Määrätyn integraalin opettamisesta likiarvotarkasteluin

Kyösti Tarvainen
Matematiikan yliopettaja, Metropolia ammattikorkeakoulu

Johdanto

Määrätyn integraalin lauseke muodostetaan fysiikan ja tekniikan sovellutuksissa päättelyllä, joka lähtee liikkeelle likiarvosummista (myös differentiaalisten tarkastelujen pohjalla ovat likiarvosummat). Jatko-opintoja ajatellen olisi siten tarpeen, että lukion matematiikassa määrätty integraali esiteltäisiin ja määriteltäisiin vastaavanlaisella tavalla. Näin tehtiin legendaarisessa Väisälän oppikirjassa [1], mutta nykyisin lukiokirjoissa määrättyjä integraaleja esitellään myös tavoilla, jotka poikkeavat sovellutuksissa käytetyistä tarkastelutavoista.

Pari kirjaa ovat jopa suoraan määritelleet määrätyn integraalin integraalifunktion avulla, pitäen yhtälöä

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a), \tag{*}$$

jossa F on f:n integraalifunktio, määrätyn integraalin matemaattisena määritelmänä. Mutta se, että määrätty integraali voidaan laskea tämän yhtälön avulla ilman likiarvosummia, on matematiikan tärkeimpiä tuloksia, ei määritelmä. Ilmeisesti se, että yhtälö (*) on haluttu esittää määrätyn integraalin määritelmänä, johtuu siitä, että näin vältytään likiarvotarkasteluilta.

Mutta sovellutuksissa määrättyjä integraaleja johdettaessa ei voi välttyä likiarvotarkasteluista. Selvennykseksi todettakoon, että niissä ei ole kyse puhtaasti matemaattisesta kysymyksestä, lähestyykö jokin matemaattinen likiarvosumma (esimerkiksi Riemannin summa) jotain tiettyä matemaattista arvoa. Kyse on siitä, onko jokin likiarvosumma niin hyvä likiarvo jonkin geometrisen tai fysikaalisen suureen arvolle, että tämä likiarvo lähestyy tämän geometrisen tai fysikaalisen suureen tarkkaa arvoa.

Seuraavassa esitetään ensin yleinen kuvaus, miten määrätyn integraalin lausekkeita johdetaan sovellutuksissa lähtien liikkeelle likiarvosummista. Vaikeutena on usein nähdä se, että likiarvosummat lähestyvät laskettavan suureen tarkkaa arvoa. Kirjoituksen tarkoituksena on esittää erilaisia tapoja, jotka auttavat näissä likiarvotarkasteluissa.

Abstrakti kuvaus määrätyn integraalin lausekkeen muodostamisesta

Sovellutusten kannalta määrätty integraali $\int_a^b f(x)\,dx$ on tietynlaisiin likiarvosummiin liittyvän tarkan arvon symboli. Tarkempi kuvaus on pitkä, mutta sinänsä kyse ei ole vaikeasta asiasta, sillä määrättyjä integraaleja laskettiin jo Antiikissa. Seuraavassa esitetään yleisellä tasolla kuvaus määrätyn integraalin muodostamisesta, joka vastaa sitä tapaa, jolla jo Leibnitz johti määrättyjen integraalien lausekkeita (joita hän merkitsi vain hieman nykykäytännöstä poikkeavalla tavalla).

1) Meillä on lukusuoran, esimerkiksi x-akselin, väli $[a, b]$, jossa $b > a$. Tämä väli voi olla suoraan tarkas-

telun alainen tai meillä voi olla esimerkiksi kappale, johon liitetään x-akseli, ja kappale rajautuu tällöin välille $[a, b]$.

