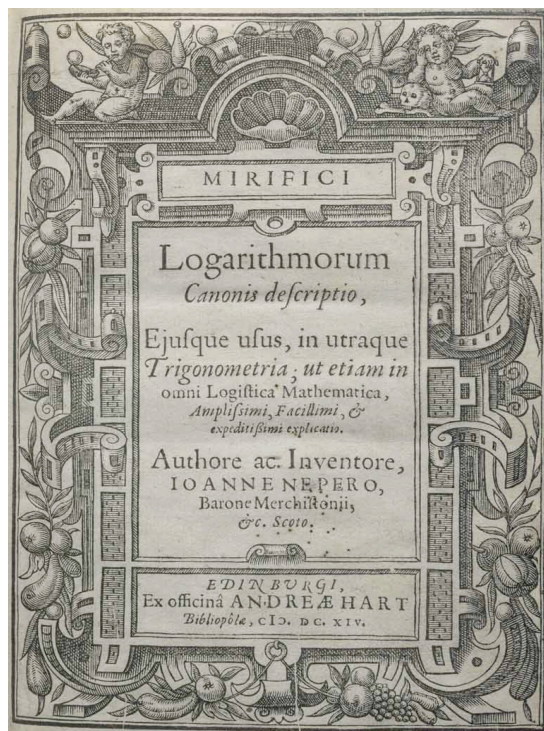


4. Logaritmit



4.1. Johdanto

Logaritmien keksiminen on matematiikan historiassa tapahtuma, jolla ei ole vertaista. Moni matematiikan käsite on kehittynyt ja kypsynyt satoja tai jopa tuhansia vuosia ennen lopullista muotoaan. Toisin on logaritmien tapauksessa. skotlantilaisen paronin ja linnanherran John Napierin (1550-1617) vuonna 1614 julkaisema kirjan *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio* tuli kuin ”salama kirkkaalta taivaalta”. Logaritmit eivät olleet jatkotyö kenenkään edeltäjän keksinnölle, vaan Napier loi logaritmijärjestelmän alusta aina valmiiksi saakka täysin itsenäisesti. Kirjassa esitelty logaritmijärjestelmä otettiin vastaan kiittäen ja tieto logaritmien keksimisestä levisi saman tien läpi koko tunnetun maailman. Kiitolliset karttojenlaattijat, maanmittaajat, merenkulkijat (navigoinnin helpottuminen) sekä ennen kaikkea tähtitieteilijät ryhtyivät käyttämään sitä hyvin pian ilmestymisen jälkeen. Nopea käyttöönotto johtui siitä, että Napierin keksinnölle oli olemassa suunnaton tarve, erityisesti astronomien keskuudessa. 1500-luvun lopulla ja 1600-luvun alussa, aikana jolloin mm. kuuluisat tähtitieteilijät Johannes Kepler (1571-1630), Tycho Brahe (1546-1601) ja Galileo Galilei (1564-1642) tekivät uusia ja merkittäviä havaintojaan oli astronomien suoritettava tarkkojen havaintojen lisäksi myös hankalia trigonometrisiä laskuja välineinään vain kynä, paperia ja sinitaulukko. Itse Napier on todennut, että

Matematiikassa ei ole mitään niin vaivalloista, kuin suurten lukujen kerto- ja jakolaskut sekä neliö- ja kuutiojuuret, koska niihin kuluu valtavasti aikaa ja ne ovat alttiita huolimattomuusvirheille.

Käytännön syistä Napierin muokkasi alkuperäistä logaritmijärjestelmäänsä yhdessä englantilaisen Henry Briggsin kanssa. Tästä työstä tuloksena oli yleiset 10-kantaiset logaritmit, joiden ensimmäinen, joskin osittain puutteellinen, taulukko julkaistiin 1624. Tässä Briggsin ja Napierin yhteistyön tuloksena syntyneessä järjestelmässä toteutuu elegantilla tavalla John Napierin alkuperäinen päämäärä: luo-

da menetelmä, jota käyttämällä kertolasku on mahdollista muuntaa yhteenlaskuksi, jakolasku vähennyslaskuksi sekä juurten laskeminen kahdella, kolmella, jne. jakamiseksi, sillä tutut logaritmikaavat $\log ab = \log a + \log b$, $\log (a/b) = \log a - \log b$ ja $\log a^n = n \log a$ ovat tässä järjestelmässä voimassa.

Logaritmit olivatkin matemaatikkojen ja luonnontieteilijöiden korvaamaton apu 350 vuoden ajan 1600-luvun alkupuolelta 1970-luvulle saakka, kunnes taskulaskimet ja tietokoneet syrjäyttivät logaritmit laskennan apuvälineenä. Vielä niinkin myöhään kuin 1964 Englannin Royal Society julkaisi uudet logaritmitaulukot 110 desimaalin tarkkuudella. Ranskalainen matemaatikko Laplace on kiteyttänyt logaritmien merkityksen toteamalla, että "laskelmissa tarvittavan työmäärän vähentyminen lisäsi tähtitieteilijän eliniän kaksinkertaiseksi".

