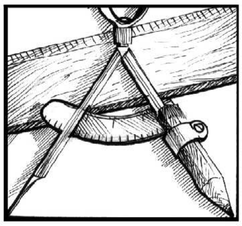

Orsivaakoja, tuulimyllyjä ja peilauksia – vuoden 2011 koululaisten matematiikkaolympialaiset Amsterdamissa

Anne-Maria Ernvall-Hytönen
Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

Johdanto

Tämän vuoden matematiikkaolympialaisista muistetaan tuulimyllyt. Nämä tuulimyllyt eivät ole mitään reaalisia hollantilaisia lajinsa edustajia (vaikka ehkäpä nekin muistetaan), vaan tasossa pisteitä läpikäyviä prosesseja, joita tarkastellaan ensimmäisen päivän toisessa tehtävässä.

Olen nyt kuitenkin kiiruhtamassa asioiden edelle, joten aloitetaanpa alusta. Kansainväliset matematiikkaolympialaiset järjestettiin 12.-24.7.2011 Amsterdamissa, Alankomaissa. Aluksi paikalla olivat vain joukkueiden johtajat, jotka olivat huippusalaisessa paikassa Eindhovenin lähellä valitsemassa tehtäviä. Muutamaa päivää myöhemmin kilpailijat saapuivat Amsterdamiin ja pääsivät töihin ratkomaan tehtäviä.

Tämän vuoden erikoisuutena voidaan pitää vain yhtä klassisen geometrian tehtävää (vaikkakin edellä mainitut tuulimyllyt olivatkin kombinatorista geometriaa). Viimeksi matematiikkaolympialaisissa on ollut vain yksi geometrian tehtävä liki kaksikymmentä vuotta sitten. Triviaali ei päätös tänä vuonna ollut: Kun viisi tehtävää kuudesta oli valittu, oli joukossa yksi geometrian tehtävä. Viimeisenä valittiin toista keskitason tehtävää, ja vastakkain olivat klassisen geometrian edustaja ja tuulimyllyt. Tuulimyllyt voittivat äänin 47-46 (allekirjoittanut voi myöntää menettäneensä jo toivonsa, koska geometrialla tuntui olevan valtaisasti kannattajia aikaisemmissa äänestyksissä). En voi väittää, että tuulimyllytehtävä olisi oma suosikkini ollut, ja äänestinkin sitä lähinnä äänestääkseni geometriaa vastaan, mutta tässä minun on myönnettävä virhearvioni: tehtävä oli erittäin onnistunut ja ratkaisu uskomattoman kaunis.

Muista tehtävistä todettakoon, että geometrian tehtävä on hirvittävän hankala (ja oikeutetusti toisen päivän viimeisen tehtävän paikalla). Algebraa oli tänä vuonna kahden tehtävän verran, joskin monet väittävät toista algebran tehtävää lukuteorian alaan kuuluvaksi. Rehellisesti lukuteorian listalta on valittu yksi tehtävä. Kaiken kaikkiaan tehtävät eivät vaadi erityisen järeää lukuteorian tai algebran kalustoa. Geometria sen sijaan vaatii todellista asiantuntemusta. Kombinatoriikan tehtävät vaativat tyypilliseen tapaan suhteellisen kevyttä teoriaa, mutta huomattavaa kekseliäisyyttä.

Suomea edustivat kilpailussa Olli Hirviniemi, Jesse Jääsaari, Ilmari Kangasniemi, Dimitri Kirichenko, Olli Teräväinen ja Felix Vaura. Olli Hirviniemi sai hopeaa sekä Kangasniemi, Kirichenko ja Vaura saivat kunniamaininnan. Joukkuetta johti FT Anne-Maria Ernvall-Hytönen ja varajohtajana oli FM Esa Vesalainen.

Viimeisinä sanoina ennen tehtäviin ja ratkaisuihin siirtymistä: Jos tähän astinen hehkutus ei ole vielä vakuuttanut tuulimyllyjen kauneudesta, ja jos et koko tehtävälistaa aio lukea läpi, vilkaise edes ensimmäisen päivän toinen tehtävä ratkaisuineen.

Tehtävät

Ensimmäinen päivä

Tehtävä 1. Olkoon $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ neljästä erisuuresta positiivisesta kokonaisluvusta koostuva joukko, jonka alkioiden summasta $a_1+a_2+a_3+a_4$ käytetään merkintää s_A. Olkoon n_A niiden parien (i,j) lukumäärä, joilla $1 \leq i < j \leq 4$ ja $a_i + a_j$ jakaa luvun s_A. Etsi kaikki sellaiset neljän erisuuren positiivisen kokonaisluvun joukot A, jotka saavuttavat suurimman mahdollisen arvon n_A.

