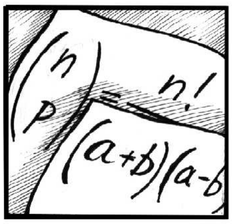


Miten integroitiin, kun ei vielä osattu integroida?

Matti Lehtinen
Helsingin yliopisto

Koulussa ja muuallakin differentiaali- ja integraalilaskentaan tutustutaan nykyään niin, että ensin opitaan derivaatta ja sitten määritellään funktion f integraalifunktio $\int f(x)\,dx$ sellaisena funktiona, jonka derivaatta on f. Sitten muistellaan derivointisääntöjä ja päätellään niistä erinäisiä integrointikaavoja, kuten

$$\int x^p\,dx = \frac{1}{p+1}x^{p+1}.$$

Hiukan yllättävänä bonuksena tulee sitten tieto, jonka mukaan integraalin avulla voi määrittää mielenkiintoisten suureiden, esimerkiksi pinta-alojen ja tilavuuksien arvoja.

Integraalin historiallinen kehitys ei ole ihan kulkenut näitä latuja. Integroinnin ja derivoinnin yhteyden oivalsivat *Isaac Newton* ja *G.W. Leibniz* 1600-luvun lopulla. Tarve määrittää esimerkiksi pinta-aloja johti kuitenkin jo aikaisemmin moniin kekseliäisiin ”integrointimenetelmiin”. Tässä esitellään muutamia.

Kun on tarkoitus selvittää jonkin käyrärajaisen alueen pinta-ala tai kappaleen tilavuus, niin aika luonnollinen lähestymistapa on yrittää täyttää kyseessä oleva kuvio mahdollisimman hyvin sellaisilla kuvioilla tai kappaleilla, joiden ala tai tilavuus hallitaan. Jos ympyrä pakataan mahdollisimman täyteen tasakylkisiä kolmioita, joiden kärki on ympyrän keskipisteessä ja kannan päätepisteet ympyrän kehällä, ja jos kolmioiden kannat ovat lyhyitä, niin niiden korkeus on likimain ympyrän säde ja yhteenlaskettu ala lähellä lukua, joka on puolet ympyrän säteestä kerrottuna ympyrän kehän pituudella. Likiarvo on sitä tarkempi, mitä pienempiin ja useampiin kolmioihin ympyrä jaetaan. Kun ympyrän kehän pituuden ja säteen r suhde on – määritelmän mukaan – 2π, niin ympyrän alan kaava $A = \pi r^2$ tulee ainakin hyvin uskottavaksi. Samalla tavalla voimme jakaa pallon melkein kokonaan pyramideiksi, joiden huippu on pallon keskipisteessä ja muut kärjet pallon pinnalla. Jos r-säteisen pallon pinta-ala on $S(r)$, niin pyramidin tilavuuskaava johtaa siihen, että pallon tilavuus on $V = \frac{1}{3}rS(r)$. Jos vielä tiedettäisiin, että $S(r) = 4\pi r^2$, saataisiin tuttu pallon tilavuuden kaava.

Tällaiset päättelyt eivät ole ihan näin suoraviivaisia, jos tutkittava alue tai kappale ei ole yhtä symmetrinen kuin ympyrä tai pallo. Katsotaan seuraavassa, miten muutamat varhaiset matemaatikot selvittivät sellaisen alueen pinta-alaa, jota rajoittaa paraabelin $y = x^2$ kaari tai yleisemmin käyrän $y = x^p$ kaari ja kaksi janaa. Oiomme vähän: xy-koordinaatit ovat olleet käytössä vasta 1600-luvulta, ja varhaisten aikojen matemaatikot joutuivat käsittelemään käyriään hankalammin.