2) Meidän on laskettava tähän väliin liittyvän suureen arvo. Ongelmana on se, että laskettavan suureen arvoon vaikuttaa jokin x:n funktio $f(x)$, joka olkoon jatkuva. Oletetaan, että me kuitenkin pystymme laskemaan vastaavan *vakiotapauksen* ($f(x)$ on vakio) siten, että laskettavan suureen arvo välillä $[a, b]$ ja kaikilla sen osaväleillä saadaan kertomalla vakioarvo välin pituudella (*vakiokaava*).

3) Oletetaan, että vaikeampi tapaus, jossa $f(x)$ ei ole vakio välillä $[a, b]$, voidaan geometrisen tai fysikaalisen näkemyksen perusteella ratkaista likimäärin seuraavasti vakiokaavaa käyttämällä. Jaetaan väli $[a, b]$ n:ään yhtä pitkään osaväliin, joiden pituutta merkitään Δx:llä. Merkitään osavälien alkupisteitä $x_1(= a), x_2, x_3, \ldots, x_n$. Ideana on se, että kullakin osavälillä jatkuva funktio $f(x)$ ei ehdi muuttua paljon eli kullakin osavälillä funktio on likipitäen vakio – sitä tarkemmin, mitä lyhempiä osavälit ovat eli mitä enemmän niitä on. Määrätään tarkasteltavan suureen likiarvo kullakin osavälillä vakiokaavan avulla kertoen funktion f arvo osavälin alkupisteessä osavälin pituudella Δx eli k:nnen osavälin ($k = 1, 2, \ldots, n$) kohdalla laskettavan suureen likimääräinen *kertymä* on $f(x_k)\Delta x$.

4) Oletetaan (käytännössä tämä on yleensä selvä asia geometrisen tai fysikaalisen näkemyksen perusteella), että laskettavan suureen tarkka arvo koko tarkasteluvälillä $[a, b]$ saadaan summana osaväleillä tapahtuvien kertymien tarkoista arvoista. Täten koko välillä $[a, b]$ laskettavan suureen likiarvo saadaan osaväleillä tapahtuvien kertymien likiarvojen summana $\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$.

5) Oletetaan (tämä voi olla vaikea nähdä geometrisesti tai fysikaalisesti; siksi siitä jäljempänä), että likiarvo $\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$ lähestyy laskettavan suureen tarkkaa arvoa, kun osavälien lukumäärä n kasvaa rajatta.

6) Tällöin tarkkaa arvoa *merkitään* symbolilla $\int_a^b f(x)\,dx$, joka heijastaa likiarvosummia, joilla yhä tarkempia likiarvoja voidaan määrittää.

Tämä likiarvostrategia keksittiin siis jo Antiikissa. Arkhimedes pystyi esimerkiksi pallon tilavuuden likiarvosummien (palloa approksimoivien kiekkojen tilavuuksien summien) avulla päättelemään, mitä arvoa ne lähestyvät. Pallon tilavuuden määrittämistä hän piti elämänsä suurimpana saavutuksena. Sittemmin 1600-luvulla, derivaatan keksimisen jälkeen, keksittiin myös, miten tarkka arvo voidaan laskea ilman likiarvosummia yhtälön (*) avulla.

Huomautus. Joissain sovellutuksissa meillä on suoraan lähtökohtana 4. kohdan likiarvosummat $\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$. Näin on esimerkiksi tarkasteltaessa veden paineen aiheuttamaa kokonaisvoimaa padon seinämään.

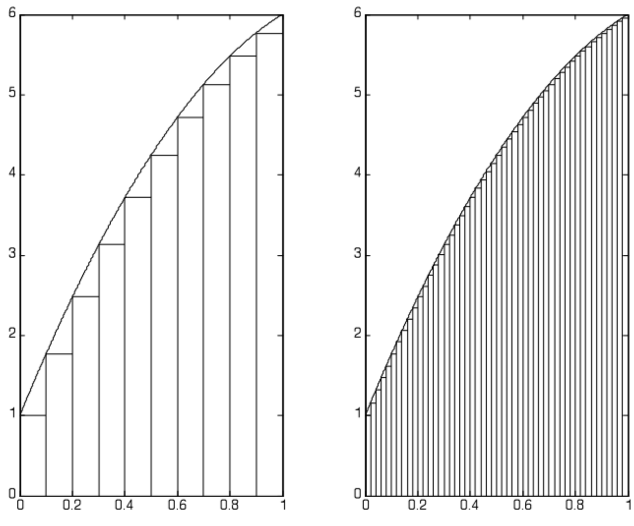
Huomautus. Koska määrätyn integraalin lausekkeiden johtamisessa toistuu aina samanlaisia merkintöjä ja päättelyitä, tekniikan ja fysiikan sovellutuksissa nämä johdot tehdään virtaviivaistetusti *differentiaalisella* päättelyllä.

