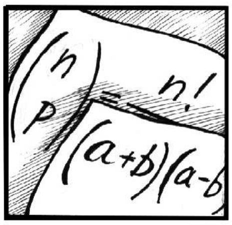


# Eulerin luvuista

***Juhani Fiskaali***
Oulun Lyseon lukio

## Johdanto

Mitä ovat Eulerin luvut $\begin{bmatrix} m \\ j \end{bmatrix}$? Miten ne määritellään? Eulerin luvut voidaan määritellä kertoimina, kun potenssit $k^m$ esitetään tiettyä muotoa olevien binomikertoimien lineaarikombinaationa. Seuraavasta kahdesta esimerkistä ilmenee, millaisia lineaarikombinaatioita tässä tarkastellaan. Esimerkiksi, olisikohan olemassa sellaiset kertoimet $x, y$ ja $z$, että kehitelmä

$$k^3 = x\binom{k+2}{3} + y\binom{k+1}{3} + z\binom{k}{3}$$

on voimassa jokaisella positiivisella kokonaisluvulla $k$. Tai, olisikohan olemassa sellaiset kertoimet $a, b, \ldots, e$, että lineaarikombinaatio (identiteetti)

$$\begin{aligned} k^5 = a\binom{k+4}{5} &+ b\binom{k+3}{5} \\ &+ c\binom{k+2}{5} + d\binom{k+1}{5} + e\binom{k}{5} \end{aligned}$$

on voimassa. Jos ja kun mainitunlaiset identiteetit ovat voimassa, kertoimia $x, y, \ldots, d, e$ kutsutaan Eulerin luvuiksi. Lukuja merkitään symboleilla $\begin{bmatrix} m \\ j \end{bmatrix}$, missä $m$ ja $j$ ovat kokonaislukuja ja $1 \le j \le m$. Edellä

$$x = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \ldots, d = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ ja } e = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

ovat Eulerin lukuja. Seuraavissa kohdissa perehdytään siihen, kuinka mainitut luvut voidaan laskea. Myöhemmin kohdassa ”Eulerin luvut ja permutaatioiden kasvuindeksit” huomataan, että Eulerin lukujen ja permutaatioiden välillä on mielenkiintoinen yhteys. Eulerin luku $\begin{bmatrix} m \\ j \end{bmatrix}$ ilmoittaa, monellako lukujen $1, 2, 3, \ldots, m$ permutaatiolla on kasvuindeksinä luku $j$. Koska tapaamme näitä lukuja tässäkin kirjoituksessa kahdessa aivan erilaisessa yhteydessä, luvut varmasti ovat merkityksellisiä ja universaaleja. Eräänä lukujen sovellutuksena lasketaan kohdassa ”Sovellutuksena potenssisummien kaavat” potenssisummia. Saaduista potenssisummien esityksistä (kaavoista) tehdään viimeisessä kohdassa ”Potenssisummien ominaisuuksia” joitakin yleisiä johtopäätöksiä.

## Lukujen määritelmä ja palautuskaava

Suoralla laskulla voidaan todeta, että esimerkiksi seuraavat positiivisten kokonaislukujen identiteetit ovat voimassa,

$$\begin{aligned} k &= \binom{k}{1}, \\ k^2 &= \binom{k+1}{2} + \binom{k}{2}, \\ k^3 &= \binom{k+2}{3} + 4\binom{k+1}{3} + \binom{k}{3} \end{aligned}$$

ja

$$k^4 = \binom{k+3}{4} + 11\binom{k+2}{4} + 11\binom{k+1}{4} + \binom{k}{4}.$$

Huomattakoon, että binomikertoimet $\binom{n}{m}$ ovat nollia, jos $n < m$. Yleisemmin haluaisimme tietää kertoimet $\left[{m \atop j}\right]$ identiteetissä

$$k^m = \sum_{j=1}^{m} \left[{m \atop j}\right] \binom{k+m-j}{m},$$

kun $m$ on annettu kokonaisluku. Kertoimia $\left[{m \atop j}\right]$, missä $1 \le j \le m$ sanomme Eulerin luvuiksi. Luvut voidaan kirjoittaa kolmioksi Pascalin kolmion tapaan. Kolmion huippu on edellä esitettyjen potenssikehitelmien mukaan

$$\begin{array}{llll} 1 & & & \\ 1 & 1 & & \\ 1 & 4 & 1 & \\ 1 & 11 & 11 & 1 \end{array}$$