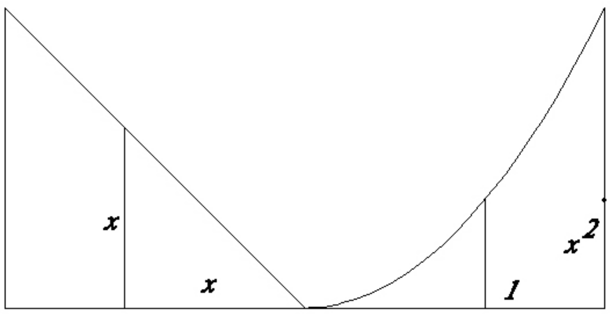
Arkhimedes

Arkhimedeen laista ja *heureka!* -huudahduksesta kuuluisa *Arkhimedes Syrakusalainen* (287–212 eKr.) on yksi kaikkien aikojen merkittävimpiä matemaatikkoja. Arkhimedes laski kahdella tavalla paraabelin segmentin alan. Toinen tapa perustui segmentin pilkkomiseen kolmioiksi, joiden alat muodostivat geometrisen lukujonon; tämän summan Arkhimedes hallitsi ja pystyi aukottomasti perustelemaan saamansa tuloksen. Toinen Arkhimedeen menetelmä oli lähempänä nykyaikaista integrointia. Esitellään se tilanteessa, jossa laskettavana on paraabelin $y = x^2$ ja suorien $y = 0$ ja $x = 1$ rajaama alueen pinta-ala S. Nykyaikaisin merkinnöin haemme siis integraalin

$$\int_0^1 x^2\,dx$$

arvoa.

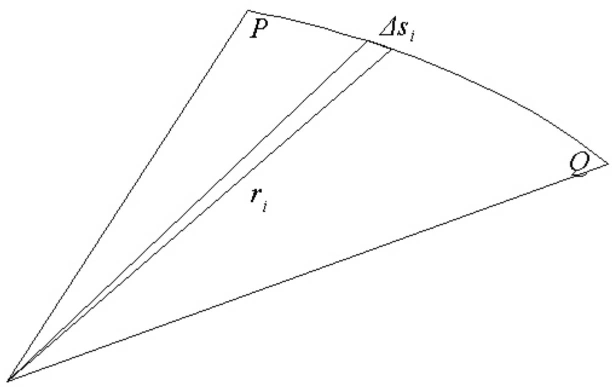
Arkhimedes ajatteli näin: pinta-ala koostuu pystysuorista janoista joiden päätepisteet ovat $(x, 0)$ ja (x, x^2) eli janoista $[(x, 0), (x, x^2)]$. Tällaisen janan pituus on siis x^2. Siirretään jana janaksi $[(1, 0), (1, x^2)]$, ikään kuin pystyyn pisteen $(1, 0)$ kohdalle. Ajatellaan sitten vaakaa, joka tasapainotetaan pisteessä $(0, 0)$. Nyt siirretty jana ja jana $[(-x, 0), (-x, x)]$ tasapainottavat vaa'assa toisensa: toisen varren pituus on 1 ja varren päässä on massa x^2, toisen varren pituus on x ja varren päässä on massa x. Mutta kun x kasvaa nollasta yhteen, niin tasapainopisteen vasemmalla puolella olevat janat peittävät kolmion, jonka kärjet ovat $(-1, 0)$, $(0, 0)$ ja $(-1, 1)$. Koska kolmio koostuu kaikista janoista $[(-x, 0), (-x, x)]$ ja kukin jana tasapainottaa janan $[(0, 1), (0, x^2)]$, niin kolmion massa tasapainottaa suoralle $x = 1$ kootun alueen A massan. Kolmion ala eli massa on $\frac{1}{2}$ ja sen voidaan ajatella keskittyvän kolmion painopisteeseen, jonka x-koordinaatti on $-\frac{2}{3}$ (muistamme, että kolmion painopiste on sen keskijanojen leikkauspiste ja että keskijanojen leikkauspiste jakaa keskijanat suhteessa $2 : 1$). Vaa'an tasapainoehdoksi tulee $S \cdot 1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}$. Siis $S = \frac{1}{3}$.