Likiarvostrategiaan ja sen toimivuuteen tutustutaan luonnollisesti ensin numeerisilla esimerkeillä. Olen huomannut ammattikorkeakoulussa, että opiskelijat pitävät siitä, että tässäkin palataan historiassa taaksepäin eli siihen tapaan, jolla Arkhimedes määritti likiarvoja.

Arkhimedeen ala- ja ylälikiarvoja määrätylle integraalille

Arkhimedes sovelsi likiarvo-strategiaa aina siten, että hän määräsi laskettavalle arvolle ala- ja ylälikiarvot. Alalikiarvon hän sai, kun hän kullakin osavälillä käytti sellaista funktion $f(x)$ osavälillä saamaa arvoa $f(x'_k)$, että likimääräinen kertymä $f(x'_k)\Delta x$ on pienempi tai yhtä suuri kuin todellinen kertymä kyseisellä osavälillä. Vastaavasti hän määritti ylälikiarvon.

Tarkastellaan seuraavaa esimerkkiä: on määrättävä likiarvo x-akselin välin $[0, 1]$ yläpuolelle ja funktion $f(x) = -3x^2 + 8x + 1$ kuvaajan alapuolelle jäävälle pinta-alalle (kuva 1).



Kuva 1. Funktion $f(x) = -3x^2 + 8x + 1$ kuvaaja välillä $[0, 1]$. Vasemmassa osakuvassa väli on jaettu 10 osaväliin ja kullakin osavälillä funktiota on esitetty likimäärin vakiofunktiolla, jonka arvo on funktion arvo osavälin alkupisteessä. Oikeassa osakuvassa osavälejä on 50.

Sovelletaan tähän esimerkkiin edellä selostettua likiarvomenettelyä. Vakiotapauksena on nyt suorakaiteen pinta-alan määrääminen (korkeus on vakio). Kuvan 1 vasempaan osakuvaan on piirretty tapaus, jossa väli

$[0, 1]$ on jaettu kymmeneen osaväliin. Kunkin osavälin yläpuolella olevan pinta-alan suuruus lasketaan likimäärin suorakaiteen avulla, jonka korkeus on funktion kuvaajan korkeus osavälin alkupisteessä.

Kun kymmenen osavälin tapauksessa sovelletaan edellä kuvattua likiarvomenettelyä, kohdassa 4 päädytään pinta-alan likiarvoon 3,745. Tämä likiarvo onkin alalikiarvo pinta-alalle, sillä likiarvo on kuvaan piirrettyjen suorakaiteiden pinta-alojen summa, joka on selvästi pienempi kuin laskettava pinta-ala.

Vastaavasti tämän monotonisesti kasvavan funktion kohdalla saadaan pinta-alan ylälikiarvo, kun jokaisella osavälillä vakioarvona käytetään osavälin loppupisteessä olevaa funktion arvoa (tästä voi piirtää kuvaa 1 vastaavan kuvan).

On helppo vakuuttua geometrisesti (vertaa kuvan 1 osakuvat), että alalikiarvot (samoin kuin ylälikiarvot) lähestyvät pinta-alan tarkkaa arvoa, kun tarkasteluväli jaetaan yhä useampaan osaväliin. Seuraava taulukko esittää, miten ala- ja ylälikiarvot muuttuvat, kun osavälien lukumäärää kasvatetaan.