Kolmiosta luetaan, että esimerkiksi $\left[{3 \atop 2}\right] = 4$. Entä miten saadaan kolmion viides rivi? Miten uusi rivi saadaan jo saaduista riveistä? Palautuskaavan etsimisessä hyödynnetään binomikertoimien rekursiokaavaa

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}.$$

Johdetaan tässä Eulerin kolmion viides rivi, kun neljäs rivi on tiedossa; vastaavalla tavalla päätellään yleinen palautuskaava. Saadaan

$$\begin{aligned} k^5 &= k \cdot k^4 \\ &= (k+4-4)\binom{k+3}{4} + 11(k+3-3)\binom{k+2}{4} \\ &\quad + 11(k+2-2)\binom{k+1}{4} + (k+1-1)\binom{k}{4} \\ &= 5\binom{k+4}{5} - 4\binom{k+3}{4} + 5\cdot 11\binom{k+3}{5} \\ &\quad - 3\cdot 11\binom{k+2}{4} + 5\cdot 11\binom{k+2}{5} \\ &\quad - 2\cdot 11\binom{k+1}{4} + 5\binom{k+1}{5} - \binom{k}{4} \\ &= \binom{k+4}{5} + (4+2\cdot 11)\binom{k+3}{5} \\ &\quad + (3\cdot 11 + 3\cdot 11)\binom{k+2}{5} \\ &\quad + (2\cdot 11 + 4)\binom{k+1}{5} + \binom{k}{5}. \end{aligned}$$

Tästä nähdään, miten Eulerin kolmion viidennen rivin alkiot saadaan neljännen rivin alkioista. Viides rivi on täten

$$1 \;\; 26 \;\; 66 \;\; 26 \;\; 1,$$

missä esimerkiksi jälkimmäinen 26 on kerroin

$$\left[{5 \atop 4}\right] = 2\left[{4 \atop 3}\right] + 4\left[{4 \atop 4}\right] = 2\cdot 11 + 4\cdot 1.$$

Yleisesti, tarkastelemalla potenssia

$$k^{m+1} = k \cdot k^m$$

saadaan vastaavalla tavalla palautuskaavat

$$\left[{m+1 \atop j}\right] = \left[{m \atop j}\right] j + \left[{m \atop j-1}\right](m-j+2). \qquad \text{(R)}$$

Alkuehtoina voidaan pitää sitä, että Eulerin kolmion kukin rivi alkaa luvulla 1 ja päättyy lukuun 1. Kaavaa soveltamalla kolmion kuudenneksi riviksi tulee

$$1 \;\; 57 \;\; 302 \;\; 302 \;\; 57 \;\; 1$$

ja seitsemänneksi

$$1 \;\; 120 \;\; 1191 \;\; 2416 \;\; 1191 \;\; 120 \;\; 1.$$

## Algoritmi Eulerin lukujen laskemiseksi

Algoritmi perustuu edellä jo mainittuun binomikertoimien rekursiokaavaan, erityisesti sen erotusmuotoon

$$\binom{n+1}{k} - \binom{n}{k} = \binom{n}{k-1}.$$

Algoritmissa lasketaan potenssijonon erotusjono, erotusjonon erotusjono jne. sopivaan määrään asti ja luetaan jonojen matriisin viimeiseltä riviltä etsityt Eulerin kolmion luvut. Jos esimerkiksi halutaan saada kolmion kolmas rivi, lähdetään jonosta $(x_k)_{k=1}^{\infty}$, missä $x_k = k^3$. Saadaan jonon ja erotusjonojen matriisi

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 8 & 27 & 64 & 125 & \ldots \\ 1 & 7 & 19 & 37 & 51 & \ldots \\ 1 & 6 & 12 & 18 & 24 & \ldots \\ 1 & 5 & 6 & 6 & 6 & \ldots \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & \ldots \end{array}$$

Tässä viimeiseltä riviltä on luettavissa, että

$$\left[{3 \atop 1}\right] = 1, \left[{3 \atop 2}\right] = 4 \text{ ja } \left[{3 \atop 3}\right] = 1,$$

sekä pääteltävissä, että

$$k^3 = \binom{k+2}{3} + 4\binom{k+1}{3} + \binom{k}{3}.$$

Nimittäin lähdettäessä binomikertoimien muodostamasta jonosta, matriisin viimeisen rivin yhdelle paikalle tulee ykkönen ja muille paikoille nollat. Esimerkiksi jonoa, jäseninään $x_k = \binom{k+2}{3}$, $k = 1, 2, \ldots$, vastaavan matriisin ensimmäinen rivi on $1\ \ 4\ \ 10\ \ 20\ \ \ldots$ ja viides rivi $1\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ \ldots$. Jos kääntäen matriisin viides rivi on esimerkiksi $0\ \ 4\ \ 0\ \ 0\ \ \ldots$, ovat ensimmäisen rivin alkiot muotoa $x_k = 4\binom{k+1}{3}$, $k = 1, 2, \ldots$. Kun siis halutaan Eulerin kolmion $m$:nnen rivin alkiot, muodostetaan erotusjonojen matriisi lähtemällä jonosta, jonka jäsenet ovat $x_k = k^m$, $k = 1, 2, 3, \ldots$.