4.2. Historia ja kehittyminen

4.2.1. Prostafairesi

Jo ennen Napierin keksintöä matemaatikot tunsivat ja käyttivät joitain prostafairesiksi¹ kutsumiaan menetelmiä. Esimerkiksi tutun trigonometrisen muunnoskaavan $2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$ avulla kertolasku voidaan muuttaa yhteen- ja vähennyslaskuksi. Vastaavia trigonometrisia yhtälöitä oli käytössä muitakin, myös jakolaskulle. Napier oli tietoinen prostafairesista ja on mahdollista, että hän sai innoituksensa juuri tästä ilmiöstä. Hänelle oli kuitenkin selvää, että tällaiset trigonometriset yhtälöt eivät voineet tuoda lopullista apua tähtitieteilijän arkeen, sillä prostafairesikin oli edelleen liian monimutkainen ollakseen todellinen helpotus suurten lukujen kanssa painivalle.

Esimerkki prostafairesin käytöstä

Muunnetaan yhtälön $2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$ eli yhtälön $\sin \alpha \sin \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{2}$ avulla kertolasku $0,87462 \cdot 0,25882$ yhteen- ja vähennyslaskuksi:

1. Etsitään kulmat α ja β , joille $\sin \alpha = 0,87462$ ja $\sin \beta = 0,25882$. Kyseiset kulmat ovat $\alpha = 61,0^\circ$ ja $\beta = 15,0^\circ$.
2. Määritetään kyseisten kulmien erotus ja summa: $\alpha - \beta = 46^\circ$ ja $\alpha + \beta = 76^\circ$.
3. Määritetään erotuksen ja summan kosinit: $\cos 46^\circ = 0,69466$ ja $\cos 76^\circ = 0,24192$.
4. Kertolaskun lopputulos on kohdan 3 lukujen erotus jaettuna kahdella:
 $0,87462 \cdot 0,25882 = (0,69466 - 0,24192) : 2 = 0,22637$.

Tulos on luonnollisesti vain viiden desimaalin tarkkuudella oleva likiarvo, täsmällinen tuloksen ollessa 0,2263691484. Usein kuitenkin laskujen lopputuloksen ei tarvinnut olla täsmälleen oikein, vaan mittaustulosten ollessa kyseessä lopputulos olisi joka tapauksessa täytynyt pyöristää.

On hyvä muistaa, että kaikki kuusi trigonometrista suhdetta, erityisesti tietenkin sini ja kosini, tunnettiin 1600-luvun alussa jo hyvin. Näille oli tarjolla runsaasti erilaisia taulukoita, joista oli suhteellisen helppoa tiettyä kulmaa vastaava sinin arvo tai määrittää tiettyä sinin arvoa vastaavan kulman suuruus. Yleisesti käytetyissä sini- ja kosinitaulukoissa hypotenuusan pituus oli luokkaa 10^7 (ei luku 1, kuten nykyisin!), jolloin sinin ja kosinin arvot olivat kutakin kulmaa vastaavat sivun pituudet. Trigonometriset taulukot olivat siten riittävän tarkkoja mahdollistaen prostafairesin käytön.

¹ prosthaphaeresis (kreikk.) merkitsee ”lisääminen ja vähentäminen”
erkki.luoma-aho@jkl.fi

4.2.2. Napierin logaritmitaulukon idea

Napierin ryhtyessä työhön matemaatikot olivat oppineet tuntemaan geometrisen jonon peräkkäisten jäsenten ominaisuudet. Saksalainen matemaatikko Michael Stifel (1487-1567) oli kirjoittanut seuraavasti:

Jos jonossa 1, q, q², ... mitkä tahansa termit kerrotaan keskenään on tulos sama kuin jos kyseisten lukujen eksponentit laskettaisiin yhteen.

Tätä geometrisen jonon ominaisuutta voi havainnollistaa helpoiten luvun 2 potenssien jonolla, joka löytyy taulukosta 1.

Taulukko 5. Luvun kaksi potensseja.

n	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2^n	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024

Esimerkiksi lukujen 8 ja 64 tulo saadaan laskemalla lukuja vastaavat eksponentit yhteen ($8 = 2^3$ ja $64 = 2^6$) sekä etsimällä taulukosta eksponenttia $3 + 6 = 9$ vastaava luku $2^9 = 512$. Vastaavalla tavalla myös esimerkiksi kertolaskun $0,25 \cdot 128$ lopputulos 32 voidaan lukea suoraan taulukosta eksponentin $7 - 2 = 5$ kohdalta.

Luvun kaksi potenssien taulukolla voidaan tehdä alkeellisia kertolaskujen muunnoksia yhteenlaskuksi, mutta se ei ole riittävä yleiseen käyttöön, sillä luvut taulukossa kasvavat nopeasti suuriksi ja mitä suuremmaksi eksponentti käy sen harvemmassa varsinaiset luvut ovat: eksponentteja 9 ja 10 vastaavien lukujen välimatka on jo 512. Myös puuttuvat luvut 3, 5, 6, 7, 9 jne. tulisi pystyä esittämään, jotta taulukko olisi käyttökelpoinen. Totta kai nekin voitaisiin esittää valitsemalla eksponentti sopivasti, esimerkiksi luku 3 voidaan esittää luvun kaksi potenssina valitsemalla eksponentiksi 1,585, sillä $2^{1,585} = 3,00007\dots$. Tämä on jo melko hyvä likiarvo. Täydentämällä taulukko vaikkapa 10 desimaalin tarkkuudella olevilla eksponenteilla päästäisiinkin useimmissa laskuissa riittävään tarkkuuteen. Napierilla ei kuitenkaan ollut mahdollisuutta rakentaa tällaista taulukkoa, sillä sen laskeminen vaatisi käsin tehtynä suunnattoman paljon työtä.

