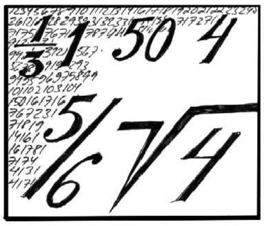


Mitä ovatkaan merkitsevät numerot?

Juho Niemelä
Kustannustoimittaja, Tammi Oppimateriaalit

Kirjoissa ja internetissä kerrotaan melkoisen vaihtelevasti siitä, mitä ovat merkitsevät numerot. Yleensä sanotaan, että desimaaliluvun alussa olevat nollat eivät ole merkitseviä. Toisinaan sanotaan myös, että kokonaisluvun lopussa olevat nollat eivät ole merkitseviä. Kukaan ei tunnu haluavan kertoa yksinkertaisesti ja täsmällisesti, mitkä kaikki numerot ovat merkitseviä. Ei edes Kalle Väisälä ollut kirjassaan *Algebran oppi- ja esimerkkikirja I* (15. painos, s. 147) kovin täsmällinen:

”Jos taas viimeinen näistä n:stä desimaalista on hieman epävarma, niin se kuitenkin usein säilytetään likiarvossa, vaikka se *saattaakin* olla jonkin verran virheellinen, ja likiarvossa sanotaan tällöin olevan *n merkitsevää desimaalia*, so. desimaaleja, joilla on jotakin merkitystä.”

Kallen määritelmä on minusta hankala. Pyrin tässä yksinkertaisempaan. Vastaan heti aluksi keskeisimpiin kysymyksiin:

- Ovatko desimaaliluvun alussa olevat nollat merkitseviä numeroita?
  - Eivät ole, koskaan. Oikeita numeroita ne voivat olla.

- Ovatko nollia seuraavat numerot merkitseviä numeroita?
  - Yleispätevää vastausta ei ole. Kysy likiarvon antajalta, kuinka suuri on likiarvon virhe, niin sitten osaan vastata. Jos virheestä ei saada tietoa, usein voinee olettaa, että numerot ovat oikeita ja siis myös merkitseviä (koska ne eivät ole alkunollia).

- Ovatko kokonaisluvun lopussa olevat nollat merkitseviä?
  - Sama vastaus kuin edelliseen. Tosin epävarmuus niiden oikeellisuudesta eli merkitsevyydestä on suurempi kuin edellisessä tapauksessa.

- Kerrotko siis vielä oikein lyhyesti, mitä ovat merkitsevät numerot?
  - Numeroita, jotka eivät ole alkunollia ja jotka ovat oikeita. Numeron oikeellisuus riippuu likiarvon virheestä. Jos virheen suuruudesta ei tiedetä mitään, merkitsevien numeroiden lukumääräkään ei tiedetä. Lue lisää alempaa...

Likiarvo ja virhe. Oikeat ja merkitsevät numerot

Toisinaan luvun tarkkaa arvoa ei tiedetä vaan on turvauduttava **likiarvoihin**. Likiarvossa on yleensä virhettä. Määritellään:

$$(\textbf{absoluuttinen})\ \textbf{virhe} = |\text{tarkka arvo} - \text{likiarvo}|.$$

Tarvittaessa voidaan asettaa myös seuraava määritelmä:

$$\textbf{korjaus} = \text{tarkka arvo} - \text{likiarvo},$$

ts.

$$\text{tarkka arvo} = \text{likiarvo} + \text{korjaus}.$$

Likiarvon numero on **oikea**, jos likiarvon virhe on korkeintaan puolet numeron paikkaa vastaavasta yksiköstä (kymmenpotenssista). Esimerkki valaisee asiaa:

$$\begin{aligned}\text{tarkka arvo} &= 1\\ \text{likiarvo} &= 1{,}0234\\ \text{virhe} &= 0{,}0234\end{aligned}$$

Nyt likiarvon viimeinen oikea numero on 0, sillä numeron 0 paikkaa vastaava yksikkö on 0,1 ja

$$\text{virhe} = 0{,}0234 \leq 0{,}05 = 0{,}5 \cdot 0{,}1.$$

Seuraava numero 2 ei enää ole oikea, koska

$$\text{virhe} > 0{,}005 = 0{,}5 \cdot 0{,}01.$$

Oikeita ovat siis kaksi ensimmäistä numeroa 1 ja 0.