## Eulerin lukujen eksplisiittinen kaava

Tarkastellaan kaavan johtamista esimerkin valossa. Jos halutaan, että on voimassa identiteetti

$$\begin{aligned} n^5 = a\binom{n+4}{5} + b\binom{n+3}{5} \\ + c\binom{n+2}{5} + d\binom{n+1}{5} + e\binom{n}{5}, \end{aligned}$$

antamalla peräjälkeen arvot $n = 1, 2, \ldots, 5$, saadaan

$$\begin{aligned} a &= \begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix} = 1^5 = 1, \\ b &= \begin{bmatrix}5\\2\end{bmatrix} = 2^5 - \binom{6}{1} = 26, \\ c &= \begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix} = 3^5 - \binom{6}{1}2^5 + \binom{6}{2} = 66, \\ d &= \begin{bmatrix}5\\4\end{bmatrix} = 4^5 - \binom{6}{1}3^5 + \binom{6}{2}2^5 - \binom{6}{3} = 26 \end{aligned}$$

ja

$$e = \begin{bmatrix}5\\5\end{bmatrix} = 5^5 - \binom{6}{1}4^5 + \binom{6}{2}3^5 - \binom{6}{3}2^5 - \binom{6}{4} = 1.$$

Yleisemmin saadaan kaava

$$\begin{bmatrix}m\\k\end{bmatrix} = \sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\binom{m+1}{j}(k-j)^m. \qquad \text{(E)}$$

Siten esimerkiksi

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix}7\\4\end{bmatrix} &= \sum_{j=0}^{3}(-1)^j\binom{8}{j}(4-j)^7 = 2416, \\ \begin{bmatrix}7\\5\end{bmatrix} &= \sum_{j=0}^{4}(-1)^j\binom{8}{j}(5-j)^7 = 1191 \end{aligned}$$

ja

$$\begin{bmatrix}7\\6\end{bmatrix} = \sum_{j=0}^{5}(-1)^j\binom{8}{j}(6-j)^7 = 120.$$

## Eulerin luvut ja permutaatioiden kasvuindeksit

Tarkastellaan lukujen $1, 2, 3, \ldots, m$ permutaatioita ja permutaation kasvuindeksiä. Kun $m = 5$, niin esimerkiksi 23541, 53142 ja 54321 ovat lukujen $1, 2, 3, 4$ ja 5 permutaatioita (pelkistetysti kirjoitettuna). Mainittujen jonojen kasvuvälien lukumääriksi ja siten jonojen kasvuindekseiksi saadaan $1 + 1 + 1 + 0 + 0 = 3$, $1+0+0+1+0 = 2$ ja $1+0+0+0+0 = 1$. (Tulkintana on, että jonon alku on kasvuväli, loppu puolestaan ei ole kasvuväli.) Selvästi viiden alkion jonon kasvuindeksi on jokin luvuista $1, 2, 3, 4$ tai 5. Jos nyt kuudes alkio ($= 6$) sijoitetaan viiden alkion jonon kasvuväliin, syntyneen jonon indeksi on sama kuin alkuperäisen jonon indeksi. Jos puolestaan uusi alkio sijoitetaan väliin, joka ei ole kasvuväli, uuden jonon indeksi on yhtä suurempi kuin alkuperäisen jonon. Jos $\begin{bmatrix}m\\k\end{bmatrix}$ tarkoittaa niiden $m$-jonojen lukumäärää, joilla on indeksinä $k$, saadaan äskeisen harkinnan perusteella palautuskaava

$$\begin{bmatrix}m+1\\k\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}m\\k\end{bmatrix}k + \begin{bmatrix}m\\k-1\end{bmatrix}(m-k+2),$$

joka ilmoittaa, monellako $(m + 1)$-jonolla on indeksinä $k$. Mutta kaavahan on juuri Eulerin lukujen palautuskaava (R). Välitön havainto permutaatioista ja kasvuindekseistä on, että $\sum_{k=1}^{m}\begin{bmatrix}m\\k\end{bmatrix} = m\,!$ Siis Eulerin kolmion vaakarivin alkioiden summa on vastaavan rivinumeron kertoma.