Napier lähestyi ongelmaa toisesta suunnasta: hän valitsi kantaluvun, joka on riittävän lähellä lukua 1, jotta geometrisen jonon peräkkäisten lukujen erotus ei olisi liian suuri edes hyvin korkeilla eksponentin arvoilla. Myös tällä tavoin taulukosta

saataisiin riittävän kattava. Hän päätyi valitsemaan luvun $0,9999999 = 1 - \frac{1}{10^7}$, jo-

ten Napierin taulukossa luvut *vähenevät* eksponentin kasvaessa. Napierin taulukon ensimmäisen luku oli $10^7 = 10\,000\,000$, sillä hänen tarkoituksenaan oli helpottaa ennen kaikkea vaikeita trigonometrisiä laskelmia ja trigonometrisissä taulukoissa sinus totus eli hypotenuusan pituus oli usein juuri 10^7 . Taulukon toinen luku luvun $10\,000\,000$ jälkeen oli helppo saada vain pilkkua siirtämällä: $0,9999999 \cdot 10\,000\,000 = 9\,999\,999$. Tätä seuraavat luvut ovat myös helppo laskea vastaavalla menetelmällä kuin jolla voidaan laskea vaikkapa kuinka paljon on 99 % tuotteen hinnasta: jaetaan tuotteen hinta sadalla ja vähennetään alkuperäisestä hinnasta tämä yhtä prosenttia vastaava osa. Napier siis eteni taulukon kolmanteen lukuun vähentämällä luvusta $9\,999\,999$ luvun kymmenesmiljoonasosan, joka saadaan taas pelkästään pilkkua siirtämällä. Napier saattoi siten muodostaa koko taulukon kohtuullisella vaivalla. Napier otti myös vapauden pyöristää välillä lukuja, mikä luonnollisesti myös osaltaan helpotti taulukon laadintaa.

Näin siis Napier laati taulukon, jossa luvut olivat tarpeeksi lähellä toisiaan myös eksponentin suurilla arvoilla. Itse asiassa lukujen välimatka *pienenee* eksponentin kasvaessa. Täysin tiivistä tästäkään taulukosta ei luonnollisesti syntynyt, mutta puuttuvia lukuja varten hän kehitti interpolaatiomenetelmän², jolla voitiin arvioida puuttuvat luvut riittävällä tarkkuudella.

Napier taulukko alkaa siis luvulla 10^7 ja tätä seuraavat luvut ovat: 9 999 999, 9 999 998, 9 999 997, ... , joten jokainen Napierin taulukossa oleva luku N voidaan esittää muodossa

$$N = 10^7 \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^L, \text{ missä eksponenttia } L \text{ sanotaan luvun } N \text{ logaritmiksi.}$$

Lopullisen logaritmitaulukon Napier laati näiden lukujen avulla. Edelleen on tärkeää muistaa, että Napierin perimmäinen tarkoitus oli helpottaa trigonometrinen laskelmien suorittamista. Siispä hän rakensi lopulliseen taulukkoon jokaista *kulmaa* vastaavan sinin logaritmit väliltä $0^\circ - 90^\circ$ yhden kulmaminuutin välein. Taulukossa on siis ensimmäisenä (tai viimeisenä) kulman 0° sini ja logaritmi, jonka Napier määrittä äärettömän suureksi. Seuraavaksi on kulman $0^\circ 1' \text{ sini}^3$ ja sen logaritmi jne. ensimmäisellä sivulla on logaritmit aina kulmaan $0^\circ 30'$ saakka. Kulman $0^\circ 31'$ sinin logaritmi on seuraavalla sivulla. Muidenkin kulmien logaritmit ovat jaettuna kahdelle sivulle. Lisäksi taulukossa vielä eräänlainen tarkistussarake (*Differentiae*). Tilaa säästääkseen Napier sijoitti toiseen palstaan vähenevässä järjestyksessä kulmasta 90° alkaen asteminuutin välein jokaisen kulman sinin ja sen logaritmin. Näin taulukkoon kertyi yhteensä 90 sivua. Kuvassa 46 on taulukon ensimmäinen sivu ja kuvassa 47 viimeinen sivu.⁴

Sana logaritmi

Sanan logaritmi Napier sepitti itse. Aluksi hän kutsui luomiaan lukuja (eksponentteja) ”keinotekoisiksi luvuiksi”, mitä ne tietenkin ovatkin. Tarkemmin asiaa mietittyään hän kuitenkin päätyi vaihtamaan nimityksen. Sanan logaritmi taustalla ovat kreikan kielen sanat *logos* ”laskeminen” tai ”suhde” ja *arithmos* ”numero”, joten logaritmi merkitsee vapaasti käännettynä ”suhdenumeroa”. Tätä nimitystä tukee mm. seuraava Napierin logaritmeihin (merkitään LN) liittyvä ominaisuus:

Jos luvuille a, b, c ja d on voimassa $b : a = d : c$, niin $\text{LN}(b) - \text{LN}(a) = \text{LN}(d) - \text{LN}(c)$. Tämä ominaisuus on voimassa myös meidän käyttämässämme logaritmijärjestelmissä.

