Väitteitä matematiikan opetuksesta ja vastauksia niihin

Tuomas Korppi

Maallikoilla on mitä kummallisimpia näkemyksiä matematiikasta, ja nämä näkemykset heijastuvat siihen, millaisena he näkevät matematiikan kouluopetuksen[1] roolin. Tässä kirjoitelmassa esitän tällaisia näkemyksiä väitemuodossa ja annan oman vastaukseni väitteisiin. Vaikka väitteiden muotoilu on minun tekemäni, kaikilla esitetyillä väitteillä on esikuvansa todellisuudessa.

Matematiikan luonne

Väite 1. *Matematiikkahan on pelkästään joukko sopimuksia.*

Vastaus: Kaikilla tieteenaloilla on omaa erikoisterminologiaansa, ja termien merkitykset voidaan nähdä sopimuksina. Matematiikka ei ole mikään poikkeus, ja matemaatikkojen ammattikielessä tällaista termin merkityksen määrittelyä kutsutaan *määritelmäksi.*

Määritelmät itsessään eivät ole matematiikassa se asian pihvi, vaan se, että niistä voidaan loogisesti päätellä uusia väittämiä, joita kutsutaan *teoreemoiksi.* Päättelyketjut ovat useissa tapauksissa hyvinkin monipolvisia, ja se, että jokin teoreema on määritelmien looginen seuraus, voi olla päättelyketjua tuntemattomalle ihmiselle (jopa matemaatikolle) hyvinkin yllättävää.

Muista tieteistä matematiikka eroaa siten, että muissa tieteissä tulokset eivät ole pelkästään termien merkitysmäärittelyjen loogisia seurauksia, vaan tulokset riippuvat sekä termien merkityksistä että ympäröivän todellisuuden luonteesta.

Matematiikan varsinaisesti mielenkiintoisen sisällön voidaankin katsoa muodostuvan lauseista tyyppiä ”Näistä-ja-näistä määritelmistä seuraavat nämä-ja-nämä teoreemat”. Tällaisten lauseiden totuus tai epätotuus ei sitten enää olekaan sopimuksenvarainen asia vaan looginen välttämättömyys.

Matematiikka suhteessa muihin kouluaineisiin

Väite 2. *Koulun on tarkoitus tarjota yleissivistystä eikä keskittyä insinöörien tuotantoon talouselämän palvelukseen. Näin ollen matematiikkaa ei tule painottaa.*

Vastaus: Matematiikassa on osia, jotka kuuluvat yleissivistykseen. Tällaista on esimerkiksi ala-asteella opittava peruslaskento, joka jokaisen länsimaisen ihmisen kuuluu osata. Kirjainalgebrasta yleissivistykseen kuuluu ainakin sen ymmärtäminen, kuinka kirjainten avulla voidaan esittää yleisiä, kaikkia lukuja koskevia väitteitä. Tämä on yleissivistävää, koska se esittää oppilaille uuden tavan ilmaista asioita.

Yleissivistävää materiaalia löytyy myös nykyisen koulukurssin ulkopuolelta. Tärkeimpänä tällaisena asiana pidän deduktiivisen metodin hallintaa, jossa lähdetään aksioomista, ja niistä käsin todistetaan eli perustellaan

[1] Koululla tarkoitan tässä kirjoitelmassa peruskoulua ja lukiota.

aukottomasti teoreemoja. Tämä on yleissivistävää siksi, että tällaisessa ympäristössä tutustutaan siihen, millaista on tieto, joka voidaan tietää varmasti, ja joka eroaa empiirisissä tieteissä saavutettavasta tiedosta, joka on epävarmaa.

Deduktiivinen metodi, Eukleideen geometriana, on myös kuulunut klassiseen yleissivistykseen.

Myös modernimmassa matematiikassa on osia, joiden hallinta on mielestäni yleissivistävää. Tällaisia ovat ainakin seuraavat:

- δ–ε-metodi, jolla jatkuvaa muutosta voidaan käsitellä matemaattisen täsmällisesti.
- Kardinaalilukujen teorian alkeita sen verran, että ymmärretään, että parhaiden matemaattisten teorioiden mukaan äärettömiä joukkoja on eri kokoisia.
- Lebesguen mitan teoria, joka kertoo, kuinka omituisen mallisiin joukkoihin käsitteitä ”pituus”, ”pinta-ala” ja ”tilavuus” voidaan mielekkäästi soveltaa.
- Sen ymmärtäminen, mitä Gödelin epätäydellisyyslauseet sanovat. Tämä kertoo matemaattisen metodin rajat. Lisäksi nämä lauseet osoittavat, että totuus transsendenttina ominaisuutena on erotettava todistuvuudesta inhimillisesti saavutettavissa olevana ominaisuutena. Monissa maallikoiden käymissä filosofisissa keskusteluissa olen huomannut, että ihmisillä on mitä kummallisimpia harhaluuloja koskien Gödelin epätäydellisyyslauseita.