Tehtävä 2. Olkoon $\mathcal{S}$ vähintään kahdesta pisteestä koostuva äärellinen joukko tasossa. Oletetaan, että mitkään kolme joukon $\mathcal{S}$ pistettä eivät ole samalla suoralla. Kutsutaan *tuulimyllyksi* prosessia, joka alkaa suoralla ℓ, joka kulkee yksittäisen pisteen $P \in \mathcal{S}$ kautta. Suora pyörii myötäpäivään *kierron keskipisteen* P ympäri kunnes se törmää johonkin toiseen joukkoon $\mathcal{S}$ kuuluvaan pisteeseen. Nyt tämä piste Q alkaa toimia kierron keskipisteenä, ja suora pyörii myötäpäivään pisteen Q ympäri kunnes se törmää jälleen joukon $\mathcal{S}$ pisteeseen. Tämä prosessi jatkuu loputtomasti.

Osoita, että voidaan valita sellainen $P \in \mathcal{S}$ ja pisteen P kautta kulkeva suora ℓ, että näistä aloitettu tuulimylly käyttää jokaista joukon $\mathcal{S}$ pistettä kierron keskipisteenä äärettömän monta kertaa.

Tehtävä 3. Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ reaaliarvoinen funktio, joka on määritelty reaalilukujen joukossa ja joka toteuttaa ehdon

$$f(x + y) \leq yf(x) + f(f(x))$$

kaikilla reaaliluvuilla x ja y. Osoita, että $f(x) = 0$ kaikilla $x \leq 0$.

Toinen päivä

Tehtävä 4. Olkoon $n > 0$ kokonaisluku. Käytössämme on orsivaaka ja n painoa, joiden painot ovat $2^0, 2^1, \ldots, 2^{n-1}$. Meidän tulee asettaa painot yksitellen vaa'alle siten, että oikea vaakakuppi ei ole koskaan painavampi kuin vasen vaakakuppi. Joka vaiheessa valitaan yksi jäljellä olevista painoista ja asetetaan se joko vasempaan tai oikeaan vaakakuppiin, kunnes kaikki painot ovat vaa'alla.

Määritä kuinka monella tapaa tämä voidaan tehdä.

Tehtävä 5. Olkoon f funktio kokonaislukujen joukolta positiivisten kokonaislukujen joukkoon. Oletetaan, että millä tahansa kahdella kokonaisluvulla m ja n erotus $f(m) - f(n)$ on jaollinen luvulla $f(m - n)$. Osoita, että kaikilla kokonaisluvuilla m ja n, joilla $f(m) \leq f(n)$, pätee, että $f(n)$ on jaollinen luvulla $f(m)$.

Tehtävä 6. Olkoon ABC teräväkulmainen kolmio, jonka ympäri piirretty ympyrä on Γ. Olkoon suora ℓ ympyrän Γ tangentti, ja olkoot ℓ_a, ℓ_b ja ℓ_c suorat, jotka on saatu peilaamalla suora ℓ suorien BC, CA ja AB suhteen tässä järjestyksessä. Osoita, että suorien ℓ_a, ℓ_b ja ℓ_c määrittelemän kolmion ympäri piirretty ympyrä sivuaa ympyrää Γ.

Ratkaisut

Ensimmäinen päivä

Ratkaisu 1. Osoitetaan ensimmäiseksi, että $n_A \leq 4$. Voidaan olettaa, että $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$. Yhteensä pareja joukossa on $\binom{4}{2} = 6$ kappaletta. Kun $i \neq j$, huomataan, että $a_i + a_j$ jakaa luvun s_A jos ja vain jos $a_i + a_j$ jakaa luvun $s_A - a_i - a_j = a_k + a_\ell$, missä a_k ja a_ℓ ovat toiset joukon A alkiot. Koska $a_1 + a_2 < a_3 + a_4$, ei voi olla, että $a_3 + a_4 | a_1 + a_2$, eikä myöskään $a_2 + a_4 | a_1 + a_3$. Täten on todistettu, että $n_A \leq 4$. Osoitetaan nyt, että tämä on mahdollista.

