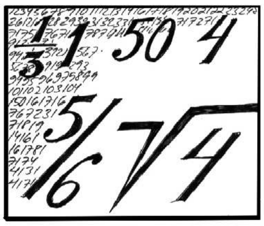


Pomppiva pallo portaissa: koulumatematiikan jännityskertomus

Eero Haahden aikanaan esittämä tehtävä

Heikki Haahti

1. Olipa kerran valveutunut medisiinari, joka luennoidessaan alan asioita halusi oppilaiden virkistävän päähän pänttäämisen jähmettämiä aivojaan luovalla ajattelulla. Niinpä hän asetti oppilaidensa harkittavaksi seuraavan ongelman, jonka ratkaiseminen edellytti ainoastaan koulukurssin matematiikkaa, ja siitäkin pelkästään yhteen-, vähennys-, kerto- ja jakolaskua sekä osittelulain $a(b+c) = ab + ac$.

Kun pallo pudotetaan K cm korkeudelta kovaan maahan kohtisuorasti maan tasoa vastaan, sen pomppauskorkeuden p suhde q pudotuskorkeuteen K on tietty ykköstä pienempi positiiviluku. Jos esim. suhdeluku q on 8 kymmenesosaa: $q = 0{,}8$, niin pudotettaessa pallo metrin korkeudesta se pomppaa 80 cm. Tämä suhdeluku ei riippune pudotuskorkeudesta K, joten meillä on seuraavassa kaikilla putoamiskorkeuden K arvoilla käyttöön tuleva laki

$$p = qK, \tag{1}$$

missä siis $0 < q < 1$. Seuraavissa sovelluksissa käytetään yo. arvoa $q = 0{,}8$.

Kyseisessä tapauksessa pallon pudottaja seisoo (hiukan viettävällä) tasaisella penkereellä korkealla portaikon yläpäässä ja pudottaa pallon korkeudelta $K = H$ cm. Pallo putoaa ensimmäisen pomppauksensa päätteeksi ylhäältä laskien ensimmäiselle porrastasanteelle, ja siitä edelleen seuraavaksi alemmalle portaalle, tästä kolmannelle portaalle jne. Koska ylätasanne on hiukan viettävä, ei pallo kohtaa sen tasoa aivan kohtisuorasti, mistä seuraa pallon liikkeelle sopiva vaakasuora komponentti ja myös pieni poikkeama pomppauskorkeuslaista (1). Tätä jälkimmäistä emme huomioi laskelmissamme. Sopivalla ylätason kaltevuuskulmalla saataneen toisaalta aikaan se, että pallon vaakasuora liikekomponentti vie pallon järjestyksessä portaalta portaalle, ilman että se pomppaa useammasti samalta portaalta tai jättää väliin portaita.

2. *Kuinka korkealle pallo pomppii edetessään alas portaita, kun kukin porrasaskelma on h cm edellisen alapuolella?* Fiksut medisiinarioppilaat päättelevät näin:

2.1. Haettuja pomppauskorkeuksia merkittäköön järjestyksessä symbolein $p_1, p_2, p_3, \ldots$ Kun pudotuskorkeus penkereelle on $K = H$ cm, pallon ensimmäinen pomppaus on siis qH cm korkea. Koska nyt ensimmäinen porrasaskelma on h cm lähtötasanteen alapuolella, joutuu pallo putoamaan lakikorkeutensa saavutettuaan ensin takaisin pomppaamansa qH cm ja sen jälkeen vielä portaan korkeuden h cm:n verran. Toiseksi putoamiskorkeudeksi tulee näin $K = p_1 + h = qH + h$ cm ja toiseksi pomppauskorkeudeksi näin ollen $p_2 = qK = q(p_1 + h) = q(qH + h)$, eli muokkaamalla lauseke osittelulain mukaan, toinen pomppaus on $p_2 = q^2H + qh$ cm. Tämän pomppauksen lakikorkeuden saavutettuaan joutuu pallo jälleen putoamaan, ensin toisen pomppauksensa p_2 määrän ja sitten edelleen jatkamaan putoamistaan portaan korkeuden h verran. Pudotuskorkeudeksi tulee nyt siis $K = p_2 + h = q^2H + qh + h$, ja kolmannen pomppauksen korkeudeksi siis $qK = q(p_2 + h) = q(q^2H + qh + h)$ eli osittelulain avulla $p_3 = q^3H + q^2h + qh$. Samalla päättelyllä saadaan edelleen neljännen pomppauksen korkeudeksi $p_4 = q^4H + q^3h + q^2h + qh$. Vaikuttaa siis siltä, että lopulta minkä hyvänsä n:nnen pomppauksen korkeudeksi tulisi

