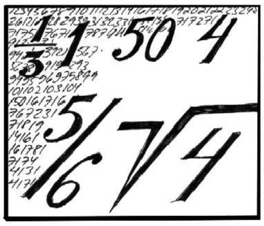


Kahdeksan tehtävää peruskoululaisille

Matemaattisten aineiden opettajien liiton Peruskoulun matematiikkakilpailun ensimmäinen kierros

Matti Lehtinen
Helsingin yliopisto

Matemaattisten aineiden opettajien liitto MAOLin vuotuiset koululaiskilpailut ovat kaksikierroksisia. Lukuvuoden 2010–11 alkukilpailut pidettiin kouluissa marraskuun alussa. Kilpailuja on kaksi, peruskoulun ja lukion, ja lukion kilpailu käydään kolmessa sarjassa. Sarjat perustuvat kilpailijoiden ikään, mutta halutessaan voi kilpailla omaa ikää vanhempienkin sarjassa. Peruskoulukilpailun osallistujat ovat yleensä yhdeksäsluokkalaisia. Tässä kirjoituksessa esitellään Peruskoulun matematiikkakilpailun alkukierroksen tehtävät ja yritetään myös ratkaista niitä. Kirjoittaja ei ole itse ollut tekemisissä tehtävien laadinnan tai tulosten arvioinnin kanssa, joten esitetyt ratkaisuehdotukset ovat luonteeltaan epävirallisia.

Peruskoulukilpailussa oli kahdeksan tehtävää. Ratkaisemiseen oli aikaa vain 50 minuuttia. Kilpailuun osallistui noin 13000 oppilasta. Pisteitä oli jaossa 48. Parhaat pisteet, 45, sai Urjalan Huhdin koulun *Jenna Koivu*. Sadan parhaan joukkoon pääsi pistemäärällä 29 eli noin viiden tehtävän ratkaisemisella.

Kilpailu alkoi perinteisellä kellon osoittimien välistä kulmaa koskevalla tehtävällä.

1. *Kuinka suuri on kellon viisarien välinen kulma, kun kello on a) 8.00, b) 12.45?*

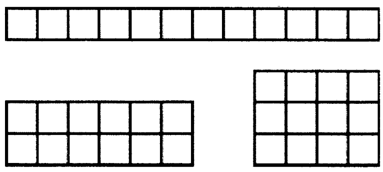
Kun tuntiosoitin kiertää kellotaulun $360°$ 12 tunnissa, niin yhdessä tunnissa se kiertyy $30°$. Kello 8.00 minuuttiosoitin osoittaa kohti 12:ta ja tuntiosoittimella olisi neljä $30°$ jaksoa minuuttiosoittimen luo: a-kohdassa vastaus on siis $120°$. Kello 12.45 minuuttiosoitin osoittaa kohti yhdeksää, joten sen ja kello 12:n suunnan välinen kulma on $90°$. Tuntiosoitin on kuitenkin siirtynyt 3/4 12:n ja yhden välisestä kulmasta eli $\frac{3}{4} \cdot 30° = 22{,}5°$. Osoittimien välissä on siis kulmaa $112{,}5° = 112°\,30'$.

Toisessa kilpailutehtävässä oli pääteltävä kahden joukon yhteisen osan eli leikkausjoukon koko, kun osajoukkojen ja joukkojen yhdisteen komplementtijoukon koot tunnettiin.

2. *Koululaisten harrastuksia tutkittiin. Viidenkymmenen koululaisen joukosta 33 koululaista harrasti jääkiekkoa, 24 koululaista harrasti sählyä ja 8 koululaista ei harrastanut jääkiekkoa eikä sählyä. Kuinka moni koululainen harrasti sekä jääkiekkoa että sählyä?*

Vastaus selviää, kun ensin huomataan, että vähintään jommankumman lajin harrastajia oli $50 - 8 = 42$. Kun tästä vähennetään 24, saadaan pelkän jääkiekon harrastajien lukumäärä 18. Kun jääkiekkoilijoita oli kaikkiaan 33, on sekä jääkiekkoa että sählyä harrastavia $33 - 18 = 15$. Varmuuden vuoksi voi vielä laskea vain sählyä harrastavien määräksi $42 - 33 = 9$ ja sählyn ohella jääkiekkoakin pelaavien määrän $24 - 9 = 15$.