Jos $n_A = 4$, niin

$$\begin{aligned} &a_1 + a_2 | a_3 + a_4 \qquad && a_1 + a_3 | a_2 + a_4 \\ &a_1 + a_4 | a_2 + a_3 && a_2 + a_3 | a_1 + a_4. \end{aligned}$$

Jälkimmäisen rivin relaatioiden perusteella $a_1 + a_4 = a_2 + a_3$. Kirjoitetaan nyt $u = a_1 + a_2$ ja $v = a_1 + a_3$. Näiden molempien lukujen on oltava luvun $s_A = 2(a_2 + a_3) = 2(v + u - 2a_1)$ jakajia. Täten $u | 2(v - 2a_1)$. Koska $u > v$, on varmasti $u > v - 2a_1$ (huomioitava, että $v - 2a_1 > 0$). Täten $u = 2(v - 2a_1)$. Toisaalta, luvun v on jaettava luku $2(u - 2a_1) = 2(2(v - 2a_1) - 2a_1) = 4v - 12a_1$, joten $v | 12a_1$. Koska $v < u = 2v - 4a_1$, saadaan $v > 4a_1$. Yhdistäen tämä epäyhtälö relaatioon $v | 12a_1$ saadaan $v = 6a_1$ tai $v = 12a_1$. Laskemalla läpi nämä kaksi tapausta saadaan ratkaisujoukot $A = \{a_1, 5a_1, 7a_1, 11a_1\}$ ja $A = \{a_1, 11a_1, 19a_1, 29a_1\}$, jotka molemmat toteuttavat tehtävän ehdot, ja jotka ovat ainoat ehdot toteuttavat joukot.

Ratkaisu 2. Erotellaksemme suoran eri puolilla olevat pisteet kutsumme suoran puolia oranssiksi ja siniseksi. Huomataan, että kun kierron keskipiste vaihtuu jostakin pisteestä T johonkin toiseen pisteeseen U, on piste T tämän jälkeen samalla puolella suoraa kuin U oli ennen kierron keskipisteeksi siirtymistään (epäluuloinen lukija voi piirtää kuvan tilanteesta). Täten pisteiden määrä oranssilla ja sinisellä puolella ei muutu, vaan pysyy vakiona koko prosessin ajan niitä hetkiä huomioimatta, jolloin kierron keskipiste on juuri vaihtumassa, ja suora hetkellisesti sisältää kaksi pistettä. Tehdään loppu todistuksesta kahtena erikoistapauksena, riippuen siitä, onko joukossa parillinen vai pariton määrä pisteitä. Aloitetaan parittomasta tilanteesta. Nyt $|\mathcal{S}| = 2n+1$. Olkoon ℓ mikä tahansa suora, joka jakaa joukon $\mathcal{S}$ kahteen yhtäsuureen osaan. Kunhan suoran ℓ suunta on annettu, on suora yksikäsitteinen, ja menee jonkin pisteen $T \in \mathcal{S}$ kautta. Tarkastellaan tästä pisteestä alkavaa tuulimyllyä. Kun suora on tehnyt $180°$ käännöksen, on se palannut lähtöpisteeseensä, mutta suoran molemmilla puolilla olevat pisteet ovat vaihtaneet väriä. Koska suoran puolelta toiselle ei voi siirtyä (eli väriä ei voi vaihtaa) toimimatta kierron keskipisteenä, ovat ilmeisesti kaikki pisteet toimineet kertaalleen kierron keskipisteenä. Koska prosessi jatkuu eteenpäin samalla tavalla kuin tähänkin saakka, tämä todistaa väitteen.

Siirrytään nyt parilliseen tilanteeseen, eli $|\mathcal{S}| = 2n$. Tarkastellaan suoraa, joka jakaa joukon osiin, joiden koot ovat n ja $n-1$, ja joka kulkee jonkin pisteen T kautta. Tästä pisteestä lähtenyt tuulimylly kulkee jonkin pisteen R kautta tehtyään $180°$ käännöksen, ja kaikki muut pisteet, paitsi R ja T, ovat vaihtaneet väriä. Täten tuulimylly on kulkenut kaikkien pisteiden läpi. (Seuraavan $180°$ käännöksen jälkeen se kulkee jälleen pisteen T kautta, ja alkaa täten alusta. Näin jälleen saadaan tuulimylly kulkemaan äärettömän monta kertaa kaikkien pisteiden kautta.)

Ratkaisu 3. Kirjoitetaan $a = f(0)$, ja sijoitetaan $x = 0$ tehtävänannon epäyhtälöön. Tästä saadaan $f(y) \leq ay + f(a)$ kaikilla reaaliluvuilla y. Sijoittamalla $y = a - x$ tehtävänannon epäyhtälöön ja käyttämällä jo saatua epäyhtälöä todetaan, että

$$\begin{aligned} f(a) &\leq (a-x)f(x) + f(f(x)) \\ &\leq (a-x)f(x) + af(x) + f(a), \end{aligned}$$

ja täten

$$0 \leq (2a - x)f(x).$$

Ennen kaikkea, jos $x < 2a$, niin $f(x) \geq 0$.