$$p_n = q^nH + q^{n-1}h + q^{n-2}h + \cdots + q^2h + qh. \qquad (2)$$

Kuitenkin tämä päättely perustuu vain tuntumaan. Joku voisi hyvällä syyllä epäillä, että jossain vaiheessa, esim. sadannen portaan jälkeen ilmestyy toisenlainen lauseke pomppauskorkeudelle. Että näin ei ole asianlaita, todistetaan seuraavassa koulustakin tutulla "*täydellisellä induktiolla*". Siinä oletetaan aluksi, että kaava (2) on pätevä, ja pyritään osoittamaan tämän "induktio-oletuksen" perusteella, että silloin sama laki pätee myös seuraavalla eli $(n+1)$:nnellä askelmalla.

Kun pallo on pompannut n:nneltä portaalta yhtälön (2) antaman verran, se siis putoaa seuraavalle portaalle ensin tämän matkan ja sitten vielä portaiden korkeuseron h verran. Yhteensä pudotuskorkeudeksi $(n+1)$:nnelle portaalle tulee siis induktio-oletuksen (2) perusteella

$$\begin{aligned} K &= p_n + h \\ &= (q^nH + q^{n-1}h + q^{n-2}h + \cdots + q^2h + qh) + h. \end{aligned}$$

Pallo pomppaa siis tältä portaalta q:nnen osan tästä, joten $(n+1)$:nneksi pomppauskorkeudeksi tulee osittelulakia käyttäen

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= qK = q(p_n + h) \\ &= q(q^nH + q^{n-1}h + q^{n-2}h + \cdots + q^2h + qh) + qh \\ &= q^{n+1}H + q^nh + q^{n-1}h + \cdots + q^2h + qh. \end{aligned}$$

Huomataan, että tässä kaavan oikea puoli antaa $(n+1)$:lle pomppaukselle induktio-oletuksen (2) mukaisen korkeuden; laissa on vain korvattava n luvulla $n+1$. Jos siis kyseinen laki pätee jollain arvolla n, niin se on voimassa myös arvolla $n+1$. Päättely jatkuu nyt seuraavasti: Koska laki on todettu oikeaksi edellä arvoon $n = 4$ saakka, se pätee edellisen päättelyn mukaan myös arvolla $n + 1 = 5$. Koska laki pätee arvolla $n = 5$, se pätee siis myös arvolla $n + 1 = 6$. Koska laki pätee arvolla $n = 6$, se pätee siis myös arvolla $n+1 = 7$ jne. Näin ulotetaan lain voimassaolon piiriin jokainen askelma, m.o.t.

Tarkastelemme nyt lähemmin saatuja pomppausten lausekkeita. Niitä esittäviin summiin ilmaantuu joka portaalla uusi positiivinen yhteenlaskettava qh. Tämän perusteella vaikuttaa siltä, että pomppauskorkeudet kasvavat pallon pomppiessa portaalta portaalle. Toisaalta, koska suhdeluku $q < 1$, merkitsee sillä kertominen aina kerrottavan pienentymistä, esim. kun $q = 0{,}8 = 8/10$, on $q \cdot 10 = 8 < 10$. Näin ollen vaikka pomppauksia kuvaavien summien yhteenlaskettavien määrä lisääntyy portaalta portaalle, yhteenlaskettavien suuruudet pienenevät. Kumpi näistä tendensseistä voittaa, eli kasvavatko pomppaukset pallon edetessä vai pienenevätkö ne? **Saa nähdä kuinka käy!**
Saa nähdä kuinka käy!

