Loogisen ajattelun kulttuurista

Ilkka Norros
Valtion teknillinen tutkimuskeskus

Logiikka ja matematiikka ovat osa kulttuuria

Tarkastelen seuraavassa loogis-matemaattista ajattelua kulttuurin ja yleissivistyksen osana. Koetan tunnistaa sen perustavia elementtejä ja pohtia erityisesti näiden painotusten muuntumista tietotekniikan vaikutuksesta.

Ihmisen fyysinen potentiaali on suurin piirtein vakio, mutta hänen aktuaalinen, tosiasiallinen toimintakykynsä perustuu siihen, että hän on omaksunut vuosituhansien aikana kertynyttä kulttuuriperintöä. On tärkeää ymmärtää, että ihmisen järki ei ole synnyinlahjana saatu valmis kyky vaan taitoa käyttää kulttuurisesti opittuja ajattelun muotoja ja käsitteellisiä välineitä. Elävän kulttuurin sisältö ei ole pelkästään kasvava, vaan sen osia kuihtuu ja kuolee jatkuvasti samanaikaisesti kun uutta luodaan. Loogis-matemaattisen ajattelun kulttuurin uusintamisessa, elävänä pitämisessä koulu on poikkeuksellisen keskeisessä asemassa, koska matematiikan oppiminen vaatii runsaasti harjoittelua.

Matemaattisen tiedon kokonaisuus on valtava teoreemojen eli todistettujen väittämien verkosto, jonka elementit liittyvät toisiinsa loogisten todistusten välityksellä. Vaikka tämä kokonaisuus on jokseenkin puhtaasti kasvava toisin kuin muissa tieteissä, joissa vanhoja opinkappaleita silloin tällöin hylätään virheellisinä, matematiikankin elävä osa muuntuu koostumukseltaan sekä käyttötarpeitaan heijastaen että myös sisäisen kehityksensä kautta. Tunnetuille teoreemoille löydetään uusia, yksinkertaisempia todistuksia, ja teoriat pystytään esittämään yhä elegantimmin ja tehokkaammin. Nuoren matematiikon ei tarvitse oppia lähimainkaan kaikkea aiemmin kehitettyä pystyäkseen luomaan uutta. Myös matemaattinen yleissivistys voi tulevaisuudessa rakentua eri lailla kuin nykyinen, niin konservatiivista kuin koulumatematiikan sisältö luonnostaan onkin.

Keskustelen nyt lyhyesti seuraavista loogis-matemaattisen ajattelun peruselementeistä:

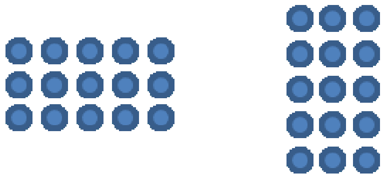
- luonnolliset luvut,
- rationaaliluvut,
- algoritmit,
- todistaminen.

Lopuksi yritän lapioida ‘kahden kulttuurin kuilua’ umpeen muistuttamalla, että vähemmänkin formaalin ajattelun muodoilla on logiikkaansa.

Luonnolliset luvut

Luonnolliset luvut $1,2,3,\ldots$ ovat kulttuurimme vanhin matemaattinen struktuuri ja yleensä ainoa, johon jossain määrin tutustutaan jo ennen kouluikää. Ne kuvaavat joukkoon kuuluvien yksiköiden lukumäärää eli joukon mahtavuutta. Lukujen koodaaminen kymmenellä numeromerkillä on mukana luonnollisessa kielessämmekin - suomenkielen sanat 'yhdeksän' ja 'kahdeksan' ilmaisevat sisältöjä yhtä ja kahta vaille kymmenen, ja kymmenen potensseilla on omia nimiä: sata, tuhat, miljoona. Moni ei ollenkaan tiedosta, että viimemainittujen lukujen erityinen 'pyöreys' johtuu ainoastaan siitä, että meillä sattuu olemaan kymmenen sormea. Jos niitä olisi kahdeksan kuten Aku Ankalla, tietokonemaailmassa yleiset 64 ja 512 tuntuisivat täsmälleen yhtä pyöreiltä, ja niiden merkinnätkin olisivat 100 ja 1000.

Luonnollisten lukujen yhteenlasku kuvaa erillisten joukkojen yhdistämistä, ja yhteenlaskun vaihdantalaki $a + b = b + a$ on intuitiivisesti varsin selvä. Toinen luonnollisiin lukuihin liittyvä perusoperaatio kertolasku on jo käsitteellisesti huomattavasti vaikeampi, koska kertoja on lukumäärä, mutta kerrottava on toisaalta, 'kertojan näkökulmasta', yksikkö, mutta toisaalta se on itsekin lukumäärä. Kertolaskun vaihdantalakia $ab = ba$ on itse asiassa vaikea ymmärtää tai arvata, ellei piirrä kuvaa



Kymmentä pienempien lukujen kertotaulun osaaminen voitaneen lukea yleissivistykseen. Kertotaulu on opittava ulkoa, mutta sen pystyy unohtamis- tai epävarmuustilanteissa helposti täydentämään, jos osaa yhteenlaskun.