Stevin ja Kepler

Hollantilainen *Simon Stevin* (1540–1603) oli monitoiminen mies. Nykykielellä häntä voisi nimittää insinööriksi, mutta matematiikan historia muistaa hänet yhtenä ensimmäisistä desimaalilukujen käyttäjistä. Stevin suoritti integrointeja mm. painopisteen määrittämiseksi. Hän ajatteli, että jos kolmio jaetaan sivun suuntaisiksi kapeiksi kaistaleiksi, niin jokainen tällainen tasapainottuu keskipisteensä kohdalla. Mutta tästä seuraa, että koko kolmio on tasapainossa, kun se tuetaan pitkin keskijanaa. Sama pätee jokaiselle kolmelle keskijanalle, joten kolmion painopisteen on oltava keskijanojen leikkauspiste.

Johannes Kepler (1571–1630) muistetaan planeettojen liikkeitä hallitsevista Keplerin laeista, joiden pohjalle Newton myöhemmin rakensi gravitaatioteoriansa. Yhden lakinsa Kepler muotoili pinta-alan avulla: hän esitti, että auringosta planeettaan piirretty säde pyyhkäisee aina samassa ajassa saman pinta-alan. Näin ollen planeetta liikkuu nopeammin ollessaan lähellä aurinkoa ja hitaammin ollessaan kauempana.



Erikoista on, että Kepler teki lakiaan johtaessaan kaksi toisensa kumoavaa virhettä niin, että lopputulos on oikein. Kepler ajatteli, että jos planeetta kulkiessaan radallaan pisteestä P pisteeseen Q käyttää ajan t, ja jos kaari P:stä Q:hun jaetaan lyhyisiin osakaariin, joiden pituus on Δs_i niin, että osakaaren Δs_i kohdalla planeetan etäisyys auringosta on r_i, ja jos planeetan nopeus osakaaren Δs_i kohdalla on v_i ja se käyttää osakaaren yli kulkemiseen ajan Δt_i, niin

$$t = \sum \Delta t_i = \sum \frac{\Delta s_i}{v_i}.$$

Nyt Kepler otaksui lisäksi, erheellisesti, että planeetan nopeus on kääntäen verrannollinen sen etäisyyteen auringosta eli $v_i = \frac{k}{r_i}$. Siis

$$t = \frac{1}{k} \sum r_i \Delta s_i.$$

Keplerin toinen erehdys oli pitää kolmiota, jonka yksi kärki on aurinko ja toiset kaksi osakaaren Δs_i päätepisteet, tasakylkisenä ja olettaa sen pinta-alaksi $\frac{1}{2} r_i \Delta s_i$ Kun auringosta planeettaan piirretty säde pyyhkii ajassa t suunnilleen kolmioiden yhteen lasketun alan A, Keplerin kaksi virhettä yhdessä johtivat tulokseen $t = \frac{2}{k} A$, eli aika ja ala ovat verrannollisia.

Cavalieri

Bonaventura Cavalieri (1598–1647) oli italialainen matemaatikko, Galileo Galilein oppilas. Cavalieri laski ”integraaleja” yhdistelemällä luovalla tavalla eriulotteisia suureita ja laskemalla yhteen esimerkiksi äärettömän monta nollan suuruista pinta-alaa.

Selvitetään

$$I = \int_0^1 x^2\,dx$$

Cavalierin tavalla. Cavalieri ajatteli, että ”I” on kaikkien x-sivuisten, mutta paksuutta vailla olevien neliöiden ”summa”, kun x saa arvot nollasta yhteen. Jos yksikköneliö jaetaan lävistäjällä, esimerkiksi suoralla $y = x$ kahtia, niin jokainen y-akselin suuntainen jana jakautuu kahdeksi osaksi, joiden pituudet ovat x ja $1 - x$. Kaikkien 1-sivuisten neliöiden summa, joka eittämättä on 1-särmäinen kuutio, jonka tilavuus on 1, on siis sama kuin $x + (1 - x)$ sivuisten neliöiden summa. Koska $(x+(1-x))^2 = x^2+(1-x)^2+2x(1-x)$, ja kaikkien x-sivuisten ja kaikkien $(1 - x)$-sivuisten neliöiden summa on sama, on oltava

$$1 = 2\sum x^2 + 2\sum x(1-x). \tag{1}$$

(Summamerkkiä $\sum$ on tässä käytetty hiukan epäpuhdasoppisesti, Cavalierin hengessä.) Mutta jos nyt