Osavälien lukumäärä	Alalikiarvo pinta-alalle	Ylälikiarvo pinta-alalle
10	3.745000000000000	4.245000000000000
100	3.974950000000002	4.024950000000001
1 000	3.997499499999999	4.002499499999999
10 000	3.999749995000002	4.000249995000002
100 000	3.999974999950032	4.000024999950032
1 000 000	3.999997499999456	4.000002499999456
10 000 000	3.999999750000234	4.000000250000234

Taulukko 1. Kuvan 1 pinta-alan ala- ja ylälikiarvoja osavälien lukumäärän kasvaessa.

Taulukon alimmalta riviltä näemme, että laskettava pinta-ala on varmuudella välillä 3,999 999 7 ... 4,000 000 3. Toisin sanoen se on 4 ± 0,000 000 3, ja näyttää siltä, että pinta-alan tarkka arvo olisi 4.

Määrätyn integraalin lausekkeen johtamisesta ja matemaattisesta määritelmästä

Sen jälkeen kun edellisen kaltaisissa numeerisissa esimerkeissä on saatu tuntumaa likiarvostrategian toimivuuteen, voidaan johtaa algebrallisia integraalilausekkeita eri sovellutuksille. Ala- ja ylälikiarvotarkastelut tekevät ilmeiseksi sen, että kummatkin likiarvot lähestyvät tarkkaa arvoa. Edelleen tällöin on ilmeistä, että ei tarvitse tarkastella ala- tai ylälikiarvoja, vaan voi tarkastella edellä olevan 6-kohtaisen likiarvostrategian mukaisia likiarvosummia (joiden arvot ovat pakosti ala- ja ylälikiarvojen välissä). Algebrallisissa tarkasteluissa päädytään esimerkiksi tavanomaisessa pinta-alan tapauksessa määrättyyn integraaliin $\int_a^b f(x)\,dx$.

Esitetyssä likiarvostrategiassa määrätyn integraalin määritelmä on sanallinen. Itse asiassa olen ammattikorkeakoulujen matematiikassa siirtynyt yleensä tällaiseen varhaisen analyysin tapaan määritellä määrätty integraali sanallisesti, siis käyttämättä raja-arvomerkintöjä (koska matemaattista määritelmää ei myöhemmin käytetä hyväksi). Näin on menetelty yhdessä lukiokirjassa ja ammattikorkeakoulun oppikirjassa [2]. Näissä kirjoissa ei ole käytetty edes summamerkkiä likiarvosummissa, vaan summat on kirjoitettu auki. Mutta ilman summamerkkiä on ehkä vaikea hahmottaa, miten määrätyn integraalin lauseke syntyy heijastamaan likiarvolaskuja.

Olisi hyvä, jos integraalilaskenta palautettaisiin lukion lyhyeen matematiikkaan. Tällöin määrätty integraali voitaisiin esittää ilman raja-arvomerkintöjä. Integraalilaskennalla on niin suuri merkitys esimerkiksi tekniikan opinnoissa, että olisi hyvä tutustua sen perusteisiin jo lukiossa.

Kun määrätty integraali määritellään matemaattisesti, niin edellä olevaan 6-kohtaiseen likiarvomenettelyyn suoraan liittyvä määritelmä on seuraava:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x.$$

Näin Väisäläkin (ks. [1], s. 154) määritteli määrätyn integraalin matemaattisesti (tosin toisenlaisia merkintöjä käyttäen). Ainoa ehto yllä olevan määritelmän pätevyydelle on funktion f jatkuvuus. Sovellutuksissa esiintyy epäjatkuvuuksia, mutta silloin yleensä tarkasteluväli jaetaan osaväleihin, joissa funktio on jatkuva, ja osavälit tarkastellaan erikseen.