Viimeinen oikea numero löydetään seuraavasti:

- Laske likiarvon virhe.
- Katso virheen ensimmäistä nollasta poikkeavaa numeroa: onko se ≤ 5 vai > 5?
  - Jos se on ≤ 5 (ja tapauksessa 5 numeron perässä on vain nollia), tämän numeron paikkaa *edeltävällä* paikalla oleva likiarvon numero on viimeinen oikea numero.
  - Jos se on > 5 (tai 5 ja roskia perässä), tämän numeron paikkaa *kahta edempänä* oleva likiarvon numero on viimeinen oikea numero.

Havainnollistetaan tätä:

tarkka arvo:	1	1
likiarvo:	$\overbrace{1\,,\,0}^{\text{oikeita}}\,\overbrace{2\;3\;4}^{\text{eivät oikeita}}$	$\overbrace{1\,,\,0}^{\text{oikeita}}\,\overbrace{0\;7\;8}^{\text{eivät oikeita}}$
	1 askel	2 askelta
virhe:	$0\,,\,0\boxed{2}\,3\;4$	$0\,,\,0\;0\boxed{7}\,8$
	≤ 5	> 5

Likiarvon **merkitseviä numeroita** ovat kaikki oikeat numerot paitsi mahdolliset likiarvon alussa olevat nollat. **Oikeita desimaaleja** ovat kaikki desimaalipilkun jälkeen tulevat oikeat numerot.

Tästäkin esimerkki:

$$\begin{aligned}\text{tarkka arvo} &= 0{,}1\\ \text{likiarvo} &= 0{,}0995\\ \text{virhe} &= 0{,}0005\end{aligned}$$

Oikeita numeroita ovat 0, 0, 9 ja 9, joista merkitseviä ovat yhdeksiköt. Likiarvossa on siis kaksi merkitsevää numeroa. Oikeita desimaaleja on kolme (0, 9, 9).

Huomautus: Väisälän määritelmä eroaa edellä esitetystä määritelmästä ainoastaan tilanteissa, joissa virhettä ei tiedetä tarkasti. Väisälän mukaan oikeiksi tiedettyjä numeroita seuraavakin numero on merkitsevä, jos ”sillä on merkitystä”, minkä ymmärtäisin tarkoittavan jotakin sellaista kuin ”jos se on oikea kohtalaisen suurella todennäköisyydellä”. Jos esimerkiksi käsiajanotolla saatu aika on 14,6 s ja virheen tiedetään olevan korkeintaan 0,2 s, niin Väisälän mukaan kaikki numerot ovat merkitseviä, sillä onhan hyvinkin mahdollista, että myös 6 on oikea. Mutta jos myöhemmin saadaan tietoon sähköaika 14,72 s, niin sillä hetkellä kaiketi 6 *lakkaa olemasta merkitsevä*, koska silloin tiedetään *varmasti*, ettei se ole oikea. Se, että numeron merkitsevyys riippuu virhetiedosta, on aika hankalaa ymmärtää ja opettaa. Tässä esitetyn määritelmän pohjalta asiat menevät minusta yksinkertaisemmin: käsiajassa numerot 1 ja 4 ovat varmasti merkitseviä, ja numeron 6 merkitsevyyttä ei yksinkertaisesti tiedetä. Sähköajan kuulemisen yhteydessä selviää, että 6 ei ole merkitsevä. – Jatketaan nyt siis edellä esitetyn määritelmän pohjalta.