$$x = \frac{1}{2} - z, \quad 1 - x = \frac{1}{2} + z,$$

niin

$$x(1-x) = \frac{1}{4} - z^2$$

ja

$$1 = 2\sum x^2 + \frac{1}{2} - 2\sum z^2. \tag{2}$$

Kun x käy läpi kaikki arvot nollasta yhteen, niin z käy kahdesti läpi arvot nollasta puoleen. Yhdenmuotoisten kolmiulotteisten kappaleiden tilavuuksien suhde on vastinjanojen pituuksien suhteen kolmas potenssi. Niinpä

$$\sum z^2 = \frac{1}{8}\sum x^2.$$

Kun otetaan huomioon, että kaavassa (2) oleva z^2-summa on laskettava kahdesti, saadaan

$$\frac{1}{2} = 2\sum x^2 - 2\cdot 2\cdot\frac{1}{8}\sum x^2.$$

Tästä on helppo ratkaista, että

$$\sum x^2 = \frac{1}{3} \tag{3}$$

eli

$$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}.$$

Sama tekniikka puree korkeampiinkin potensseihin, vaikka geometrinen intuitio onkin vaikeampaa: tarvittaisiin enemmän kuin kolme ulottuvuutta. Mutta merkitään $y = 1 - x$ ja ”lasketaan”:

$$\begin{aligned}1 &= \sum 1^3 = \sum (x+y)^3\\ &= \sum x^3 + \sum y^3 + 3\sum x^2y + 3\sum xy^2\\ &= 2\sum x^2 + 6\sum x^2y.\end{aligned}$$

Viimeinen yhtäsuuruusmerkki perustuu symmetriaan: kun x saa kaikki arvot nollasta yhteen, niin y:kin saa, vaikka eri järjestyksessä. Kaavojen (1) ja (3) nojalla

$$1 = 2\sum x^2 + 2\sum xy$$

eli $\sum xy = \dfrac{1}{6}$. Mutta nyt

$$\begin{aligned}\frac{1}{6} &= \sum xy = \sum (1\cdot xy)\\ &= \sum (x+y)xy = \sum x^2y + \sum xy^2,\end{aligned}$$

joten

$$\sum x^2y = \frac{1}{12}.$$

Mutta tästä seuraa, että

$$\sum x^3 = \frac{1}{2}\left(1 - 6\cdot\frac{1}{12}\right) = \frac{1}{4}.$$

Siis

$$\int_0^1 x^3\,dx = \frac{1}{4}.$$

Pascal

”Kolmiostaan” ja uskonnollis-filosofisista mietekirjoituksistaan tunnettu ranskalainen *Blaise Pascal* (1623–62) lähti selvittämään ongelmaa $\int_0^1 x^p\,dx = ?$ aivan eri suunnasta. Merkitään $x_k = \dfrac{k}{n}$. On aika luonnollista ajatella, että käyrän $y = x^p$ ja x-akselin välistä pinta-alaa voi approksimoida kapeilla suorakaiteilla, joiden kärjet ovat pisteissä $(x_k, 0)$, $(x_{k+1}, 0)$, (x_k, x_{k+1}^p) ja (x_{k+1}, x_{k+1}^p). Tällaisen suorakaiteen ala on $x_{k+1}^p\cdot\dfrac{1}{n} = \dfrac{(k+1)^p}{n^{p+1}}$ ja suorakaiteiden yhteinen ala on

$$\frac{1}{n^{p+1}}(1^p + 2^p + \cdots + n^p). \tag{4}$$

Kun n kasvaa, suorakaiteiden ala tulee lähelle käyrän ja suoran välistä alaa. Jos (4):n lauseke lähestyy arvoa $\dfrac{1}{p+1}$, niin

$$\int_0^1 x^p\,dx = \frac{1}{p+1},$$

niin kuin pitääkin. Mutta miten selvitetään kaavassa (4) oleva summa?