## Sovellutuksena potenssisummien kaavat

Koska binomikertoimien summakaava on yksinkertainen, $\sum_{k=1}^{n}\binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}$, saadaan edellä esitellyistä potenssien kehitelmistä vastaavat summakaavat. Täten

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} k &= \sum_{k=1}^{n}\binom{k}{1} = \binom{n+1}{2} = \frac{1}{2}n(n+1), \\ \sum_{k=1}^{n} k^2 &= \sum_{k=1}^{n}\left\{\binom{k+1}{2} + \binom{k}{2}\right\} \\ &= \binom{n+2}{3} + \binom{n+1}{3} \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1), \\ \sum_{k=1}^{n} k^3 &= \sum_{k=1}^{n}\left\{\binom{k+2}{3} + 4\binom{k+1}{3} + \binom{k}{3}\right\} \\ &= \binom{n+3}{4} + 4\binom{n+2}{4} + \binom{n+1}{4} \\ &= \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 \end{aligned}$$

ja vielä yhtenä esimerkkinä

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k^5 &= \binom{n+5}{6} + 26\binom{n+4}{6} \\ &\quad + 66\binom{n+3}{6} + 26\binom{n+2}{6} + \binom{n+1}{6} \\ &= \frac{1}{12}n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1).\end{aligned}$$

## Potenssisummien ominaisuuksia

Summien binomikerroinkehitelmistä seuraa (yhteisen tekijän erottamisella) tulos, että polynomi $\frac{1}{2}n(n+1) = \sum_{k=1}^{n} k$ on summapolynomin $\sum_{k=1}^{n} k^m$ tekijä, aina kun $m$ on positiivinen kokonaisluku. Lisäksi, kun eksponentti $m$ on parillinen, on $2n+1$ summan $\sum_{k=1}^{n} k^m$ tekijä. Tämä ilmenee siitä, että arvolla $n = -\frac{1}{2}$, summan $\sum_{k=1}^{n} k^m$ binomikerroinkehitelmässä termit ovat pareittain nollia ja siten koko summa tällä muuttujan arvolla on nolla. Esimerkiksi, kun

$$\sum_{k=1}^{n} k^4 = \binom{n+4}{5} + 11\binom{n+3}{5} + 11\binom{n+2}{5} + \binom{n+1}{5},$$

sievenevät pareittain lasketut summat

$$\binom{-\frac{1}{2}+4}{5} + \binom{-\frac{1}{2}+1}{5}$$

ja

$$\binom{-\frac{1}{2}+3}{5} + \binom{-\frac{1}{2}+2}{5}$$

nolliksi ja siten Eulerin lukujen symmetrian takia koko potenssisumma on nolla arvolla $n = -\frac{1}{2}$. Siispä $2n+1$ on summan $\sum_{k=1}^{n} k^4$ tekijä (ja yleisemmin parillisten potenssisummien $\sum_{k=1}^{n} k^m$ tekijä). Siten parillisten potenssisummien polynomeissa $\sum_{k=1}^{n} k^m$ on aina tekijänä $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$. Esimerkiksi identiteetti

$$\sum_{k=1}^{n} k^6 = (\sum_{k=1}^{n} k^2) \cdot (\frac{3}{7}n^4 + \frac{6}{7}n^3 - \frac{3}{7}n + \frac{1}{7})$$

on voimassa. Summan $\sum_{k=1}^{n} k^m$ tekijänä näyttäisi olevan polynomi $\sum_{k=1}^{n} k^3 = (\sum_{k=1}^{n} k)^2$, kun eksponentti $m$ on pariton kokonaisluku ja $m \geq 3$. Esimerkiksi pätee

$$\sum_{k=1}^{n} k^5 = (\sum_{k=1}^{n} k^3) \cdot (\frac{2}{3}n^2 + \frac{2}{3}n - \frac{1}{3}).$$

Tämän otaksuman todistaminen on haastavampaa kuin vastaavan parillisia potenssisummia koskevan väittämän todistus. Parillisten potenssisummien tapauksessa riitti näyttää, että $n = 0, n = -1$ ja $n = -\frac{1}{2}$ ovat summapolynomin yksinkertaisia nollakohtia, mutta parittomien potenssisummien tapauksessa tulisi näyttää, että 0 ja $-1$ ovat summapolynomin kaksinkertaisia nollakohtia.