² Yksinkertaisin interpolaatio saavutetaan arvioimalla, että puuttuvien osien kohdalla muutos on lineaarista. Napierin käyttämä interpolaatio ei kuitenkaan ollut lineaarinen.

³ Kulman $0^\circ 1'$ sini saadaan seuraavalla kaavalla: $10\,000\,000 \cdot \sin(1/60^\circ) = 2908,88... \approx 2909$. Tämä arvo on nähtävissä kuvassa 1. Logaritmin ja sinin yhteys on tarkistettavissa laskusta $10\,000\,000 \cdot 0,9999999^{81425681} = 2908,89... \approx 2909$.

⁴ Osoitteessa <http://www.rarebookroom.org> on mahdollista tutustua Napierin kirjaan sen alkuperäisessä muodossa. erkki.luoma-aho@jkl.fi

Gr.		+		-			
min	Sinus	Logarithmi	Differentia	logarithmi	Sinus		
0	0	Infinitum	Infinitum	0	10000000	60	
1	2922	81425681	81425680	1	10000000	59	
2	5818	74424213	74424211	2	9999998	58	
3	8727	70439564	70439560	4	9999996	57	
4	11636	67562745	67562739	7	9999993	56	
5	14544	65331315	65331304	11	9999989	55	
6	17453	63508099	63508083	16	9999986	54	
7	20362	61966595	61966573	22	9999980	53	
8	23271	60631284	60631256	28	9999974	52	
9	26180	59453453	59453418	35	9999967	51	
10	29088	58399857	58399814	43	9999959	50	
11	31927	57446759	57446707	52	9999950	49	
12	34906	56576646	56576584	62	9999940	48	
13	37815	55776222	55776149	73	9999928	47	
14	40724	55035148	55035064	84	9999917	46	
15	43632	54345225	54345129	96	9999905	45	
16	46541	53699843	53699734	109	9999892	44	
17	49450	53093600	53093577	123	9999878	43	
18	52359	52522019	52521881	138	9999863	42	
19	55268	51981356	51981202	154	9999847	41	
20	58177	51468431	51468361	170	9999831	40	
21	61086	50980537	50980450	187	9999813	39	
22	63995	50515342	50515137	205	9999795	38	
23	66904	50070827	50070603	224	9999776	37	
24	69813	49645239	49644995	244	9999756	36	
25	72721	49237030	49236765	265	9999736	35	
26	75630	48844826	48844539	287	9999714	34	
27	78539	48467431	48467122	309	9999692	33	
28	81448	48103763	48103431	332	9999668	32	
29	84357	47752859	47752503	356	9999644	31	
30	87265	47413852	47413471	381	9999619	30	

Kuva 46. Napierin logaritmitaulukon ensimmäinen sivu.

Gr. 44							
44		+ -					
min	Sinus	Logarithmi	Differentia	logarithmi	i Sinus		
30	7009093	3553767	174541	3379226	7132504	30	
31	7011167	3550808	168723	3382085	7130465	29	
32	7013241	3547851	162905	3384946	7128425	28	
33	7015314	3544895	157087	3387808	7126385	27	
34	7017387	3541941	151269	3390672	7124344	26	
35	7019459	3538989	145451	3393538	7122303	25	
36	7021530	3536038	139632	3396406	7120261	24	
37	7023601	3533089	133814	3399275	7118218	23	
38	7025671	3530142	127996	3402146	7116175	22	
39	7027741	3527197	122178	3405019	7114131	21	
40	7029810	3524253	116359	3407894	7112086	20	
41	7031879	3521311	110541	3410770	7110041	19	
42	7033947	3518371	104723	3413648	7107995	18	
43	7036014	3515432	98904	3416528	7105949	17	
44	7038081	3512495	93086	3419409	7103902	16	
45	7040147	3509560	87268	3422292	7101854	15	
46	7042213	3506626	81450	3425176	7099806	14	
47	7044278	3503694	75632	3428062	7097757	13	
48	7046342	3500764	69824	3430940	7095708	12	
49	7048406	3497835	64006	3433829	7093658	11	
50	7050469	3494908	58178	3436730	7091607	10	
51	7052532	3491983	52360	3439623	7089556	9	
52	7054594	3489060	46543	3442517	7087504	8	
53	7056655	3486139	40726	3445413	7085452	7	
54	7058716	3483219	34908	3448311	7083399	6	
55	7060776	3480301	29090	3451211	7081345	5	
56	7062836	3477385	23273	3454112	7079291	4	
57	7064895	3474470	17455	3457015	7077236	3	
58	7066953	3471557	11637	3459920	7075181	2	
59	7069011	3468645	5818	3462827	7073125	1	
60	7071068	3465735	0	3465735	7071068	0	
						min	
						Gr.	
						45	

Kuva 47. Napierin logaritmitaulukon viimeinen sivu.