2.2. Tämän selvittämiseksi muokataan saatua pomppauksen lauseketta (2) informatiivisempaan muotoon. Otetaan sen $n-1$:n viimeisen termin summassa h yhteiseksi kerrottavaksi, osittelulakia nurinpäin käyttäen, jolloin saadaan

$$p_n = q^nH + (q^{n-1} + q^{n-2} + \cdots + q^2h + q)h. \qquad (3)$$

Porraskorkeuden h kertojana oleva summa saadaan nyt koulukurssin mukaisesti valaisevampaan muotoon merkitsemällä sitä tilapäisesti esim. symbolilla s:

$$s = q^{n-1} + q^{n-2} + \cdots + q^2 + q.$$

Tällöin osittelulain mukaan saadaan $qs = q(q^{n-1} + q^{n-2} + \cdots + q^2 + q) = q^n + q^{n-1} + \cdots + q^2$. Asetetaan summat s ja qs allekkain, niin että yhteiset termit tulevat samaan pystyriviin:

$$\begin{aligned} s &= \phantom{q^n +{}} q^{n-1} + q^{n-2} + \cdots + q^2 + q, \\ qs &= q^n + q^{n-1} + q^{n-2} + \cdots + q^2. \end{aligned}$$

Kun tässä, edelleen koulun oppeja noudattaen, suoritetaan vähennyslasku $s - qs$, niin jää vähentäjästä jäljelle ainoastaan summan ensimmäinen termi q^n miinusmerkkisenä ja vähennettävästä viimeinen yhteenlaskettava q, koska kaikki muut termit kumoutuvat nolliksi. Saadaan siis summan s määräämiseksi $s - qs = -q^n + q$, eli käyttämällä osittelulakia $s(1-q) = -q^n + q$, mistä jakamalla puolittain luvulla $1-q$,

$$s = \frac{-q^n + q}{1-q} = -\frac{q^n}{1-q} + \frac{q}{1-q}.$$

Nyt yllä olevan n:nnen pomppauskorkeuden lauseke (2) saa muodonvaihdokset

$$\begin{aligned} p_n &= q^nH + (q^{n-1} + q^{n-2} + \cdots + q^2 + q)h \\ &= q^nH + sh = q^nH + (-\frac{q^n}{1-q} + \frac{q}{1-q})h \\ &= q^nH - \frac{q^n}{1-q}h + \frac{q}{1-q}h. \end{aligned}$$

Tässä yhtälöketjun viimeisessä lausekkeessa vain kaksi ensimmäistä yhteenlaskettavaa riippuu pallon koskettamien portaiden lukumäärästä n, kun taas viimeinen termi ei siitä lainkaan riipu. Edellinen summa saakoon ympärilleen hienot sulkeet,

$$p_n = [q^nH - \frac{q^n}{1-q}h] + \frac{q}{1-q}h,$$

joista heltiää yhteiseksi tekijäksi potenssi q^n, ja niin on meillä lauseke

$$p_n = q^n[H - \frac{1}{1-q}h] + \frac{q}{1-q}h,$$

pallon n:nnen pomppauksen korkeudelle. Muistutamme, että tässä H oli pallolle annettu alkuperäinen pudotuskorkeus ylätasanteelle ja h oli kahden peräkkäisen portaan korkeusero, molemmat senteissä mitattuina.

2.3. Pomppauskorkeudelle saadun lausekkeen

$$p_n = q^n[H - \frac{1}{1-q}h] + \frac{q}{1-q}h, \qquad (4)$$

avulla tutkimme nyt edellä esiin tullutta kysymystä siitä, suurenevatko vai pienenevätkö pomppauskorkeudet. n:nnestä seuraavan pomppauksen korkeus p_{n+1} saadaan yllä olevasta lausekkeesta korvaamalla siinä n luvulla $n+1$:

$$p_{n+1} = q^{n+1}[H - \frac{1}{1-q}h] + \frac{q}{1-q}h. \qquad (5)$$

Muodostettaessa nyt lausekkeiden (4) ja (5) avulla pomppauksien korkeusero $p_{n+1} - p_n$ häviää vähennyslaskussa porraslukemasta riippumaton yhteinen jälkimmäinen yhteenlaskettava $\frac{q}{1-q}h$ ja saadaan