Likiarvosummien tarkentumisesta

Kun siis sovellutuksissa muodostetaan määrätyn integraalin lausekkeita, lähtökohtana ovat likiarvosummat. Lukion matematiikassa tämä on ainoa kerta, kun käytännön suureisiin liittyvät likiarvot tulevat enemmälti esiin. Tämä voi olla monelle opettajallekin asia, josta on vähän omia kokemuksia, mihin johdannossa viitattiin. Siksi asiaan tulee kiinnittää huomiota, ja johtojen loogisuuden vuoksi on tärkeää perustella, miksi likiarvosummat lähestyvät laskettavan suureen tarkkaa arvoa, kun osavälien lukumäärä kasvaa rajatta. Yksi perustelutapa ovat edellisen esimerkin kaltaiset numeeriset laskut ja geometriset perustelut (kuva 1).

Mutta esimerkiksi tapausta, jossa määrätään kappaleen tilavuus määrättynä integraalina, kun poikkipinta-alan funktio tunnetaan, on yleisessä tapauksessa hankala havainnollistaa geometrisesti. Perustelu voidaan tehdä vastaansanomattomasti algebrallisen keskiarvotarkastelun avulla, kuten on esitetty esimerkiksi lukion kirjan [3] lisätiedoissa. Yleisemmällä tasolla vastaavanlaisia vakuuttavia keskiarvoperusteluja, jotka sopivat korkeakoulujen matematiikan opintoihin, on käsitelty viitteessä [4].

Ei ole mitään yleistä tapaa, jolla voidaan perustella se, että likiarvot lähestyvät laskettavan suureen tarkkaa arvoa. Ehkä yleisin tapa perustella likiarvotarkastelut on se, että todetaan, että kunkin osavälin kertymän likiarvon *suhteellinen virhe* menee nollaan osavälin pituuden lähestyessä nollaa. Tämä riittää, sillä seuraava mahdollinen epäilys on turha: vaikka osavälien lukumäärän kasvaessa kullakin osavälillä vakiokaava toimisi yhä tarkemmin, kasvaako kokonaisvirhe sen takia, että likimääräisten termien lukumäärä kasvaa. Tämän epäilyksen torjuu seuraava lause.

Lause. *Olkoon meillä sellaisia positiivisia likiarvoja (tai kaikki negatiivisia), että kunkin tarkka arvo poikkeaa korkeintaan p % likiarvosta. Tällöin tarkkojen arvojen summa poikkeaa korkeintaan p % likiarvojen summasta.*

Tämän lauseen merkitys on siinä, että jos saamme jokaiseen osaväliin liittyvän kertymän likiarvon esimerkiksi 0,01 %:n suhteellisella tarkkuudella, niin vaikka osavälejä olisi kuinka monta, tarkkojen kertymien summa poikkeaa korkeintaan 0,01 % kertyminen likiarvojen summasta.

Tämä lause on helppo todistaa algebran avulla. Todistuksen idean näkee seuraavasta numeroesimerkistä. Olkoon meillä likiarvot 100, 200 ja 500, joista tarkat arvot poikkeavat korkeintaan 1 %:n verran. Siten summan tarkka arvo on lukujen 792 $(= 99 + 198 + 495)$ ja 808 $(= 101 + 202 + 505)$ välillä eli pahimmassa tapauksessa summan tarkka arvo poikkeaa 1 %:n likiarvojen summasta 800.

Jos likiarvosummassa on sekä positiivisia että negatiivisia termejä, on ilmeistä, että positiivisten termien summa tarkentuu, kuten myös negatiivisten termien summa, ja siten koko summa tarkentuu.