Seuraava luonnollisten lukujen peruskäsite, alkuluku, on jo portti hyvin syvällisiin ja avoimiinkin ongelmiin. Voitaneen katsoa yleissivistykseen kuuluvaksi tietää, että jokainen ykköstä suurempi luonnollinen luku voidaan jakaa alkutekijöihin eli esittää alkulukujen tulona yhdellä ja vain yhdellä tavalla (vaikka alkutekijöiden yksikäsitteisyys on niin tuttu asia että se saattaa tuntua itsestäänselvyydeltä, sitä ei voi millään tavalla suoraan 'nähdä', vaan se vaatii kohtalaisen vaikean epäsuoran todistuksen). Tämä antaa lukuihin toisen yleisen näkökulman kuin niiden esittäminen kymmenjärjestelmän numeroilla. Luvuilla puuhailussa tulee tässä yhteydessä tärkeäksi osata kertotaulu myös takaperin eli muistaa sataa pienemmistä luvuista mitkä ovat alkulukuja ja miten jäljelläolevat saadaan pilkotuksi pienempiin tekijöihin.

Rationaaliluvut (murtoluvut)

Vaikka rationaaliluvut kuvaavat kokonaislukujen suhteita, niiden luonteva esittely alkaa *jatkuvien* suureiden tasan jakamisesta - käsitteet puolikas, kolmasosa, kymmenesosa ja muut käänteisluvut soveltuvat ongelmattomimmin tilanteisiin, joissa jako menee aina tasan kuten kakun jakamisessa (esim. neljää antiikkituolia ei voi jakaa tasan kolmelle perilliselle). Rationaaliluku esitetään murtolukuna: nimittäjä kertoo miten pienistä osista on kysymys, ja osoittaja ilmoittaa näiden osien lukumäärän. Keskeinen apuoperaatio on murtolukujen laventaminen, jota tarvitaan niin keskinäisen järjestyksen selvittämiseen kuin yhteenlaskuunkin:

$$\frac{4}{10} + \frac{3}{4} = \frac{8}{20} + \frac{15}{20} = \frac{23}{20}.$$

Pienimmän yhteisen nimittäjän löytämiseksi erisuuret nimittäjät on ensin jaettava alkutekijöihinsä. Siksi murtoluvuilla operoiminen on vaikeaa, ellei kertotaulua osata ulkoa myös takaperin. Murtoluvuilla laskemisen taito on toisaalta erittäin keskeinen, koska vastaavia operaatioita tarvitaan lähes kaikessa tätä korkeammassakin matematiikassa jatkuvasti. Tässä tietotekniikka tuottaa vahinkoa kulttuurille, sillä arkielämässä murtoluvuilla laskemisen tarve on vähentynyt, ja tämän taidon motivoinnista on nyt tullut opetuksen haaste.

Tässä yhteydessä haluaisin myös kiinnittää huomiota siihen, että yleensäkin kaikenlainen 'nurin kääntäminen' on raskasta ja vaikeaa ajatella sisällöllisesti – ja vaatii siis harjoittelua aivan samoin kuin urheilulajien liikeratojen omaksuminen, musisointi ym. Vaatii esimerkiksi aina tiettyä ponnistusta hahmottaa, miten monta prosenttia a on b:stä, jos b on niin ja niin monta prosenttia a:sta. Formaali manipulointi kynällä ja paperilla auttaa usein tällaisissa tilanteissa, kunhan sen säännöt on opittu ja mieluummin myös ymmärretty ja siis tarkistettavissa ja reprodusoitavissa.

Äärettömyyteen liittyviä kysymyksiä voisi sisältyä yleissivistykseen enemmän kuin nykyään usein ajatellaan. Onhan yksi matematiikan hienoimmista ominaispiirteistä, että ihminen siinä pystyy täsmällisesti käsittelemään äärettömiä objekteja, joita ei arkielämässä ollenkaan kohdata. Äärettömyyttä ei koulumatematiikassakaan pitäisi lakaista maton alle, vaan päinvastoin nostaa mahdollisuuksien mukaan esiin, nimenomaan sen paradoksaalisuuden ja kiehtovuuden takia. On esimerkiksi varsin yksinkertaista selittää, että vaikka rationaaliluvut ovat tiheässä, ne voidaan numeroida, kun taas Cantorin nerokas diagonaaliargumentti osoittaa, että jatkuvia suureita kuvaavia reaalilukuja ei voida. Tämäntyyppiselle matemaattiselle yleissivistykselle taskulaskimet ja tietokoneet eivät muodosta minkäänlaista uhkaa.