$$p_{n+1} - p_n = q^{n+1}[H - \frac{1}{1-q}h] - q^n[H - \frac{1}{1-q}h].$$

Muokataan tätä lauseketta tarkoituksenmukaisesti: erottamalla ensin yhteinen tekijä $q^n[H - \frac{1}{1-q}h]$ tulee kerrottavaksi $q-1$, joten osittelulain perusteella

$$p_{n+1} - p_n = q^n[H - \frac{1}{1-q}h](q-1).$$

Vaihdetaan tässä hakasuluissa oleva tekijä ja viimeinen tekijä vastaluvuikseen, jolloin tulon arvo säilyy ennallaan ja kyseisistä tekijöistä tulee $\frac{1}{1-q}h - H$ ja $1-q$. Kun tulon vaihdantalakia käyttämällä jätämme vielä hakasulkutekijän viimeiseksi, tulee lopulta kahden peräkkäisen pomppauksen korkeuseroksi

$$p_{n+1} - p_n = q^n(1-q)[\frac{h}{1-q} - H].$$

Koska ensimmäiset tekijät q^n ja $1-q$ ovat tässä aina positiivisia, seuraa että pomppauskorkeus kasvaa tai vähenee sen mukaan, onko hakasuluissa oleva erotus positiivinen tai negatiivinen. Jos esim. $q = 0{,}8$, jolloin $1 - q = 0{,}2 = 1/5$, saadaan korkeuseroksi $p_{n+1} - p_n = q^n \cdot 0{,}2[5h - H]$. Jos alkuperäiseksi pudotuskorkeudeksi H valitaan tässä viisinkertaista portaankorkeutta pienempi korkeus eli jos portaiden korkeudet h ovat suuremmat kuin viidennes pudotuskorkeudesta, niin tällöin pomppausten korkeudet kasvavat joka portaalta. Jos taas pudotuskorkeus H on viisinkertaista portaankorkeutta suurempi, eli jos kukin portaankorkeus h on pienempi kuin viidennes pudotuskorkeudesta, silloin pomppaukset pienenevät joka porrasaskeleella. Jos lopulta pudotuskorkeudeksi H valitaan tasan viisinkertainen porraskorkeus, jolloin korkeuserotusten lausekkeessa hakasuluissa oleva tekijä häviää, niin tällöin ovat kahden peräkkäisen pomppauksen korkeuserot aina $= 0$ cm, joten jokainen pomppaus on aina yhtä korkea. Tämä (ja muukin edellinen päättely) voidaan nähdä myös suoraan pomppauskorkeuden lausekkeesta (4), joka antaa yhteiseksi pomppauskorkeudeksi kaikilla n

$$p_n = q^n[H - \frac{h}{1-q}] + \frac{q}{1-q}h = \frac{q}{1-q}h.$$

Tapauksessa $q = 0{,}8$ ja $H = 5h$, on jokainen pomppaus siis $p_n = \frac{0.8}{0.2}h = 4h$ eli se on nelinkertainen porraskorkeuteen h verrattuna.

2.4. Pallon pomppauskorkeuksien selvittelyssä tutkimme lopuksi, kuinka niiden käy hyvin pitkissä portaissa, jotka jatkuvat esim. jostain korkealta alpin huipulta kauas alas laaksoon. Kopioidaan vielä tähän n:nnen pomppauksen korkeus kaavasta (4):

$$p_n = q^n[H - \frac{1}{1-q}h] + \frac{q}{1-q}h.$$

Koska tässä q on ykköstä pienempi positiivinen luku, sillä kertominen pienentää kerrottavaa, kuten edellä jo todettiin, joten erityisesti sen potenssi q^n on sitä pienempi, mitä korkeampi potenssi on kyseessä. Positiivisten lukujen jono $q, q^2, \ldots, q^n, \ldots$ on näin ollen laskeva: aina jonon luku on edeltäjäänsä pienempi, ja mitä edemmäs jonossa mennään, sitä pienempiä lukuja tulee vastaan: $1 > q > q^2 > q^3 > \ldots$ Itse asiassa kun eksponentti m rajatta kasvaa, tulee potenssi q^m tässä mielivaltaisen lähelle nollaa, eli sillä on nolla raja-arvonaan. Todistamme tämän sitovasti jäljempänä liitteessä.