Kolmanteen tehtävään liittyi kuvio. Kysymys oli kuitenkin oikeastaan kokonaislukujen ominaisuuksista. Sama idea oli taustalla, kun vuonna 1974 ryhdyttiin lähettämään avaruuteen ns. *Arecibo*-radiosignaalia, joka koostui 1679:stä eli $73 \cdot 23$ merkistä, jotka signaalin oletetun vastaajan toivottiin ymmärtävän suorakulmioksi.

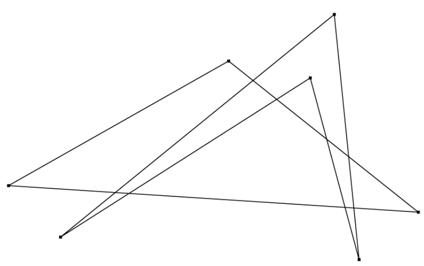


3. *Kahdestatoista pienestä neliöstä voidaan muodostaa kolme suorakulmiota. Kuinka monta suorakulmiota voidaan muodostaa 196 pienestä neliöstä? Ilmoita suorakulmioiden mitat.*

Jos neliöt ovat p:ssä rivissä ja q:ssa sarakkeessa, niin pq on neliöiden lukumäärä. Se, että 12 neliöstä saadaan kolme erilaista suorakaidetta johtuu siitä, että $12 = 1 \cdot 12 = 2 \cdot 6 = 3 \cdot 4$; muita tapoja lausua 12 muodossa pq, $p \le q$, ei ole. Nyt $196 = 4 \cdot 49 = 2^2 \cdot 7^2$. Jos $196 = pq$, $p \le q$ ja p ja q ovat positiivisia kokonaislukuja, niin seuraavat viisi paria (p, q) ovat mahdollisia: (1, 196), (2, 98), (4, 49), (7, 28), (14, 14). Suorakulmion korkeus on kunkin parin edellinen luku ja leveys jälkimmäinen (jos suorakaiteet ajatellaan asetetuksi samalla tavoin kuin mallikuvassa).

Seuraava tehtävä vaati jonkin verran oivallusta. Voi olettaa, etä nopealta vastaajalta saattaisi jäädä muutama tapaus huomaamatta.

4. *Kuinka monta yhteistä pistettä kolmion ja nelikulmion reunaviivoilla voi olla? Piirrä mallikuva jokaisesta tapauksesta.*



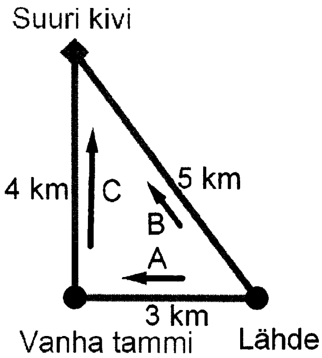
Jos hyvin käy, kolmion ja neliön jokin sivu sattuvat ainakin osaksi päällekkäin. Tällöin yhteisiä pisteitä on äärettömän monta: niinhän janalla aina on (jos janalla olisi vain äärellinen määrä pisteitä, niin jotkin kaksi olisivat vierekkäin ja muodostaisivat janan päätepisteet; tällä janalla olisi sitten uusia pisteitä). Jos nelikulmion ja kolmion mitkään sivut eivät ole samalla suoralla, niin jokaisella neliön sivulla on enintään kaksi yhteistä pistettä kolmion sivujen kanssa. Suorahan ei pysty kolmion kaikkia kolmea sivua leikkaamaan. Niinpä neliön ja kolmion piireillä voi tässä tilanteessa olla enintään kahdeksan yhteistä pistettä. Sopivanmuotoisen, ei kuitenkaan kuperan nelikulmion avulla voi osoittaa, että kahdeksaan pisteeseen todella pääsee. Kun tästä tilanteesta lähtee ja nelikulmiota sopivasti liikuttaa, ensin niin, että yksi nelikulmion kärki osuu kolmion sivuun jne., näkee helposti, että yhteisiä pisteitä voi olla n kappaletta, missä n saa kaikki arvot 0:sta 8:aan. Erilaisia mallikuvioita saa siis piirtää kaikkiaan 10 kappaletta.