4.2.3. Napierin julkaisemat kirjat

Napier työsti järjestelmäänsä yli 20 vuotta ennen kuin sai sen valmiiksi ja julkaisi taulukot yhdessä esimerkkilaskujen kanssa kirjassaan *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio* (Ihmeellisen logaritmisäännön kuvaus) vuonna 1614. Hän oli laatinut materiaalit toiseenkin kirjaan, jonka tarkoituksena oli esitellä logaritmitaulukoiden laatimisen perusteet. Napier täytti kuitenkin kirjan julkaisuvuonna jo 64 vuotta ja oli menettänyt parhaat voimansa. Hän menehtyi vuonna 1617 ennen kuin ehti julkaista toisen teoksen. Tämän kirjan kokosi hänen poikansa Robert, joka julkaisi vuonna 1619, noin kaksi vuotta isänsä John Napierin kuoleman jälkeen, kirjan *Mirifici Logarithmorum Canonis Constructio*. Tässä kirjassa, jonka käsikirjoituksen Napier oli kirjoittanut itse asiassa ennen *Descriptiota*, hän esitti perustellun työnsä. Syy tällaiseen järjestykseen oli, että hän halusi varmistua, että logaritmit otettaisiin ensin vastaan ja että ne saisivat yleisen hyväksynnän niiden käytökelpoisuuden kautta ennen kuin hän kertoisi kuinka itse taulukot on laadittu. Näin myös tapahtui. Se mikä jää edelleen tuntemattomaksi on, että miten tuli keksineeksi logaritmit. Mistä hän sai ensimmäisen ajatuksen aiheeseen? Sitä ei Napier kummassakaan kirjassa paljasta.

John Napier (1550- 1617)



Kuva 3. John Napier, detail of an oil painting, 1616; in the collection of the University of Edinburgh

Lähde: Encyclopædia Britannica 2007 Deluxe Edition, Napier, John

John Napier, ”Skotlannin Arkhimedes”, syntyi vuonna 1550 Merchistonin linnassa, lähellä Edinburghia. Isänsä Sir Archibald Napierin puolelta John kuului Skotlannin aatelisiin. Myös äidin, Janet Bothwellin, suku oli ylhäistä, mm. Orkneyn piispa oli hänen veljensä. Isänsä suvulta John peri sekä valtaisan energisyyden ja innon tutustua uusiin asioihin että protestanttisen uskon ja paavinvastaisuuden. Hänen luonnettaan on kuvattu päättäväiseksi, jopa itsepäiseksi.

Kolme vuotta ennen John Napierin syntymää oli John Knox aloittanut Skotlannissa uskonpuhdistuksen ja vielä John joutui elämäänsä nuoruutensa näiden kiihkeiden aikojen keskellä. Tapahtumia hänen varhaisilta vuosiltaan ei juurikaan tunneta, mutta hänen tiedetään opiskelleen joitain vuosia St Andrews'n yliopistossa sekä luultavasti myös ulkomailla, mahdollisesti Pariisissa. Vuoteen 1571 mennessä hän kuitenkin palasi Skotlantiin ja asetui isänsä maille Gartnessiin, Drymeniin (n. 100 km Edinburghista itään), jonne hän rakensi kartanon. Sinne hän myös asettui asumaan yhdessä vaimonsa Elizabeth Stirlingin kanssa, jonka hän vei vihille vuonna 1572. Seitsemän aviovuoden jälkeen hänen vaimonsa kuoli. Napier avioitui uudelleen pian vaimon poismenon jälkeen. Ensimmäisestä avioliitosta hänellä oli tyttö Jane ja poika Archibald sekä toisesta viisi tyttöä ja viisi poikaa, yhteensä siis kaikkiaan 12 lasta. Hänen isänsä kuoltua vuonna 1608 John Napier vanhimpana lapsena nousi Merchistonin linnan herraksi.

John osallistui aktiivisesti sekä paikallisiin että valtakunnallisiin asioihin. Tunnetuin hänen yhteiskunnallisista ja teologisista hankkeistaan oli Skotlannin kuninkaalle James VI:lle omistama Johanneksen ilmestyskirjan selitysteos *A Plaine Discovery of the Whole Revelation of St. John* (1593), jonka eräs pääteemoista on, että Paavi on antikristus. Kirjan saatesanoissaan hän kehotti kuningastaan puhdistamaan hovinsa paavin kätyreistä ja muista ateisteista. Kirjan kirjoittamisen aikana katolisten ja protestanttien kiistoista johtuen oli olemassa todellinen uhka, että Espanjan katolinen kuningas Filip II nousisi maihin Skotlannissa, kukistaisi yhdessä paikallisten katolisten kanssa ensin protestanttisen Skotlannin ja tämän jälkeen Englannin. Selitysteos antoi John Napierille huomattavan maineen teologina ja oppineena. Hän olikin aikalaisensa parissa tunnettu pääasiassa juuri tämän erittäin suosituksen ja useille kielille käännetyn selitysteoksen laatijana.