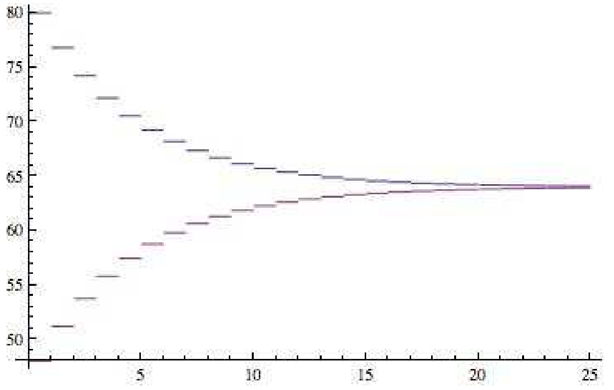
Koska nyt n:nnen pomppauskorkeuden p_n lausekkeessa hakasuluissa oleva luku on kerrottu luvulla q^n, joka tulee mielivaltaisen lähelle nollaa, seuraa tästä, että myös tulo $q^n[H - \frac{1}{1-q}h]$ lähestyy raja-arvonaan nollaa kuljettujen portaiden lukumäärän n kasvaessa. Näin ollen voidaan todeta, että hyvin pitkissä portaissa pomppausten korkeus lopulta riippuu ratkaisevasti pomppaustehon q ohella peräkkäisten portaiden korkeuserosta h, eikä lainkaan alkuperäisestä pudotuskorkeudesta H, koska pätee:

Jokaisella pallon pudotuksen H valinnalla lähestyy pomppauskorkeus aina rajatta arvoa

$$p_\infty = \frac{q}{1-q}h,$$

kun saavutettujen portaiden lukumäärä n kasvaa. Kun H on suurempi kuin $\frac{1}{1-q}h$, lähestyvät pomppauskorkeudet tätä raja-arvoa ylhäältä päin laskevasti. Milloin taas $H < \frac{1}{1-q}h$, lähestyvät ne sitä alhaalta käsin nousevasti. Kun vihdoin $H = \frac{1}{1-q}h$, niin ovat kaikki pomppaukset keskenään yhtä korkeat pomppauskorkeuden ollessa edellä esitetty arvo: $p_n = p_\infty$ kaikilla n.

Kun $q = 0{,}8$, lähestyvät pomppauskorkeudet siis rajatta arvoa $p_\infty = \frac{0.8}{0.2}h = 4h$, joka on myös pomppauksien yhteinen korkeus, kun valitaan $H = 5h$ (katso kuvaa seuraavalla sivulla).



Kuva 1. Pallon pomppauskorkeudet, kun pomppauksen suhde pudotuskorkeuteen on 0,8 *ja porrasaskelmien korkeuserot* $h = 16$ *cm. Vaaka-akselilla on portaiden järjestysluvut, pystyakselilla senttimetrit. Kriitilliseksi, aina yhtä korkeat pomppaukset tuottavaksi pudotuskorkeudeksi tulee näillä arvoilla* $H = 80$ *cm, jolloin kaikki pomppauskorkeudet ovat* $p_\infty = 64$ *cm. Tätä arvoa lähenevät sekä ylemmän että alemman katkoviivan osoittamat korkeudet. Niistä edellinen, laskeva katkoviiva kuvaa pudotuskorkeuden* $H = 100$ *cm antamia pomppauksia ja jälkimmäinen, nouseva, pudotuskorkeuden* $H = 65$ *cm alkuun panemia pomppauksia.*

Kiitokset. Kiitän lopuksi sydämellisesti professori Antti Kupiaista, joka on huolehtinut tekstiini liittyvän kuvan konstruktiosta ja auttanut tekstinkäsittelyssä.

P.S. Välttyäksemme muodikkailta moitteilta opin hyödyttömyydestä käytännön elämän kannalta muistutamme, että tietyllä matemaattisella rakenteella on monasti useita aivan yllättäviäkin sovelluksia. Niinpä edelläkin voimme sijoittaa: $H =$ yhteisön säästö, $q =$ vuotuisen käytön jälkeen säästöstä jäljelle jäävä prosenttiosuus, $h =$ seuraavan vuoden alussa suoritettu säästön lisäys, $p_n =$ säästö n:nnen vuoden alussa.