Yllä olen esimerkinomaisesti luetellut matematiikan osia, jotka ovat yleissivistäviä. Luetteloa ei ole tarkoitettu kattavaksi; yleissivistävää materiaalia löytyy varmasti lisääkin. Näin ollen kouluopetuksen muuttaminen yleissivistävämmäksi ei tarkoita matematiikan osalta sitä, että sen määrää vähennettäisiin, vaan ennemmin sitä, että painopistettä siirretään matematiikan sisällä insinöörien tarvitsemasta ”välinematematiikasta” kohti käsitteellisesti mielenkiintoista matematiikkaa.

Väite 3. *Matematiikka ja kovat luonnontieteet edustavat kovia arvoja. Kouluopetuksen on sitä vastoin painotettava pehmeitä arvoja.*

Vastaus: Ensinnäkin tekisi mieli muistuttaa Humen giljotiinista. Matematiikka ja luonnontieteet tuottavat tietoa siitä, kuinka asiat ovat, eivätkä ne suoranaisesti kerro siitä, kuinka asioiden pitäisi olla. Näin ollen ne ovat neutraaleja arvokeskustelussa.

Kovia arvoja edustaakin nähdäkseni lähinnä rahan ja yleisemmin talouden roolin painottaminen päätöksenteossa, eikä matematiikka sinällään sano juuta eikä jaata koskien sitä, pitäisikö näitä asioita painottaa.

Taloustieteen teorioissa toki sovelletaan matematiikkaa, ja jotta ihminen voisi uskottavasti argumentoida kovia taloudellisia arvoja kannattavia ihmisiä vastaan, hänen täytyy hallita talouden lainalaisuudet, ja näin ollen myös matematiikkaa. Näin matematiikka on, hiukan kiertotietä, hyödyllistä myös ihmiselle, joka haluaa edesauttaa pehmeiden arvojen toteutumista.

Väite 4. *Koulun on opetettava kriittistä ajattelua, ja sitä tukevat parhaiten humanistiset aineet, ei matematiikka.*

Vastaus: Ensinnäkin kouluopetuksessa on sellainen ongelma, että tieteiden metodologiaan ei yleensä päästä, mikä rajoittaa kriittisen ajattelun opettamista ylipäätänsä, koska oppilaat eivät näe, millaisia ovat ne ajattelutavat, joita tiedon keräämisessä käytetään. Myös humanistisissa aineissa ”kriittinen ajattelu” jää koulussa usein mielipiteiden ilmaisemisen tasolle.

Matemaattinen metodi, deduktiivinen päättely, on periaatteessa opetettavissa jo lukiotasolla (katso vastaus Väitteeseen 2). Tämä edesauttaa kriittisen ajattelun valmiuksia, koska oppilaat tutustuvat päättelyketjuihin, jotka ovat tiukasti totuuden säilyttäviä. Tämä auttaa hahmottamaan hyvän ja huonon päättelyn eroa.

On tietysti totta, että kriittinen ajattelu on paljon muutakin kuin deduktiivista päättelyä, mutta väitän, että humanististen tieteiden summittaisella painottamisella matematiikkaan verrattuna tavoitetta ei saavuteta. Eräs mahdollisuus kriittisen ajattelun opettamiseen olisi matemaattisen deduktion opettaminen, ja sen lisäksi väittelytaidon kurssi, jolla keskityttäisiin argumentaatiovirheiden karsimiseen. Argumentaatiovirheet kun ovat yleensä seurausta ajatusvirheistä.

Matemaattisista ajatusprosesseista

Väite 5. *Koulun tulee opettaa luovuutta, ja koska matematiikka ei ole luovaa, sitä ei tule painottaa.*

Vastaus: Koulumatematiikassa hinkataan hyvin paljon mekaanisia laskutehtäviä, mikä tosiaan ei ole luovaa. Yliopistomatematiikassa tilanne on toinen. Siellä törmätään ongelmiin, jotka toteuttavat molemmat seuraavista ehdoista:

1. Ongelman ratkaisun oikeellisuuden tarkastaminen on mekaaninen toimenpide.
2. Ongelman ratkaisun löytämiseen ei ole mekaanista menetelmää.

Tällaisissa olosuhteissa törmätään aivan omanlaiseensa luovuuden lajiin. Kohdan (2) takia luovuutta tosiaan tarvitaan: Valmiin ratkaisukonseptin mekaaninen soveltaminen ei ole mahdollista. Kohdan (1) takia kenenkään ei ole mahdollista tarjota epäkelpoa ratkaisua ja väittää, että sen hyvyys on mielipidekysymys.