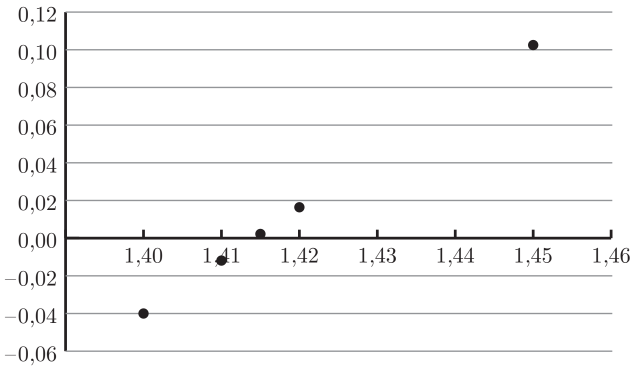
Huomaa, että tarkasta arvosta pyöristämällä ja normaaleja pyöristyssääntöjä noudattamalla saatavan likiarvon *kaikki numerot* ovat aina oikeita. Tämä johtuu siitä, että pyöristyksestä aiheutuva virhe on aina korkeintaan puolet viimeisestä mukaan tulevasta yksiköstä. Rajatapaukset voidaan pyöristää sekä alas- että ylöspäin: luvun 1,5 likiarvoissa 1 ja 2 on kummassakin yksi oikea numero (koska virhe on kummassakin 0,5). Yksinkertaisinta on noudattaa tavanomaista pyöristyssääntöä eli pyöristää rajakohdasta ylöspäin.

Pyydettäessä määrittämään jokin luku *k:n merkitsevän numeron tarkkuudella* tai *k:n desimaalin tarkkuudella* on määritettävä likiarvo, jossa on k merkitsevää numeroa tai vastaavasti k oikeaa desimaalia. Likiarvon loppuun ei tällöin pidä jättää numeroita, joiden oikeellisuudesta ei ole tietoa, jottei annettaisi harhaanjohtavaa kuvaa likiarvon tarkkuudesta – luonnollinen olettamus kun on, että annetun likiarvon kaikki numerot ovat oikeita. Pyydetynlainen likiarvo löydetään esimerkiksi siten, että etsitään jokin riittävän lyhyt väli, jolta kaikki luvut pyöristyvät normaalien pyöristyssääntöjen mukaisesti samaan, pyydetyn mittaiseen likiarvoon.

Esimerkki: Määritä funktion $f(x) = x^2 - 2$ positiivinen nollakohta kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella.

Ratkaisu: Lasketaan funktion arvoja:

x	$f(x)$	
1	-1	< 0
2	2	> 0
1,5	0,25	> 0
1,3	$-0{,}31$	< 0
1,4	$-0{,}04$	< 0
1,45	0,1025	> 0
1,42	0,0164	> 0
1,41	$-0{,}0119$	< 0
1,415	0,002225	> 0



Nollakohta on suurempi kuin 1,41 ja pienempi kuin 1,415, joten se pyöristyy luvuksi 1,41, joka on pyydetty likiarvo. Vastaukseksi ei pidä antaa esimerkiksi 1,415, vaikka siinäkin on vähintään kolme merkitsevää numeroa, koska numeron 5 oikeellisuutta ei voida päätellä taulukkoon laskettujen arvojen perusteella.

Varsinkin luonnontieteissä on tapana noudattaa seuraavia sääntöjä:

- Jos laskutoimituksissa on vain yhteen- ja vähennyslaskuja, vastaus ilmoitetaan yhtä monen *desimaalin* tarkkuudella kuin epätarkin lähtöarvo.
- Muulloin vastaus ilmoitetaan yhtä monen *merkitsevän numeron* tarkkuudella kuin epätarkin lähtöarvo.

Säännöt ovat käytännöllisiä, mutta ne eivät takaa, että vastauksen kaikki numerot ovat oikeita, vaikka lähtöarvojen kaikki numerot olisivat oikeita. Yksinkertainen esimerkki on seuraava:

tarkat arvot: 1,5 ja 2,5
likiarvot: 2 ja 3 (numerot ovat oikeita)

tarkkojen arvojen summa: $1{,}5 + 2{,}5 = 4$
likiarvojen summa: $2 + 3 = 5$ (numero ei ole oikea)

tarkkojen arvojen tulo: $1{,}5 \cdot 2{,}5 = 3{,}75$
likiarvojen tulo: $2 \cdot 3 = 6$ (numero ei ole oikea)

Täsmällisempi virhearviointi edellyttää tarkempaa virheiden kasautumisen tarkastelua (jäljempänä).

