiot, joilla on ominaisuus P. Jos P on ominaisuus, $\{a \mid P(a)\}$ on joukko, johon kuuluvat ne matemaattiset oliot, joilla on ominaisuus P. Äärellinen joukko voidaan kirjoittaa myös luettelemalla sen alkiot, eli $\{x_1, \ldots, x_n\}$ on joukko, jonka alkiot ovat $x_1, \ldots, x_n$.

Jos a, b ovat mitä tahansa matemaattisia olioita, voidaan muodostaa järjestetty pari (a, b). Jos $a \neq b$, niin $(a, b) \neq (b, a)$, eli tässä alkioiden järjestyksellä on väliä. Kaksi järjestettyä paria (a, b), (c, d) ovat samat, $(a, b) = (c, d)$, jos ja vain jos $a = c$ ja $b = d$.

Jos A ja B ovat joukkoja, niiden karteesinen tulo $A \times B$ on joukko, johon kuuluvat kaikki järjestetyt parit (a, b), missä $a \in A$ ja $b \in B$. Joukon $A \times B$ osajoukkoja R kutsutaan relaatioiksi joukkojen A ja B välillä. Jos R on relaatio ja $(a, b) \in R$, merkitään aRb.

Relaatio R joukkojen A ja B välillä on funktio, jos jokaisella $a \in A$ on olemassa täsmälleen yksi $b \in B$, jolle aRb. Tällöin merkitään $R\colon A \to B$. Jos R on funktio ja aRb, merkitään $R(a) = b$.

Olkoon I joukko. Oletetaan, että jokaiseen $i \in I$ on liitetty matemaattinen olio C_i. Tällöin kaikkien C_i:den muodostamaa kokonaisuutta merkitään $(C_i)_{i \in I}$ ja kutsutaan indeksoiduksi kokoelmaksi. Jos edellä C_i:t ovat joukkoja, $\bigcup C_i$ tarkoittaa joukkoa, joka on joukkojen C_i yhdiste, eli $x \in \bigcup C_i$ jos ja vain jos $x \in C_i$ jollain $i \in I$.

Tasoa merkitään $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$, koska tason pisteet ovat koordinaattipareja.

Viitteet

[1] Čech, Eduard, *Topological Spaces*, Publishing House of the Czechoslovak Academy of Sciences, Prague, and Interscience Publishers, a Division of John Wiley and Sons, London, New York, Sydney, 1966.

[3] Russellin paradoksin välttämiseksi alkiokokoelmat on jaettava joukkoihin ja aitoihin luokkiin. Tämä aihepiiri on kuitenkin sen verran vaikea, ettemme tässä mene siihen.