Protestanttisen uskon ja isänmaan puolustaminen katolisten uhkaa vastaan sai John Napierin käyttämään kynäänsä myös erilaisten sotakoneiden suunnitteluun. Hän laati piirustukset neljälle erilaiselle aseelle, jotka ”Jumalan armosta ja taitavien käsityöläisten tekemänä” olisivat avuksi ”tämän saaren puolustamisessa”. Koneista kaksi oli peilikokeita, joiden välityksellä olisi mahdollista kohdistaa auringonvaloa maihinnousua yrittäviin laivoihin ja siten sytyttämään ne tuleen. Hän laati pelikoneiden lisäksi suunnitelmat eräänlaiselle tykille, jolla voisi pyyhkäistä kerralla jopa kokonaisen taistelukentän tyhjäksi vihollisen sotilasta, panssaroidulle sota-vaunuille, joissa olisi pyöreitä ampuma-aukkoja, jotta sen kyydistä voisi ampua turvallisesti eri suuntiin sekä jonkinlaiselle sukellusveneelle, jonka tehtävänä olisi ”aiheuttaa harmia viholliselle”⁵.

Napier kehitteli myös tavanomaisempia laitteita. Niitä myös rakennettiin ja käytettiin, toisin kuin pelkiksi suunnitelmiksi jääneet sotakoneet. Eräs näistä laitteista oli eräänlainen hydraulinen vesiruuvi, jolla voitiin ruuvata pois hiilikaivoksiin kertynyttä vettä. Hän kohdisti tarmoaan myös maanviljelyksen kehittämiseen – hänhän oli huomattava maanomistaja – tehden kokeita erilaisten lannoitteiden käytöstä sadon parantamiseen. Näiden kokeiden perusteella hänen vanhimman poikansa Archibaldin nimiin myönnettiin patentti suolojen käytöstä lannoitteena.

Jostain syystä Napierin suvussa uskottiin olevan mustan magian harrastajia ja myös John Napierin epäiltiin sellaisia taitoja omaavaksi. Ilmeisesti hänen maineensa teologina säästi hänet niiltä vakavilta seurauksilta, jotka usein seurasivat tällaisten epäilyn kohteeksi joutuneita. Joka tapauksessa John omisti pikimustan kukon, jonka kuiskittiin paljastavan John-isännälle kaikki tämän lähipiirin salaisuudet. Kerran tilalta havaittiin hävinneen tavaraa ja jotakuta lukuisista erään rengeistä epäiltiin varkaaksi. John ilmoitti, että hänen omista-

⁵ Lainaukset: *Napier Tercentenary memorial volume*, s. 46-47
erkki.luoma-aho@jkl.fi

mansa musta kukko kertoisi hänelle varkaan kiekaisemalla, kun varas taputtaa tätä. Hän sulki kukon pimentettyyn kamariin ja käski jokaisen vuorollaan astua huoneeseen ja koskea kukon selkään. Kukko paljastikin syyllisen: John oli nimittäin sotkenut kukkonsa selän hiilellä ja ainoastaan varkaalla oli puhtaat kädet huoneesta ulos astuessaan, sillä raukkaparka pelkäsi ”kukon noituutta” niin paljon, ettei ollut tohtinut koskea siihen lainkaan!

Kerrotaan toisestakin tilanhoitoon liittyvästä tapauksesta. Viereisen tilan lukuisat pulut nimittäin häiritsivät Napieria sotkemalla hänen kartanonsa piha-alueita. John vaati toistuvasti naapuriaan tekemään asialle jotain, mutta valitukset kaikuivat kuin kuuroille korville. Naapuri vain ilkkui, että nappaa pulut kiinni jos saat. Eräänä aamuna naapurin isäntä ihmetteli miksi hänen pulunsa makaavat liikkumattomina Napierin pihamaalla ja tämän palvelijat keräävät puluja säkkiin. Syy oli yksinkertainen: Napier oli imeyttänyt pihamaalle kylvämiinsä jyviiin vahvaa alkoholia ja pulut makasivat maassa juopuneina ja täysin lentokyvyttöminä.

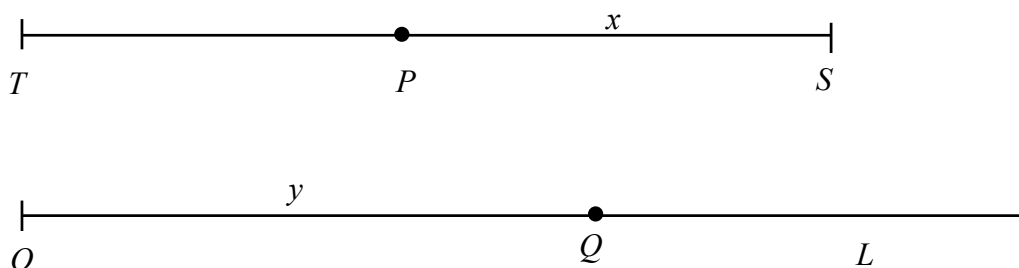
Napier oli kiinnostunut myös matematiikasta ja laati useita matemaattisia kirjoituksia. Napieria voi tässäkin suhteessa pitää itseoppineena, sillä hän ei ollut saanut juurikaan muodollista matemaattista koulutusta. Kirjallisen tuotannon lisäksi hän kehitti Napierin luina tunnetun eräänlaisen mekaanisen kertotaulun, jonka avulla on melko vaivatonta laskea vaikeitakin kertotauluja. Hänen matemaattisista keksinnöistään ja kirjoitelmissaan tärkeimmäksi on osoittautunut logaritmien keksiminen. Napier ryhtyi työstämään niitä jo vuonna 1590, joten työ kesti lähes neljännesvuosisadan ennen kuin hän julkaisi tulokset vuonna 1614.