Tällainen luovuus eroaa jonkun verran siitä luovuudesta, jota esimerkiksi kuvataiteilija käyttää, koska esimerkiksi tehtävänannon "luova tulkitseminen" ei ole sallittua. Toisaalta tällainen luovuus tulee lähelle runoilijan luovuutta silloin kun runoilija kirjoittaa runoa johonkin mittaan: Mitta asettaa reunaehdot runon rytmille ja loppusoinnuille samaan tapaan kuin matematiikan oikeellisuuden säännöt asettavat reunaehdot matemaattisen tehtävän ratkaisulle. Nähdäkseni mittaan kirjoittava runoilija tarvitsee vapaaseen mittaan kirjoittavaan verrattuna huomattavasti enemmän luovuutta, koska hänen on löydettävä sanat, jotka *sekä* sopivat mittaan *että* välittävät sen, mitä hän haluaa sanoa.

Uskoisin, että elävässä elämässä tarvitsemme enemmän matemaatikon luovuutta kuin kuvataiteilijan luovuutta, koska todellisuus asettaa selkeitä rajoja ratkaisujen hyvyydelle.

Näin ollen olenkin vahvasti sitä mieltä, että matematiikan kouluopetukseen olisi tuotava mahdollisuuksien mukaan tehtäviä, jotka toteuttavat ehdot (1) ja (2). Eräs tehtävätyyppi, jossa tähän törmätään ilman, että vaaditaan syvällistä matematiikan teorioiden tuntemusta, ovat tehtävät, joissa etsitään voittostrategioita yksinkertaisiin peleihin.

Väite 6. *Matemaatikot pelkästään tuijottavat kaavoihinsa. Haluamme, että koulussa ihmisille opetetaan laaja-alaisempaa ymmärryskykyä.*

Vastaus: Kuten edellä on tullut ilmi, matematiikka on päättelyä ja ongelmanratkaisua, ja kaavat ovat vain kieli matemaattisten asioiden esittämiseen. Itse asiassa matemaattisessa tekstissä yleensä vaihdellaan luonnollisen kielen ja kaavojen välillä aina sen mukaan, kummalla on esitettävä asia helpompi ilmaista.

Matemaattisen ymmärryskyvyn omaavat ihmiset yleensä myös ymmärtävät, mistä kaavat tulevat, mikä on ainoa tapa hahmottaa jonkun kaavan sovellusalueen rajat tai kysymys kaavan pätevyydestä ylipäätänsä. Kritiikitön kaavan soveltaminen on yleensä merkki matemaattisen ymmärryskyvyn puutteesta, ja eräs matematiikan opettamisen syistä onkin antaa ihmisille ymmärrys, jolla punnita kaavoja tai matematiikkaan pohjaavia väitteitä ylipäätänsä.

Matematiikan käytännön hyöty

Väite 7. *Koulujen matematiikan opetuksessa on siirryttävä soveltaviin tehtäviin.*

Vastaus: Tässä sana "soveltava" on aika monitulkintainen. Ensinnäkin sillä voidaan tarkoittaa sovelluksia käytännön elämään. Toisekseen sillä voidaan tarkoittaa esitetyn matemaattisen teorian soveltamista uusiin matemaattisiin ongelmiin, joilla ei välttämättä ole yhteyttä käytännön elämään.

Mielestäni käytäntöön soveltaminen ei saa olla oppisisältöjen valinnassa itseisarvo. Tärkeää on se, että oppilaat oppivat matemaattista teorianmuodostusta sekä luovaa matemaattista ongelmanratkaisukykyä, eli yhteenvetona matemaattista ajattelua. Käytäntöön soveltavia ongelmia kannattaa esittää vain sikäli, kun se palvelee tätä tarkoitusta. Erityisesti sellaisia soveltavia tehtäviä on vältettävä, joissa tehdään vain mekaaninen, suoraviivainen sovellutus esitetystä teoriasta.

Soveltaminen uusiin matemaattisiin ongelmiin on selkeämmin kannatettavaa. Tällaiset tehtävät ovat hyvin usein niitä, joissa sovellus ei ole suoraviivainen, vaan vaatii kekseliäisyyttä, eli yleensä toteuttaa Väitteen 5 vastauksessa mainitut pykälät (1) ja (2).

Väite 8. *Matematiikan opettaminen koulussa on turhaa. En ole eläessäni tarvinnut derivaattaa mihinkään.*

Vastaus: Ensinnäkin on kohtuutonta yleistää derivaatan tarpeettomuus koko matematiikan tarpeettomuudeksi. Esimerkiksi ala-asteella opetettavia peruslaskutoimituksia jokainen tarvitsee arkipäiväisessä elämässään.