Likiarvon merkitsemistapoja

Likiarvon ilmoittamisen lisäksi tulisi aina kertoa, *millä välillä* tarkan arvon tiedetään tai ainakin arvellaan olevan. Toisin sanoen tulee tavalla tai toisella ilmoittaa likiarvo ja *virheen yläraja.*

Yksinkertainen tapa on ilmoittaa pelkästään likiarvo ja antaa samalla ymmärtää, että likiarvon kaikki numerot ovat oikeita. Esimerkiksi antamalla likiarvoiksi

$$1{,}23 \text{ ja } 10{,}3 \text{ m}$$

ilmaistaan, että tarkat arvot ovat väleillä

$$[1{,}225;\ 1{,}235] \text{ ja } [10{,}25 \text{ m},\ 10{,}35 \text{ m}].$$

Toinen vaihtoehto on käyttää ±-merkkiä. Esimerkiksi merkinnöillä

$$1{,}23 \pm 0{,}01 \text{ ja } 10{,}3 \text{ m} \pm 0{,}02 \text{ m}$$

tarkoitetaan, että tarkat arvot ovat väleillä

$$[1{,}22;\ 1{,}24] \text{ ja } [10{,}28 \text{ m},\ 10{,}32 \text{ m}].$$

(Huomaa, että tässä tapauksessa likiarvossa 1,23 tiedetään olevan vähintään kaksi merkitsevää numeroa. Likiarvon 10,3 m kaikki numerot ovat merkitseviä.)

Virheen yläraja voidaan ilmaista myös prosentteina likiarvosta. Merkinnät

$$1{,}23 \pm 10\ \% \text{ ja } 10{,}3 \text{ m} \pm 1\ \%$$

tarkoittavat samaa kuin

$$1{,}23 \pm (0{,}1 \cdot 1{,}23) \text{ ja } 10{,}3 \text{ m} \pm (0{,}01 \cdot 10{,}3 \text{ m}),$$

joten tarkat arvot ovat väleillä

$$[1{,}23 - 0{,}123; 1{,}23 + 0{,}123] = [1{,}107; 1{,}353]$$

ja

$$\begin{aligned}&[10{,}3 \text{ m} - 0{,}103 \text{ m}, 10{,}3 \text{ m} + 0{,}103 \text{ m}]\\ &\qquad = [10{,}197 \text{ m}, 10{,}403 \text{ m}].\end{aligned}$$

(Nyt likiarvossa 1,23 on merkitseviä numeroita vähintään yksi ja likiarvossa 10,3 m vähintään kaksi.)

Varsin usein saatetaan kuitenkin ilmoittaa pelkkä likiarvo, vaikka likiarvon kaikkia numeroita ei tiedettäisikään oikeiksi. Esimerkiksi Päiväntasaajan pituudeksi ilmoitetaan usein 40 000 km, vaikka tiedetäänkin, etteivät kaikki numerot tässä luultavasti ole oikeita. (Päiväntasaajan pituus on kilometrin tarkkuudella 40 075 km, joten oikeita numeroita on itse asiassa vain kaksi.)

Selkeintä, mutta ei ehkä käytännöllisintä, olisi aina ilmoittaa virheen yläraja yksiselitteisellä tavalla.

Suhteellinen virhe

Absoluuttista virhettä paremmin likiarvon hyvyyttä kuvaa **suhteellinen virhe** eli se, kuinka suuri virhe on suhteessa tarkkaan arvoon:

$$\text{suhteellinen virhe} = \left|\frac{\text{absoluuttinen virhe}}{\text{tarkka arvo}}\right|.$$

Suhteellinen virhe ilmaistaan usein prosentteina.