Vaikka Napierin elämä 2000-luvulla katsoen on vähintäänkin värikäs on muistettava, että myös ajat olivat toiset. Niissä oloissa John Napier toimi parhaaksi katsomallaan tavalla pyrkien edistämään hyväksi katsomiensa asioita sekä paikallisella että valtakunnallisella, mutta myös laajemmalla tasolla. Napier antaa hyvän esimerkin siitä, että vahvalla mielikuvituksella, ennakkoluulottomuudella sekä ennen kaikkea päättäväisellä asenteella varustettuna on mahdollista tehdä suuria!

4.2.4. Napierin matemaattiset perustelut järjestelmälleen

Kirjassaan *Mirifici Logarithmorum Canonis Constructio* Napier esittää perustelut logaritmeilleen. Hän määritteli ne kahden pisteen liikkeen avulla ja itse asiassa loi kahden pisteen liikkeen välille riippuvuuden, jota nykyisin kuvattaisiin sanalla funktio. Syy tälle hieman monimutkaiselle ja kaukaa haetulle perustelulle oli siinä, että Napierin aikaan potenssilaskennan teoria ei ollut täsmentynyt riittävästi, jotta meille tavanomaisia laskulakeja olisi voitu käyttää. Siispä Napier turvasi geometriaan, sillä se mikä oli perusteltavissa geometrisesti oli olemassa, kiitos Eukleideen.

Piirretään aluksi jana TS , jonka pituus on 10^7 sekä puolisuora OL . Janalla TS liikkuu piste P ja puolisuoralla OL piste Q . Ajan hetkellä $t = 0$ molemmat pisteet lähtevät liikkeelle, piste P pisteestä T ja piste Q pisteestä O . Piste Q liikkuu puolisuoralla OL vakionopeudella eli samassa aikayksikössä aina yhtä pitkän matkan. Piste P liikkuu nopeudella, joka on verrannollinen jäljellä olevaan matkaan PS . Alkunopeus on molemmilla pisteillä sama eli janan TS pituus 10^7 .



Kuva 48.

Pisteen P nopeus siis pienenee: puolessa välissä matkaa nopeus on puolet alkuperäisestä ja kun on edetty matkasta kolme neljäsosaa on nopeus enää neljäsosa alkuperäisestä, jne.

Napier määritteli kirjassa *Constructio* logaritminsa seuraavasti:

*"Annetun sinin [luvun x] logaritmi [luku y] on se numero, joka on lisääntynyt aritmeettisesti vakionopeudella samassa ajassa, jossa samanaikaisesti, samalla nopeudella liikkeelle lähtenyt, mutta geometrisesti vähenevällä nopeudella etenevä säde on vähentynyt annettuun siniin."*⁶

Tätä määritelmää lukiessa on hyvä muistaa, että Napier perusti työnsä sinitaulukolle, jossa täysi sini oli 10^7 ja jota jana TS esittää. Napierin ajatus voidaan esittää nykyaikaisia merkintöjä käyttäen seuraavasti, kun symboli LN merkitsee Napierin logaritmia:

Jos ajan hetkellä t pisteen P etäisyys pisteestä S on x ja pisteen Q kulkema matka pisteestä O lukien on y , niin $y =$ luvun x logaritmi:

$$y = \text{LN}(x).$$

⁶Cajori, *History of Exponential and Logarithmic Concept*, s. 7
erkki.luoma-aho@jkl.fi

Tärkeä oivallus tässä Napierin määritelmässä on siinä, että pisteen Q edetessä aritmeettisesti eli sen edetessä yhtä pitkässä aikajaksossa aina yhtä pitkän matkan, niin piste P etenee geometrisesti eli sen nopeus vähenee tietyssä aikajaksossa aina yhtä monta prosenttia. Näin hän sai yhdistettyä aritmeettisen ja geometrisen muutoksen, joten hän pystyi käyttämään hyväksi taulukosta 5 havaittua geometrisen jonon ominaisuutta ilman muodollista potenssimerkintää, jota siis ei vielä tällöin ollut.

Määritelmästä seuraa suoraan, että luvun 10^7 logaritmi on nolla eli $\text{LN}(10^7) = 0$. Tämä tietenkin oli Napierin nimenomainen pyrkimys, sillä hän ajatteli tällä tavoin säästävänsä taulukon käyttäjältä työtä ja vaivaa. Trigonometrisissä laskuissa on nimittäin usein suoritettava kertominen tai jakaminen hypotenuusan pituudella.