Oletetaan, että $f(x) > 0$ jollakin x. Siinä tapauksessa tehtävänannon epäyhtälön oikea puoli $\to -\infty$, kun $y \to -\infty$, mutta tämä ei ole mahdollista, sillä $f(x) \geq 0$ riittävän pienillä x. Siispä, $f(x) \leq 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Erityisesti $f(x) = 0$, kun $x < 2a$. Lisäksi, koska funktio saa ainoastaan epäpositiivisia arvoja, saadaan tehtävänannon epäyhtälöstä

$$f(x+y) \leq yf(x) + f(f(x)) \leq yf(x). \qquad (1)$$

Osoitetaan nyt, että jos $f(a) = 0$ ja $b < a$, niin $f(b) = 0$. Tämä tehdään sijoittamalla $x = b$ ja $y = a-b$ epäyhtälöön (1), jolloin saadaan $f(b) \geq 0$, ja koska tiedettiin ennestään, että $f(b) \leq 0$, tämä tarkoittaa, että $f(b) = 0$.

Nyt olemme valmiita ratkaisun viimeiseen vaiheeseen. Edellisen vaiheen nojalla riittää osoittaa, että $f(0) = 0$. Otetaan mikä tahansa funktion f nollakohta r ja sijoitetaan $x = r$ ja $y = 0$ tehtävänannon epäyhtälöön. Tästä saadaan $f(0) \geq 0$, jolloin $f(0) = 0$.

Toinen päivä

Ratkaisu 4. Sijoittelujen lukumäärä on

$$(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1).$$

Osoitetaan nyt tämä. Merkitään n painolla sijoittelujen lukumäärää $f(n)$. Jos $n = 1$, niin tilanne on helppo: painon on mentävä vasempaan vaakakuppiin, eli $f(1) = 1$.

Olkoon nyt $n \geq 2$. Väitetään, että

$$f(n) = (2n-1)f(n-1).$$

Huomataan, että voidaan hetkeksi unohtaa kevyin paino, koska riippumatta siitä, milloin se vaakakuppiin sijoitetaan, se ei mitenkään vaikuta muiden painojen sijoitteluun. Keskitytään nyt siis vain painoihin $2^1, 2^2, \ldots, 2^{n-1}$. Näiden painojen painot voidaan jakaa kahdella, koska se ei mitenkään vaikuta sijoitteluihin. Näin on siirrytty tarkastelemaan painojen $2^0, 2^1, \ldots 2^{n-2}$ sijoittelua. Nämä voidaan sijoittaa $f(n-1)$ eri tavalla.

Voidaan nyt pohdiskella (alkuperäisen) kevyimmän painon sijoittelua: Jos tämä asetetaan ensimmäisenä, se menee vasempaan vaakakuppiin. Jos se sijoitetaan missä tahansa muussa vaiheessa, voidaan se laittaa kumpaan tahansa vaakakuppiin. Vaihtoehtoja on siis $2n-1$ erilaista. Yhteensä saadaan

$$f(n) = (2n-1)f(n-1),$$

josta rekursio purkamalla saadaan (alkuehto $f(1) = 1$ huomioiden)

$$f(n) = (2n-1)!!.$$

Ratkaisu 5. Olkoot x ja y kokonaislukuja, joilla $f(x) < f(y)$. Osoitetaan, että $f(x) | f(y)$. Sijoittamalla $m = x$ ja $n = y$ tehtävänannon relaatioon saadaan

$$f(x-y) \,\big|\, |f(x) - f(y)| = f(y) - f(x) > 0,$$

joten $f(x-y) \leq f(y) - f(x) < f(y)$. Täten erotukselle $d = f(x) - f(x-y)$ pätee

$$-f(y) < -f(x-y) < d < f(x) < f(y).$$

Sijoittamalla $m = x$ ja $n = x - y$ tehtävänannon relaatioon saadaan $f(y)|d$, joten $d = 0$, eli $f(x) = f(x - y)$. Valitsemalla $m = x$ ja $n = y$ tehtävänannon relaatiossa saadaan

$$f(x) = f(x - y)|f(x) - f(y),$$

joten $f(x)|f(y)$.