Jos suhteellinen virhe on pieni, niin

$$\text{suhteellinen virhe} \approx \left| \frac{\text{absoluuttinen virhe}}{\text{likiarvo}} \right|.$$

Esimerkki tästä: Tarkka arvo 100, likiarvo 99, (absoluuttinen) virhe 1, suhteellinen virhe $1/100 = 0{,}01 = 1\ \%$. Suhteellinen virhe on lähestulkoon sama kuin $1/99 = 0{,}010101\ldots = 1{,}0101\ldots\,\%$.

Tarkkaa arvoa ei useinkaan tiedetä, eikä silloin pystytä laskemaan suhteellista virhettäkään. Yläraja suhteelliselle virheelle saadaan laittamalla osoittajaksi absoluuttisen virheen yläraja ja nimittäjäksi kyseisessä tilanteessa pienin mahdollinen tarkan arvon itseisarvo.

Esimerkki: Jos talon pituus on 13 m $\pm$ 0,1 m, niin likiarvon 13 m suhteellinen virhe on korkeintaan

$$\frac{0{,}1 \text{ m}}{12{,}9 \text{ m}} = \frac{1}{129} \approx 0{,}78\ \%.$$

Virheiden kasautumisesta

Jos lähtöarvoissa on virhettä, niin laskutoimitusten lopputuloksissa saattaa olla sitä vielä enemmän. Pahimmassa tapauksessa virhe kasvaa eli kasautuu, mutta voi käydä myös niin onnellisesti, että virheet kumoavat toisiaan.

Yhteenlaskussa (ja vähennyslaskussa) likiarvojen summan virhe on korkeintaan lähtöarvojen virheiden ylärajojen summa. Kahden luvun summalle tämä nähdään seuraavasti: jos $T_1 = L_1 \pm V_1$ ja $T_2 = L_2 \pm V_2$ (T = tarkka, L = likiarvo, V = virheen yläraja), niin

$$T_1 + T_2 = (L_1 + L_2) \pm (V_1 + V_2).$$

Kerto- ja jakolaskussa näin yksinkertaista sääntöä ei ole. Likimain on voimassa, että likiarvojen tulon ja osamäärän *suhteellinen* virhe on korkeintaan lähtöarvojen *suhteellisten* virheiden ylärajojen summa. Kun oletetaan, että kaikki esiintyvät luvut ovat positiivisia, kahden luvun tulolle tämä nähdään seuraavasti: Jos lähtöarvojen suhteelliset virheet ovat korkeintaan

$$\frac{V_1}{T_1} = S_1 \text{ ja } \frac{V_2}{T_2} = S_2,$$

niin

$$\begin{aligned} L_1L_2 &\le (T_1 + V_1)(T_2 + V_2) \\ &= T_1T_2 + T_1V_2 + T_2V_1 + V_1V_2 \\ &\approx T_1T_2 + T_1V_2 + T_2V_1 \end{aligned}$$

ja vastaavasti

$$\begin{aligned} L_1L_2 &\ge (T_1 - V_1)(T_2 - V_2) \\ &= T_1T_2 - T_1V_2 - T_2V_1 + V_1V_2 \\ &\approx T_1T_2 - T_1V_2 - T_2V_1. \end{aligned}$$

Pätee siis likimain $T_1T_2 = L_1L_2 \pm (T_1V_2 + T_2V_1)$, josta saadaan tulon L_1L_2 suhteelliselle virheelle yläraja

$$\frac{T_1V_2 + T_2V_1}{T_1T_2} = \frac{V_1}{T_1} + \frac{V_2}{T_2} = S_1 + S_2.$$

Esimerkki: Tarkat arvot $T_1 = 100$ ja $T_2 = 10$, likiarvot $L_1 = 101$ ja $L_2 = 11$. Tulot ovat

$$T_1T_2 = 1000, \quad L_1L_2 = 1111.$$

Likiarvojen tulon suhteellinen virhe on

$$\frac{111}{1000} = 0{,}111 = 11{,}1\ \%.$$

Lähtöarvojen suhteellisten virheiden summa on

$$\frac{1}{100} + \frac{1}{10} = \frac{11}{100} = 0{,}11 = 11\ \%.$$