Liite

Tässä liitteessä on kyse siitä, tuleeko ykköstä pienemmän positiiviluvun n:s potenssi todella mielivaltaisen lähelle nollaa, kun eksponentti n kasvaa rajatta.

Kuten edellä jo ilmeni, positiivisten lukujen jono

$$1, q, q^2, \ldots, q^n, \ldots \tag{6}$$

on laskeva: kukin sen luvuista on edeltäjäänsä pienempi. Seuraako tästä siis, että q^n lähestyy mielivaltaisen lähelle nollaa? Eipä suinkaan, sillä esim. ykköstä pienempien positiivilukujen jono

$$a_1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}, a_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}, a_3 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}, a_4 = \frac{1}{3} + \frac{1}{5}, \ldots$$

on niin ikään laskeva, mutta jokainen sen luku pysyy luvun $\frac{1}{3}$ yläpuolella, eikä näin ollen voi tulla mielivaltaisen lähelle nollaa.

Epäilyksiä väitteen todenperäisyyttä vastaan herättää myös se, että luku q voi olla hyvin lähellä lukua 1, esim. $q = 0{,}999$, jolloin jonossa (6) kukin jäsen on aivan vähän edeltäjäänsä pienempi, joten jonon jäsenet pienenevät hyvin hitaasti, ja on epäilyksen alaista, voiko jonon jäsen q^n todella koskaan päästä mielivaltaisen lähelle nollaa.

Nämä vastaväitteet kuitenkin voidaan kumota. Se voisi tapahtua helposti logaritmeja käyttämällä, mutta alkuperäisen työohjelmamme mukaanhan tarkoitus oli käyttää vain alussa mainittuja peruslaskutoimituksia, joten luovumme logaritmeista ja suoritamme sen sijaan alkeellisin keinoin epäsuoran todistuksen.

Teesimme kuuluu siis: kun q on mikä hyvänsä lukua 1 pienempi positiiviluku, niin q^n tulee mielivaltaisen lähelle nollaa, kun eksponentti n kasvaa rajatta.

Antiteesin mukaan teesi on väärä, joten on olemassa joku niin pieni positiivinen luku ϵ, että se estää alenevan jonon $1, q, q^2, \ldots$ pääsyn ohitseen kohti nollaa, joten jokaisella m pätee aina $q^m > \epsilon$. Meillä on antiteesin mukaan siis

$$1 > \epsilon, q > \epsilon, q^2 > \epsilon, \ldots, q^{n-1} > \epsilon, \ldots$$

Kun suoritetaan puolittain yhteenlasku, on vasemmilla puolilla olevien suurempien lukujen summa suurempi kuin epäyhtälöiden oikealla puolella olevien lukujen summa, tämän jälkimmäisen ollessa $= n\epsilon$, ja saadaan epäyhtälö

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} > n\epsilon.$$

Käyttämällä samaa metodia kuin edellä kohdassa 2.2. merkitään epäyhtälön vasenta puolta symbolilla s, jolloin siis $s > n\epsilon$, ja valitaan vähentäjäksi qs:

$$\begin{aligned} s &= 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}, \\ qs &= q + q^2 + \cdots + q^n. \end{aligned}$$

Saadaan $s - qs = 1 - q^n$, joten $(1 - q)s = 1 - q^n$ ja

$$s = \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{1}{1 - q} - \frac{q^n}{1 - q}.$$

Päätellään edelleen $\frac{1}{1-q} > \frac{1}{1-q} - \frac{q^n}{1-q} = s > n\epsilon$. Antiteesin seurauksena olisi siis jokaisella kokonaisluvulla n voimassa epäyhtälö

$$\frac{1}{1 - q} > n\epsilon.$$

Mutta vaikka ϵ voi olla pieni, kasvaa tämän epäyhtälön oikea puoli kokonaisluvun n kasvaessa yli kaikkien rajojen ja erityisesti yli luvun $\frac{1}{1-q}$; ylittyyhän tämä raja jo, kun $n > \frac{1}{\epsilon(1-q)}$. Olemme tulleet ristiriitaan. Antiteesi on siis väärä ja teesi oikea, joten todella q^n tulee mielivaltaisen lähelle nollaa, kun n suurenee rajatta.