Lisäksi differentiaali- ja integraalilaskenta, johon derivaattakin kuuluu, on välttämätöntä luonnontieteisiin ja tekniikkaan jatko-opinnoissa suuntautuville oppilaille, ja koulun on annettava valmiudet myös heille. Tässä merkittävä on lukion matematiikan jako pitkään ja lyhyeen matematiikkaan. Ne jotka aikovat jatkossa suuntautua luonnontieteisiin ja tekniikkaan, voivat lukiossa valita pitkän matematiikan.

Kuitenkin suuri osa koulussa opetettavasta asiasta muissakin aineissa on sellaista, jota ei jatkossa konkreettisesti tarvita, mutta jonka hallitsemisen katsotaan olevan arvokasta yleissivistystä. Siitä, mikä osa matematiikasta on mielestäni tällaista, olen kirjoittanut Väitteen 2 vastauksessa.

On totta, että en katso derivaatan kuuluvan matemaattiseen perusyleissivistykseen. Sitä vastoin differentiaali- ja integraalilaskentaa tarvitaan hyvinkin yksinkertaisen fysiikan ymmärtämisessä. Esimerkiksi nopeus on kuljetun matkan derivaatta ajan suhteen. Mielestäni tietty määrä fysiikkaa, ympäröivän todellisuuden perimmäisten lainalaisuuksien tutkimisena, kuuluu yleissivistykseen jos mikä. Näin derivaattakin kuuluu yleissivistykseen, ei osana matemaattista yleissivistystä vaan osana fysikaalista yleissivistystä.

Liite: Aksioomien ja määritelmien suhteesta

Väitteen 1 vastauksessa puhun siitä, että teoreemat seuraavat määritelmistä. Koska joillekin koelukijoilleni heräsi kysymys, eikö aksioomia tarvita myös, selvennän tässä liitteessä kantaani.

Tässä kannattaa huomata aksiooman roolin muuttuminen antiikista nykyaikaan. Aiemmin aksioomia pidettiin itsestäänselvyyksinä, jotka eivät tarvinneet perustelua, ja joita siksi voitiin pitää päättelyn lähtökohtana.

Nykyisin aksioomiin ei liity tuollaista itsestäänselvyyden vaatimusta, ja ne esiintyvät osana määritelmiä. Esimerkiksi topologinen avaruus määritellään miksi tahansa systeemiksi, joka toteuttaa topologisen avaruuden aksioomat. Ryhmät määritellään samalla tavoin aksiomaattisesti. Itse yleistäisin vielä tästä, ja pitäisin esimerkiksi 2. kertaluvun Peanon aksioomia luonnollisten lukujen systeemin määritelmänä: Määrittelen luonnollisten lukujen systeemin siksi isomorfiaa vaille yksikäsitteiseksi systeemiksi, joka toteuttaa 2. kertaluvun Peanon aksioomat. Reaaliluvut määrittelen vastaavasti.

Tällä lähestymistavalla tarvitsemme matematiikan lähtökohdaksi kolme asiaa:

1. Määritelmät

2. Päättelysäännöt

3. Matemaattisen konstruoimisen säännöt

Väitteen 1 vastauksessa tarkoitukseni oli käyttää sanaa ”looginen” löyhässä mielessä niin, että se kattaa pykälät (2) ja (3). Jos ollaan tarkkoja, ylläoleva lista tarkentuu muotoon

1. Määritelmät

2. 1. kertaluvun predikaattilogiikka

3. ZFC-joukko-opin aksioomat

Näin ZFC-joukko-opin aksioomat (tai, jos niin halutaan, joku niiden vahvennus, jossa voidaan puhua myös aidoista luokista) ovat ainoa aksioomien muoto, jotka ovat aksioomia vanhassa, antiikinaikaisessa mielessä. Puolustan kuitenkin niiden sisällyttämistä ”logiikkaan” vastauksessani sillä, että suuri osa matemaatikoista ei edes tunne kyseisiä aksioomia perusteellisesti, vaan suorittavat matemaattiset konstruktiot itsestäänselvänä pitämällään tavalla, joka yhtyy ZFC:ssä sallittuihin operaatioihin.

Diplomitehtävien oheislukemistoa

Osoitteessa `http://solmu.math.helsinki.fi/diplomi.html` on diplomitehtäville oheislukemistoa, joka varmasti kiinnostaa muitakin kuin diplomien tekijöitä:

Desimaaliluvut, mitä ne oikeastaan ovat?

Murtolukujen laskutoimituksia

Negatiivisista luvuista

Hiukan osittelulaista

Lausekkeet, kaavat ja yhtälöt

Äärettömistä joukoista

Erkki Luoma-aho: Matematiikan peruskäsitteiden historia

Gaussin jalanjäljissä

K. Väisälä: Algebra

Yläkoulun geometriaa

Geometrisen todistamisen harjoitus

K. Väisälä: Geometria

Lukuteorian diplomitehtävät