Heronin ja Brahmaguptan kaavoista

Juhani Fiskaali
Oulun Lyseon lukio

Heronin kaava

Kolmio on jäykkä kappale. Kun sivujen pituudet tunnetaan, tiedetään kolmion muoto ja myös ala. Kolmion ala sivujensa lausekkeena on tunnetun Heronin kaavan mukaisesti

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

missä p on kolmion piirin puolikas, $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$. Johdetaan tämä alan kaava lähtemällä kolmion alasta $A = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$. Eliminoidaan tästä $\sin\gamma$ kosinilauseen antaman tuloksen $a^2+b^2-2ab\cos\gamma = c^2$ ja identiteetin $\sin^2\gamma + \cos^2\gamma = 1$ nojalla. Tässä γ on sivujen a ja b välinen kolmion kulma, jolle pätee erityisesti $0 < \gamma < \pi$ ja $\sin\gamma = \sqrt{1-\cos^2\gamma} > 0$. Suoraviivaisella laskulla saadaan

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}ab\sqrt{1-\cos^2\gamma} \\
&= \frac{1}{2}ab\sqrt{1-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)^2} \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{(2ab)^2-(a^2+b^2-c^2)^2} \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{(2ab-a^2-b^2+c^2)(2ab+a^2+b^2-c^2)} \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{[c^2-(a-b)^2][(a+b)^2-c^2]} \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{(c-a+b)(c+a-b)(a+b-c)(a+b+c)} \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{(2p-2a)(2p-2b)(2p-2c)(2p)} \\
&= \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)p}.
\end{aligned}$$

Siten kaava $A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ tuli todistetuksi.

Brahmaguptan kaavan sekä Heronin kaavan uusi muotoilu

Nelikulmio ei ole jäykkä kappale. Nelikulmion muoto ei määräydy, vaikka sivujen pituudet tunnetaan. Nelikulmio muotoutuu mahdollisimman pyöreäksi siinä mielessä, että alasta tulee mahdollisimman suuri täsmälleen silloin, kun nelikulmion vastakkaisten kulmien summa on oikokulma π. Intialainen Brahmagupta (600-luvulla) tunsi jo edellä luonnehditun syklisen nelikulmion alan sivujen funktiona, nimittäin lausekkeen $A = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$, missä p on nelikulmion piirin puolikas, $p = \frac{1}{2}(a+b+c+d)$. Johdetaan tässä yleisen kuperan nelikulmion alan lauseke ja päätellään siitä vastaavan syklisen nelikulmion ala. Olkoot kuperan nelikulmion sivut (vastapäiväisessä) järjestyksessä a, b, c ja d ja olkoon α sivujen a ja b välinen kulma sekä β sivujen c ja d välinen kulma. Nelikulmion ala A on kahden kolmion alan summana $A = \frac{1}{2}ab\sin\alpha + \frac{1}{2}cd\sin\beta$. Tästä saadaan identiteetti

$$\begin{aligned}
16A^2 = 4a^2b^2\sin^2\alpha &+ 4c^2d^2\sin^2\beta \\
&+ 8abcd\sin\alpha\sin\beta. \qquad (1)
\end{aligned}$$

Nelikulmion lävistäjän pituuden neliöksi saadaan kosinilauseen mukaisesti

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha = c^2 + d^2 - 2cd\cos\beta,$$

josta

$$(a^2 + b^2) - (c^2 + d^2) = 2ab\cos\alpha - 2cd\cos\beta.$$

Neliöön korottaminen tuottaa identiteetin

$$\begin{aligned}&(a^2 + b^2)^2 + (c^2 + d^2)^2 - 2(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)\\ &\quad = 4a^2b^2\cos^2\alpha + 4c^2d^2\cos^2\beta - 8abcd\cos\alpha\cos\beta. \quad (2)\end{aligned}$$

Yhteenlaskulla saadaan kaavoista (1) ja (2) identiteettiä $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ja kosinin yhteenlaskukaavaa $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ hyväksi käyttämällä

$$\begin{aligned}&16A^2 + (a^2 + b^2)^2 + (c^2 + d^2)^2 - 2(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)\\ &\quad = 4a^2b^2 + 4c^2d^2 - 8abcd\cos(\alpha + \beta).\end{aligned}$$

Tästä saadaan sieventämällä,

$$\begin{aligned}16A^2 &= 2(a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 + a^2b^2 + c^2d^2)\\ &\quad -(a^4 + b^4 + c^4 + d^4) - 8abcd\cos(\alpha + \beta).\end{aligned}$$

Kun oikean puolen ensimmäiset termit täydennetään neliöksi, saadaan

$$\begin{aligned}16A^2 &= (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 - 2(a^4 + b^4 + c^4 + d^4)\\ &\quad - 8abcd\cos(\alpha + \beta). \quad (3)\end{aligned}$$

Kun merkitään $\gamma = \alpha + \beta$ ja kun käytetään sivujen neliöiden summalle, sivujen neljänsien potenssien summalle ja sivujen tulolle merkintöjä $N = a^2+b^2+c^2+d^2$, $Q = a^4+b^4+c^4+d^4$ ja $W = abcd$, saadaankin kuperan nelikulmion ala muodossa

$$A = \frac{1}{4}\sqrt{N^2 - 2Q - 8W\cos\gamma}. \quad (4)$$

Selvästi ala A on suurin mahdollinen, kun $\cos\gamma = -1$. Täten $\gamma = \pi$ ja syklisen nelikulmion alaksi ja Brahmaguptan kaavan uudeksi ilmiasuksi saadaan

$$A = \frac{1}{4}\sqrt{N^2 - 2Q - 8W}. \quad (5)$$

Alan lauseke (4) ei muutu, vaikka kulman γ sijasta kaavassa käytettäisiin toisten vastakkaisten kulmien summaa $\delta = 2\pi - \gamma$, sillä $\cos\gamma = \cos\delta$.

Kun nelikulmion yksi sivu asetetaan nollaksi, $d = 0$, saadaan kaavasta (4) Heronin kaavan uusi muoto

$$A = \frac{1}{4}\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2(a^4 + b^4 + c^4)}. \quad (6)$$

Heronin ja Brahmaguptan kaavojen muotoilu sivujen potenssisummien avulla

Kaavasta (6) nähdään erityisesti, että kolmion alan laskemiseksi riittää tietää sivujen kaksi potenssisummaa $N = a^2 + b^2 + c^2$ ja $Q = a^4 + b^4 + c^4$. Tällöin kolmion alaksi tulee

$$A = \frac{1}{4}\sqrt{N^2 - 2Q}.$$

Syklisen nelikulmion ala saadaan nelikulmion sivujen potenssisummien lausekkeena kunhan symmetrinen polynomi $W = abcd$ kaavassa (5) esitetään potenssisummien avulla. Jos merkitään symmetrisiä potenssisummia isoilla kirjaimilla

$$\begin{aligned}M &= a + b + c + d,\\ N &= a^2 + b^2 + c^2 + d^2,\\ P &= a^3 + b^3 + c^3 + d^3\end{aligned}$$

ja

$$Q = a^4 + b^4 + c^4 + d^4,$$

saadaan syklisen nelikulmion alan kaava (5) hieman vaivaa näkemällä muotoon

$$A = \frac{\sqrt{3}}{12}\sqrt{M^4 + 6N^2 + 8MP - 6M^2N - 12Q}.$$

Mutta symmetriset polynomit ja niiden esittäminen potenssisummien tai vastaavasti elementaaristen symmetristen polynomien avulla onkin jo toisen jutun aihe.