Kilpailun viides tehtävä käsitteli suuria lukuja ja laatumuunnoksia. Tehtävän aihe oli saatu edellisen kevään uutistapahtumasta, Eyjafjallajökull-jäätikön tulivuorenpurkauksen seurauksista, ja a- ja b-kohtien vastausten erihenkisyyden voi ajatella osoittavan kauniisti yksi- ja kaksiulotteisuuden eroa.

5. *Viime keväänä islantilainen tulivuori sekoitti Euroopan lentoliikenteen. Tuhkaa nousi ilmaan noin sata miljoonaa kuutiometriä. a) Kuvitellaan tuhka 2 metriä paksuksi kerrokseksi moottoritielle. Tien leveys on 50 metriä. Kuinka monta kilometriä pitkälle matkalle tuhkaa riittäisi? b) Euroopan maa-ala on noin 10 miljoonaa neliökilometriä. Kuinka paksu tuhkakerros olisi, jos tuhka olisi levinnyt tasaisesti tälle alueelle? c) Maailman suurimmat konttialukset kuljettavat noin* 10 000 *konttia kerrallaan. Kolmeen konttiin mahtuu yhteensä 100 kuutiometriä tavaraa. Kuinka monta tällaista laivaa olisi tarvittu tuhkamäärän kuljettamiseksi Islannista?*

a-kohdan luvut ovat mukavia. Metrillä moottoritietä olisi juuri 100 m^2 tuhkaa, joten koko tilavuus 10^8 m^3 vaatisi 10^6 metriä eli 1000 km tietä. Suomessa on vähän alle 800 km moottoriteitä. b-kohdassa on otettava huomioon, että kilometri on 1000 metriä, joten neliökilometri koostuu miljoonasta neliömetristä. Euroopan alan approksimaatio on siis $10^7 \cdot 10^6 = 10^{13}$ neliömetriä. Tasan Euroopan yli levitettynä 10^8 m^3 olisi siis $10^{8-13} = 10^{-5}$ m paksu. Kun millimetri on 10^{-3} metriä, niin millimetreissä paksuus olisi $10^{-2} = 0{,}01$. c-kohdan konttialus kuljettaisi $100 \cdot 10000/3 = 10^6/3$ kuutiometriä. Tarvittavien alusten määrä olisi siis $10^8/(10^6/3) = 300$. – Tuhkakuutiometrin massaa ei ilmoiteta. Jos tuhka on kiviaineksen tapaan selvästi vettä raskaampaa, niin voi olla epäselvää, pysyykö tuhkaa täyteen lastattu alus kunnolla pinnalla.

Seuraava tehtävä on melko tavanomainen nopeus- ja matkalasku. Fysiikan opetukseen piintynyt pedanttisuus lienee tuonut tehtävän konkreettisuuteen jotenkin huonosti istuvan vauhti-sanan.

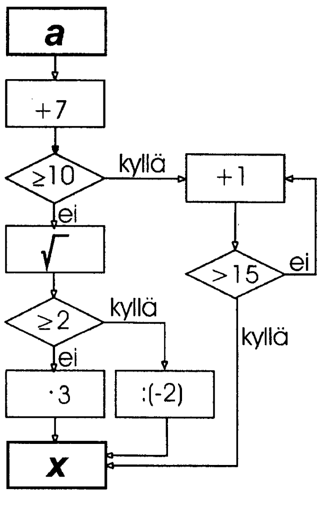


6. *Kolme vaeltajaa kulkee samaa kolmionmuotoista reittiä. Anna ja Bella kävelevät samalla vauhdilla, mutta Claran vauhti on kaksi kertaa niin suuri kuin heidän. Anna ja Bella lähtevät lähteen luota kello 10 vastakkaisiin suuntiin. Clara lähtee vanhan tammen luota kello 11 samalla hetkellä, kun Anna ohittaa tammen ensimmäistä kertaa. Milloin Clara ja Bella kohtaavat ensi kerran?*