Ratkaisu 6. Käytetään kirjainta T merkitsemään sitä pistettä, jossa suora ℓ sivuaa ympyrää Γ. Olkoon $A' = \ell_b \cap \ell_c$, $B' = \ell_a \cap \ell_c$ ja $C' = \ell_a \cap \ell_b$. Valitaan piste A'' ympyrällä Γ siten, että $TA = AA''$ ($A'' \neq T$ paitsi jos TA on halkaisija). Valitaan pisteet B'' ja C'' samalla tavalla.

Koska pisteet C ja B ovat kaarien TC'' ja TB'' keskipisteet, saadaan

$$\begin{aligned}\angle(\ell, B''C'') &= \angle(\ell, TC'') + \angle(TC'', B''C'')\\ &= 2\angle(\ell, TC) + 2\angle(TC'', BC'')\\ &= 2\left(\angle(\ell, TC) + \angle(TC, BC)\right)\\ &= 2\angle(\ell, BC)\\ &= \angle(\ell, \ell_a).\end{aligned}$$

Tästä seuraa, että ℓ_a ja $B''C''$ ovat yhdensuuntaisia. Vastaavasti, $\ell_b||A''C''$ ja $\ell_c||A''B''$. Siispä, joko kolmiot $A'B'C'$ ja $A''B''C''$ ovat siirrokset toisistaan tai toinen on saatu toisesta kutistamalla tai venyttämällä jonkin pisteen suhteen (homotetia). Osoitetaan nyt, että jälkimmäinen vaihtoehto pätee ja että homotetian keskus K on ympyrällä Γ. Tästä seuraisi, että myös ympäri piirretyt ympyrät saataisiin homotetialla pisteen K suhteen, ja täten sivuaisivat toisiaan tässä pisteessä, kuten toivottu.

Tarvitaan seuraavat kaksi väitettä:

Väite 1. Suorien $B''C$ ja BC'' leikkauspiste X on suoralla ℓ_a.

Todistus. Itse asiassa, pisteet X ja T ovat symmetrisiä suoran BC suhteen, sillä suorat CT ja CB'' ovat symmetrisiä tämän suoran suhteen, kuten ovat myös suorat BT ja BC''.

Väite 2. Suorien BB' ja CC' leikkauspiste I on ympyrällä Γ.

Todistus. Tarkastellaan tilannetta, jossa ℓ ei ole yhdensuuntainen kolmion ABC sivujen kanssa; muut tapaukset voidaan tarkastella rajatapauksina. Olkoot $D = \ell \cap BC$, $E = \ell \cap AC$ ja $F = \ell \cap AB$.

Symmetrian vuoksi suora DB on yhden suorien $B'D$ ja FD välisen kulman puolittaja. Vastaavasti suora FB on yhden suorien $B'F$ ja DF välisen kulman puolittaja. Siispä B on joko kolmion $B'DF$ sisään piirretyn ympyrän keskipiste tai ulkokulmien ja sisäkulmien puolittajien leikkauspiste. Joka tapauksessa

$$\angle(BD, DF) + \angle(DF, FB) + \angle(B'B, B'D) = 90^\circ,$$

joten

$$\begin{aligned}\angle(B'B, B'C') &= \angle(B'B, B'D)\\ &= 90^\circ - \angle(BC, DF) - \angle(DF, BA)\\ &= 90^\circ - \angle(BC, AB).\end{aligned}$$

Vastaavasti saadaan $\angle(C'C, B'C') = 90^\circ - \angle(BC, AC)$. Täten

$$\begin{aligned}\angle(BI, CI) &= \angle(B'B, B'C') + \angle(B'C', C'C)\\ &= \angle(BC, AC) - \angle(BC, AB)\\ &= \angle(AB, AC),\end{aligned}$$

mikä tarkoittaa täsmälleen, että A, B, I, C ovat samalla ympyrällä.

Nyt voidaan saattaa todistus loppuun. Olkoon K toinen suoran $B'B''$ ja ympyrän Γ leikkauspiste. Käyttämällä Pascalin lausetta kuusikulmiolle $KB''CIBC''$ saadaan, että pisteet $B' = KB'' \cap IB$ ja $X = B''C \cap BC''$ ovat samalla suoralla suorien CI ja $C''K$ leikkauspisteen S kanssa. Siispä $S = CI \cap B'X = C'$, ja pisteet C', C'', K ovat samalla suoralla. Täten K on suorien $B'B''$ ja $C'C''$ leikkauspiste, mikä tarkoittaa, että K on sen homotetian keskus, joka kuvaa kolmion $A'B'C'$ kolmiolle $A''B''C''$, ja se kuuluu ympyrälle Γ.