Algoritmit

Seuraavaksi puhun lyhyesti algoritmin käsitteestä. Aiheen tärkeys ilmenee jo siitä, että algoritmin suorittaminen on täsmälleen sitä mitä tietokone tekee (kun jätetään huomiotta koneen muistin rajallisuus sekä sen kommunikointi ulkomaailman kanssa — algoritmi pystyy tuottamaan vain pseudosatunnaislukuja, kun taas reaalimaailmassa esiintyy ainakin nykyisen fysiikan mukaan todellistakin satunnaisuutta). Algoritmin suorittaminen on täysin 'mekaanista', ennalta kiinnitetyn ohjelman mukaista (yksinkertainen esimerkki alempana). Yleissivistykseen voisi kuitenkin kuulua huomattavasti monivivahteisempi näkemys algoritmeista kuin toisaalta tieto niiden mekaanisuudesta, toisaalta mielikuva tietokoneiden mahtavista kyvyistä.

Vaikka algoritmin suorittaminen on konemaista, hyvän algoritmin keksiminen tai luominen tiettyyn tehtävään voi olla hyvin vaikeaa. Merkittävät algoritmit ovat kulttuurin kertyvää rikkautta, ja sellaisten tunteminen ja ymmärtäminen on osa sivistystä. Koulun alaluokilla on käytetty kohtalaisesti aikaa suurten lukujen kerto- ja jakolaskun algoritmeihin, joiden tarve käytännön elämässä on jyrkästi vähentynyt, kun laskut tehdään koneilla. Tämä esimerkki valaisee tärkeitä näkökohtia. Vaikka algoritmin suorittaminen sinänsä on nimenomaan jotain mikä voidaan jättää koneen tehtäväksi, ihmisen taitojen elementit ovat varsin suurelta osin luonteeltaan algoritmien osaamista. Näitä taas ei voi kunnolla tuntea, ymmärtää ja muistaa suorittamatta ja harjoittelematta niitä. Tavanmukaisuus ja luovuus ovat ihmisen toiminnassa erottamattomia. Monien yksittäisten algoritmien tärkeys yleissivistyksen tai jonkin alan koulutuksen osana voi silti muuttua radikaalistikin. Vaikka matematiikan oppiminen ei ole mahdollista ilman runsasta puuhailua lukujen parissa, sataa pienemmät luvut kenties riittävät päässä hallittavaksi hiekkalaatikoksi? Tällöin jakokulmalla olisi sama kohtalo kuin tuluksilla, joiden käyttötaito kuului esiisiemme ihmisyyden perusteisiin.

Kolmas tärkeä piirre algoritmien kokonaiskuvassa on, että sen selvittäminen, mitä algoritmi tuottaa, voi olla erittäin vaikeaa. Ei esimerkiksi ole algoritmia, jolle voitaisiin syöttää toisten algoritmien ohjelmakoodeja ja joka sellaisen tutkittuaan kertoisi, pysähtyykö kyseinen algoritmi joskus vai ei koskaan. Vaikka algoritmien toiminta on mekaanista, niiden analysoiminen on yleisesti ottaen kaikkea muuta kuin mekaanista. Esimerkiksi, jonka voisi hyvin kertoa koulussakin, sopii seuraava:

$3n+1$ −algoritmi
Syöte: luonnollinen luku $N > 0$.
0. $n := N$.
1. Jos $n = 1$, lopeta.
2. Jos n on parillinen, $n := n/2$, muuten $n := 3n + 1$.
3. Mene kohtaan 1.

Kokemuksen mukaan tämä erittäin yksinkertainen algoritmi nimittäin pysähtyy kaikilla syötteillä N, mutta kukaan ei ole pystynyt tätä todistamaan. Suuri matemaatikko Paul Erdös sanoi tästä haasteesta: 'Mathematics is not yet ready for such problems'.

Logiikka ja todistaminen

Teoreema on matemaattinen väite, jolla on *todistus* eli kyseessä olevan teorian määritelmistä ja muista teoreeman oletuksista väitteeseen johtava päätelmien ketju. Todistuksen kukin askel soveltaa joitakin logiikan päättelysääntöjen suppeasta valikoimasta. Todistuksen oikeellisuus on näin ollen periaatteessa mekaanista todentaa, ja kirjaimellisestikin mikäli se on kirjoitettu yksityiskohtia myöten auki (mitä ei käytännössä koskaan tehdä). Tällainen todentaminen ei ole samaa kuin todistuksen ymmärtäminen, sillä sen voi tehdä varsin tyhmäkin kone. Toisaalta teoreeman totuutta, sen välttämättömyyttä, ei voi ymmärtää tutkimatta sen todistusta. Todistusten löytäminen on yleisesti ottaen vaikeaa, ja merkittävien todistusten 'juonet' ovat osa kulttuurisaavutuksiamme. Väitteiden todistamisella pitäisi olla tärkeä rooli myös matematiikan kouluopetuksessa.