Kuvion mukaan Bellalla on kello 11 matkaa vanhalle tammelle 6 km. Koska Claran nopeus on kaksi kertaa Bellan nopeus, he kohtaavat, kun Clara on kävellyt 4 km ja Bella 2 km, eli juuri suuren kiven luona. Kun Bellan nopeus on 3 km/t, niin aikaa kello 11:stä oli kulunut 2/3 tuntia eli 40 min. Kello oli siis 11.40.

Toiseksi viimeisessä tehtävässä oli kulkukaavio, joka kuvasi aika erikoista algoritmia. Vastauskaan ei ole kovin yksinkertainen.

7. *Lähde kohdasta* **a**. *Kulje nuolten suuntaan. Tee merkitty laskutoimitus tai jatka ehdon määräämään suuntaan. a) Mikä luku on* **x**. *jos* $\mathbf{a} = -6$*? b) Mikä luku on* **x**, *jos* $\mathbf{a} = \frac{1}{9}$*? c) Mitkä positiiviset luvut* **a** *antavat kaikki saman tuloksen* **x**?



a- ja b-kohdissa voi tehdä laskut kulkukaavion mukaan. Siis $-6 \to -6+7 = 1 \to \sqrt{1} \to 3 \cdot 1 = 3$ ja $\frac{1}{9} \to \frac{1}{9} + 7 = \frac{64}{9} \to \frac{8}{3} \to -\frac{8}{6} = -\frac{4}{3}$. c-kohdan kysymys on jossain määrin epämääräinen. Kilpailun järjestäjien julkaisemista ratkaisuista päätellen tarkoitus oli etsiä sellaisia eri lukuja $\mathbf{a} = a$, joihin sovellettuna algoritmi tuottaa saman luvun $\mathbf{x} = x$. Kun tehtävässä kuitenkin esiintyy parametri x ja tuntematon a, niin tehtävän normaali ensisijainen lukutapa voisi pelkistettynä olla ”mitkä luvut $a > 0$ ovat sellaisia, että algoritmi tuottaa tulokseksi luvun $= x$?”, siis x annettu suure ja a x:stä riippuva, ei välttämättä yksikäsitteinen ratkaisu. Jos $0 < a < 3$, algoritmin ensimmäinen haarautumiskohta johtaa vasemmanpuoleiseen tiehen, ja koska $a + 7 > 2$, toinen haarautumiskohta johtaa oikealle. Lopputuloksena on siis $x = -\frac{1}{2}\sqrt{a+7}$. Tämä merkitsee sitä, että $a = 4x^2 - 7$ ja koska $0 < a < 3$, ratkaisuja saadaan vain, kun $7 < 4x^2 < 10$ eli kun $-\sqrt{\frac{5}{2}} < x < -\frac{1}{2}\sqrt{7}$. Jos taas $a \geq 3$, ensimmäinen ehto johtaa oikeanpuoleiselle reitille. Oikeanpuoleisen reitin tuottama x on aina > 15. Kun $x \leq 15$, ratkaisua a ei ole. Algoritmin oikeassa haarassa oleva silmukka aktivoituu vain, jos ehdossa testattava luku on ≤ 15. Jos $x > 16$, silmukkaa ei ole kierretty, ja siis $x = a + 8$ eli $a = x - 8$. Jos $15 < x < 16$, niin silmukkaa on kierretty 0, 1, 2, 3 tai 4 kertaa, eli $x = a + 8$, $a + 9$, $a + 10$, $a + 11$ tai $a + 12$. Jos viimein $x = 16$, silmukka on voitu kiertää viisikin kertaa, ja mahdolliset a:n arvot ovat 3, 4, 5, 6, 7 ja 8. – Edellä sanottu sisältää ratkaisun myös tehtävän toiseen tulkintaan. Koska kaikkiin ehdon $-\sqrt{\frac{5}{2}} < x < -\frac{1}{2}\sqrt{7}$ ja kaikkiin ehdon $x > 16$ toteuttaviin lukuihin x liittyy tasan yksi a, edellisiin $a < 3$, jälkimmäisiin $a > 8$, ja kun ehdon $15 < x \leq 16$ toteuttaviin lukuihin liittyy ehdon $3 \leq a \leq 8$ toteuttava a, niin tilanne, jossa useampi kuin yksi a johtaa samaan x:ään, esiintyy silloin, kun joko a on jokin luvuista 3, 4, 5, 6, 7, 8 tai a on jokin luvuista a', $a' + 1$, $a' + 2$, $a' + 3$ ja $a' + 4$, missä a' on jokin ehdon $3 < a' < 4$ toteuttava luku.