Otetaan avuksi Pascalin kolmio eli binomikaava. Sen mukaanhan esimerkiksi

$$(k+1)^p = \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} k^i,$$

missä olemme merkinneet tavan mukaan

$$\binom{p}{i} = \frac{p!}{i!(p-i)!};$$

$\binom{p}{i}$ on siis Pascalin kolmion p:nnen rivin i:s luku (kun ensimmäinen rivi on se, jolla on kaksi ykköstä ja kunkin rivin vasemmanpuoleisimmalle luvulle, joka on 1, annetaan järjestysluku 0). Pascalin idea on kirjoittaa erotus $(n+1)^{p+1} - 1^{p+1}$ summaksi $((n+1)^{p+1} - n^{p+1}) + (n^{p+1} - (n-1)^{p+1}) + \cdots + (2^{p+1} - 1^{p+1})$ ja soveltaa jokaiseen yhteenlaskettavaan binomikaavaa. Silloin käy näin:

$$\begin{aligned}
(n+1)^{p+1} - 1^{p+1} &= \sum_{k=1}^{n} \big((k+1)^{p+1} - k^{p+1}\big) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=0}^{p} \binom{p+1}{i} k^i \\
&= \sum_{i=0}^{p} \binom{p+1}{i} \sum_{k=1}^{n} k^i \\
&= \sum_{i=1}^{p} \binom{p+1}{i} \sum_{k=1}^{n} k^i + n.
\end{aligned}$$

Edellinen relaatio näyttää selvemmältä, jos se kirjoitetaan muotoon

$$\begin{aligned}
(n+1)^{p+1} - (n+1) &= \binom{p+1}{p} \sum_{k=1}^{n} k^p \\
&+ \binom{p+1}{p-1} \sum_{k=1}^{n} k^{p-1} + \cdots + \binom{p+1}{1} \sum_{k=1}^{n} k.
\end{aligned}$$

Kun tätä kaavaa sovelletaan peräkkäin arvoilla $p = 1, 2, \ldots$, niin havaitaan, että aina

$$\sum_{k=1}^{n} k^p = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \text{ alempia } n\text{:n potensseja.}$$

Mutta tästähän seuraa, että

$$\frac{1}{n^{p+1}}(1^p + 2^p + \cdots + n^p)$$

lähestyy n:n kasvaessa arvoa $\dfrac{1}{p+1}$! Pascal on päässyt kaavaan

$$\int_0^1 x^p\,dx = \frac{1}{p+1}.$$

Fermat

Pierre de Fermat (1601–65), ranskalainen lakimies, saavutti kuolemattoman maineen matematiikkona rohkeiden lukuteoreettisten tulosten ja otaksumiensa vuoksi. Fermat'n lähestymistapa kysymykseen $\int_0^1 x^p\,dx = ?$ oli sekin omanlaisensa ja laskennollisesti yksinkertaisempi kuin Pascalin menettely. Fermatkin lähestyi käyrän $y = x^p$ ja x-akselin väliin jäävää pinta-alaa suorakaiteiden avulla, mutta Fermat'n suorakaiteiden leveys ei ollut vakio. Fermat valitsi luvun a, joka on vähän ykköstä pienempi, ja tarkasteli suorakaiteita, joiden x-akselilla olevat kärjet ovat pisteissä $1, a, a^2, a^3, \ldots$. Jos suorakaiteen kärjet ovat $(a^{k+1}, 0)$, $(a^k, 0)$, $(a^k, (a^k)^p)$ ja $(a^{k+1}, (a^k)^p)$, niin sen ala on $a^{kp}(a^k - a^{k+1}) = (1-a)a^{(p+1)k}$ ja kaikkien suorakaiteiden alojen summa saadaan geometrisen sarjan summan avulla; se on

$$\begin{aligned}
(1-a)\sum_{k=0}^{\infty} a^{(p+1)k} &= \frac{1-a}{1-a^{p+1}} \\
&= \frac{1}{1 + a + a^2 + \cdots + a^p}.
\end{aligned}$$

Kun a tulee lähelle ykköstä, jokainen nimittäjän yhteenlaskettava tulee lähelle ykköstä ja nimittäjä itse lähelle lukua $p+1$. Kaava

$$\int_0^1 x^p\,dx = \frac{1}{p+1}$$

on saatu.