Muodollisen logiikan perusoperaatiot ovat 'ei' ($\neg$), 'ja' ($\wedge$), 'tai' ($\vee$), 'kaikille x pätee, että...' ($\forall x$) sekä 'on olemassa x jolle pätee, että...' ($\exists x$). Monia mutkikkaita käsitteitä ja luonnollisen kielen lauseita voidaan analysoida loogisesti muotoilemalla niille ensin vastineet yksinkertaisempien käsitteiden ja loogisten operaatioiden avulla. Esimerkiksi relaatio 'x on y:n veli' tarkoittaa samaa kuin

$$
\begin{aligned}
&(\exists a\colon ((a \text{ on } x\text{:n äiti}) \wedge (a \text{ on } y\text{:n äiti}))) \\
&\quad \wedge (\exists i\colon ((i \text{ on } x\text{:n isä}) \wedge (i \text{ on } y\text{:n isä}))) \\
&\quad \wedge (y \text{ on miespuolinen})
\end{aligned}
$$

Lyhyt sana 'veli' koodaa siis loogisen rakenteen, joka sisältää myös kaksi eksistenssikvanttoria ($\exists$). Ehkäpä äidinkielen ja matematiikan opetus voisivat kohdata logiikan alueella? Näiden kosketuspinta sisältää jännittävämpiäkin asioita kuin yllä viitattu luonnollisen kielen looginen analyysi. Koko todistamisen käsitteeseen, niin matematiikassa kuin vaikkapa oikeudessa, voidaan nimittäin ottaa ns. peliteoreettisen semantiikan tarjoama dialoginen näkökulma, jota erityisesti filosofi Jaakko Hintikka on kehitellyt pitkään ja monipuolisesti. Seuraava esimerkki valaisee perusideaa:

Väite: Jonon $1/n$ raja-arvo on 0, kun n kasvaa rajatta.
Sama formaalisti esitettynä: $\forall \epsilon > 0 \, \exists m \, \forall n > m \; 1/n < \epsilon$.
Tulkinta pelinä:

- kaikki-kvanttori $\forall$ edustaa vastustajan siirtoa; hän saa valita minkä tahansa luvun ϵ, ja toisella vuorollaan minkä tahansa luvun n, joka on suurempi kuin m;
- eksistenssikvanttori $\exists$ edustaa minun siirtoani; minun on valittava lukuni m taidolla.

Voittostrategia: Vastustajan annettua luvun ϵ valitsen sellaisen luvun m, että $m > 1/\epsilon$; tällöin vastustaja saa toisella siirrollaan valita minkä tahansa luvun $n > m$ muttei pysty kumoamaan relaation $1/n < \epsilon$ totuutta.

Todistus voidaan siis tulkita *strategiaksi, jolla voittaa aina.* Niin paljon kuin tietokoneet elämäämme vaikuttavatkin, ihmisten kiinnostusta pelaamiseen ne eivät ole vähentäneet, pikemmin päin vastoin. Pelinäkökulman tuominen monien mielestä rutikuiviin asioihin kuten todistamiseen saattaisi olla tutkimisen arvoinen asia myös kouluopetuksessa.

* * *

Lopuksi haluaisin huomauttaa, että edellä käsiteltyjen formaalin logiikan ja matematiikan ohella on toki paljon muutakin, minkä voidaan katsoa kuuluvan ‘loogisen ajattelun kulttuuriin’, kuten seuraavat asiat:

1. Eri ‘tasojen’ erottaminen — millä tasolla milloinkin keskustellaan.

2. Mallien ja todellisuuden erottaminen. Fysiikan teoriat ovat matemaattisia malleja luonnonilmiöille, ja taloustiede rakentaa (huomattavasti karkeampia) malleja talouden ilmiöille. Mallien käyttö on erittäin tärkeää todellisuuden jäsentämisessä ja ymmärtämisessä, mutta ne pitää ymmärtää konstruktioiksi.

3. ”Ristiriitaisten”, ”jännitteisten” kohteiden käsitteellistäminen (dialektiikka). Esimerkiksi Marxin mukaan kapitalismissa on keskeistä se, että siinä työ on samanaikaisesti sekä käyttöarvon että abstraktin, mm. rahalla ilmennettävän ‘arvon’ tuottamista.

4. Semiotiikka: kulttuurin merkkien ja merkitysten valtavan verkoston elementtien huomaaminen (koska tutuinta on vaikea huomata) ja tutkiminen.