Kilpailun viimeisen tehtävän innoittajana oli ollut verohallinnon nettisivuilta löytynyt kömmähdys. Verottajalle on itse kukin varmaan mielellään vahingoniloinen. Tehtävään lainattua jaksoa ei kuitenkaan enää 31.12.2010 löytynyt verohallinnon ohjeistuksesta, mutta googletus osoitti, että sangen monet tilitoimistot olivat sen kritiikittä kopioineet ja yhä pitivät sitä esillä asiakkaidensa tarpeita palvelemassa.

8. *Verohallinnon verkkosivulla oli 13.7.2010 seuraava ohje arvonlisäveron laskemiseksi tuotteen verollisesta hinnasta: ”Tuotteen hintaan sisältyvä arvonlisäveron määrä selviää käyttämällä laskukaavaa:* **verollinen hinta x sovellettava verokanta/100 + sovellettava verokanta.** *Esimerkki: Tuotteen verollinen hinta on* 5 000 *euroa ja siihen sovelletaan nor-*

maalia 22 %:n verokantaa. Vero saadaan laskemalla $5\,000 \times 22/122 = 901{,}64$ *euroa. Tuotteen veroton hinta on* $5\,000 - 901{,}64 = 4\,098{,}36$ *euroa."*

a) Kirjoita lihavoitu ohje yhtälönmuotoisena laskukaavana käyttäen seuraavia muuttujannimiä: $a =$ *arvonlisävero,* $v =$ *verollinen hinta,* $k =$ *sovellettava verokanta. b) Mikä on veron suuruus täsmälleen ohjeen mukaan laskettuna? c) Kirjoita edellä kirjoittamasi kaava sillä tavalla korjattuna, että siitä saadaan arvonlisäverolle esimerkissä ilmoitettu oikea tulos.*

Lihavoitu laskukaava annetuin symbolein on $a = \frac{vk}{100} + k$. Kaavahan on mieletön, koska siinä yritetään laskea yhteen laadullista suuretta v, euroja, ja laadutonta verokantaa k. b-kohtaan ei siis voi antaa vastausta, veron suuruutta ei voi kaavan perusteella laskea ollenkaan (ellei jollain tavalla päätä prosenttien ja eurojen vaihtosuhdetta). Kaavan oikea asu perustuu siihen, että verokantaa sovelletaan tuotteen tai palvelun verottomaan hintaan v'; vero on $a = \frac{k}{100}v'$. Toisaalta $v = v' + a = \left(1 + \frac{k}{100}\right)v' = \left(\frac{100+k}{100}\right)v'$. Tästä seuraa, että $v' = \frac{100}{100+k}v$ ja viimein $a = \frac{kv}{100+k} = vk/(100+k)$. Verohallinnon tekstinlaatijalta olivat siis unohtuneet sulkeet; olisi pitänyt kirjoittaa "verollinen hinta x sovellettava verokanta/(100 + sovellettava verokanta)" tai olisi pitänyt käyttää vaakasuoraa jakoviivaa.

Solmun matematiikkadiplomit

Peruskoululaisille tarkoitetut Solmun matematiikkadiplomit I – V tehtävineen ovat tulostettavissa osoitteessa

`http://solmu.math.helsinki.fi/diplomi.html`

Katso myös kirjoitus lehdestä Solmu 3/2010.