Suhteellisen virheen nollaan menemisestä voi vakuuttua usein seuraavanlaisella päättelyllä. Tarkastellaan esimerkkinä kuvan 1 pinta-alan tapausta (joka edellä perusteltiin myös toisenlaisella tavalla). Oikeanpuoleisen osakuvan ensimmäisellä osavälillä kertyvän pinta-alan likiarvoksi on otettu suorakaiteen pinta-ala, jonka korkeus on funktion kuvaajan korkeus välin alkupisteessä. Alueen korkeus kasvaa kuitenkin noin 20 % tällä osavälillä. Siten aivan karkeasti arvioiden tämän osavälin pinta-alan likiarvossa (suorakaiteen pinta-ala) on 20 %:n virhe.

Ajatellaan, että kaksinkertaistamme osavälien lukumäärän, jolloin osavälien pituus puolittuu. Geometrisesti näemme kuvasta 1, että kun puolitamme ensimmäisen osavälin, niin uudella ensimmäisellä osavälillä funktion kasvukin noin puolittuu eli on noin 10 %, jolloin pinta-alan likiarvon suhteellinen virhekin suunnilleen puolittuu ensimmäisellä osavälillä. Kaikkien osavälien kohdalla tapahtuvat vastaavanlaiset suhteellisten virheiden puolittumiset. Osavälien lukumäärän kaksinkertaistumisia edelleen ajateltaessa, osaväleihin liittyvien pinta-alojen suhteelliset virheet aina suunnilleen puolittuvat, jolloin lauseen mukaisesti likiarvosummankin suhteellinen virhe joka kerta suunnilleen puolittuu. Täten likiarvosummat lähestyvät pinta-alan tarkkaa arvoa (tästä voi piirtää lukusuorakuvan).

Vastaavasti erittäin monessa muussakin sovellutuksessa voidaan funktion $f(x)$ *jatkuvuuden perusteella* vakuuttua geometrisesti tai fysikaalisesti siitä, että jokaisen osavälin kertymän likiarvon $f(x_k)\Delta x$ suhteellinen virhe menee nollaan, kun Δx lähestyy nollaa.

Lauseen esittäminen ja sen mukaiset perustelut suhteellisine virheineen vievät ehkä niin paljon aikaa, että ne on jätettävä korkeakouluopintoihin.

Yhteenveto

Jatko-opintojen tarpeita silmälläpitäen kirjoituksessa on ehdotettu palaamista Väisälän [1] esittämään tapaan motivoida ja määritellä määrätty integraali. Hänen ja nykyisten amerikkalaisten calculus-kirjojen tapaan kannattanee lukioissa määrättyjen integraalien lausekkeet johtaa likiarvosummien kautta, ei differentiaalisesti.

Väisälän oppikirjan ja calculus-kirjojen puutteena voi pitää sitä, että niissä ei yleensä riittävästi perustella sitä, että geometristen tai fysikaalisten suureiden likiarvosummat lähestyvät laskettavan suureen tarkkaa arvoa. On huomattava, että koska kyse on geometriaan tai fysiikkaan liittyvien suureiden likiarvojen tarkasteluista, myös perustelut vetoavat geometrisiin ja fysikaalisiin mielikuviin ja käsityksiin, ei puhtaasti matemaattisiin asioihin Mitään kaikkiin tapauksiin soveltuvaa perustelutapaa ei ole olemassa. Artikkelissa on tarkasteltu, miten perusteluja voi tehdä esimerkiksi numeerisin laskuin, geometrisen tarkasteluin ja esitettyä lausetta hyväksi käyttäen. Myös muita tapoja esiintyy, mutta esimerkiksi lukiossa varmaan riittää se, että muutama määrätyn integraalin lauseke perustellaan kunnolla ja muut annetaan valmiina kaavoina.

Viitteet

[1] K. Väisälä, *Algebran oppi- ja esimerkkikirja 2*, WSOY, 1963.

[2] E. Sorvali, P. Toivonen, *TAM alfa*, WSOY, 2004.

[3] P. Kontkanen, J. Lehtonen, K. Luosto, S. Savolainen, *Pyramidi10*, Tammi, 2007.

[4] K. Tarvainen, Justifying differential derivations when setting up definite integrals, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, Vol. 39, No 1, 61–68, 2008.