Tärkeää oli Napierille myös se, että jokaisen luvun (eli sinin) logaritmi on positiivinen luku, hänen järjestelmässään ei ollut lainkaan negatiivisia logaritmin arvoja. Negatiiviset luvut hyväksyttiin käyttöön vasta 1600-luvun loppuun mennessä. Modernilla tavalla määriteltyjen kulmien 0° - 90° sinien logaritmit ovat sekä luonnollisessa että 10-kantaisessa järjestelmässä negatiivisia lukuja, mutta vielä Napierille tällainen määritelmä ei ollut mahdollinen.

Määritelmästä voi tehdä myös sen huomion, että hyvin lähellä nollaa olevien lukujen logaritmit ovat erittäin suuria lukuja. Tämä voidaan perustella sillä, että pisteen P lähestyessä hyvin lähelle pistettä S sen nopeus hidastuu hidastumistaan ja samaan aikaan piste Q etenee edelleen vakionopeudella, joten logaritmin arvo kasvaa äärettömän suureksi x tullessa äärettömän lähelle lukua 0. Raja-arvoa käyttäen:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \text{LN}(x) = \infty.$$

4.2.4. Napierin logaritmin vertailu luonnolliseen logaritmiin

Tarkastellaan Napierin logaritmifunktiota hieman tarkemmin analyysin keinoin. Napierin aikana differentiaaliyhtälöt eivät vielä olleet tuttuja, mutta me tiedämme nykyisin, että pisteen nopeus on sama kuin sen paikan derivaatta ajan suhteen:

$$\text{pisteen } P \text{ nopeus} = \frac{d}{dt}(10^7 - x) = -\frac{dx}{dt}.$$

Napierin määritelmän mukaan pisteen P nopeus on verrannollinen jäljellä olevaan matkaan x , joten tästä voidaan kirjoittaa differentiaaliyhtälö

$$-\frac{dx}{dt} = x,$$

joka voidaan ratkaista separoimalla:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{x} &= -dt \\ \ln x &= -t + C.\end{aligned}$$

Kun sijoitetaan alkuarvo $t = 0$ ja $x = 10^7$ voidaan määrittää vakio C , $C = \ln 10^7$.

Siten yhtälön ratkaisu on $\ln x = -t + \ln 10^7$, josta ratkaistaan t :

$$t = \ln 10^7 - \ln x. \quad (1)$$

Toisaalta pisteen Q nopeuden tiedetään olevan vakio, joten sen alkunopeus on 10^7 :

$$\text{pisteen } Q \text{ nopeus} = \frac{dy}{dt} = 10^7.$$

Tästä saadaan separoimalla:

$$\begin{aligned}dy &= 10^7 dt \\ y &= 10^7 t + D.\end{aligned}$$

Sijoittamalla alkuarvo $t = 0$ ja $y = 0$ ratkeaa vakio D , $D = 0$, joten

$$y = 10^7 t. \quad (2)$$

Sijoittamalla yhtälöön (2) yhtälöstä (1) ratkaistu t saadaan:

$$y = 10^7 (\ln 10^7 - \ln x) = 10^7 \ln \left(\frac{10^7}{x} \right) = 10^7 \log_{1/e} \left(\frac{x}{10^7} \right).$$

Napierin logaritmin LN ja luonnollisen logaritmin välille syntyy siten seuraava yhteys:

$$\text{LN}(x) = 10^7 \log_{1/e} \left(\frac{x}{10^7} \right) = 10^7 \ln \left(\frac{10^7}{x} \right).$$

Tätä muotoa hyväksi käyttäen on helppo todeta, että $\text{LN}(a \cdot b) = \text{LN}(a) + \text{LN}(b) - 10^7 \ln 10^7$, joten erityisesti $\text{LN}(a \cdot b) \neq \text{LN}(a) + \text{LN}(b)$. Napierin logaritmi ei siten toteuta modernien logaritmien keskeistä ominaisuutta. Koska kuitenkin on voimassa yhtälöt

$$\text{LN}(10^7 \cdot a \cdot b) = \text{LN}(10^7 \cdot a) + \text{LN}(10^7 \cdot b) \text{ ja}$$

$$\text{LN}(10^7 \cdot c^n) = n \cdot \text{LN}(10^7 \cdot c)$$

oli Napierin logaritmi erittäin käyttökelpoinen sovellettavaksi sen ajan trigonometrisiin laskuihin, olivathan trigonometrinen taulukoiden luvut kerrottuja 10^7 :llä. Se mikä edellä olevasta kannattaa vielä huomata, että Napierin logaritmin LN kasvaessa luonnollinen logaritmi ln vähenee, joten tässäkin mielessä Napierin logaritmi eroaa nykyisistä määrittämisistä.

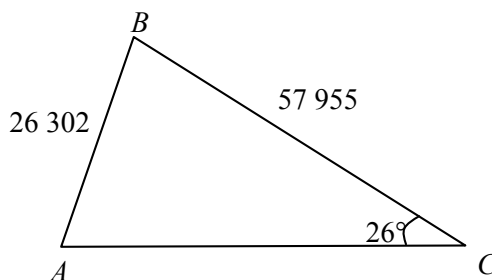
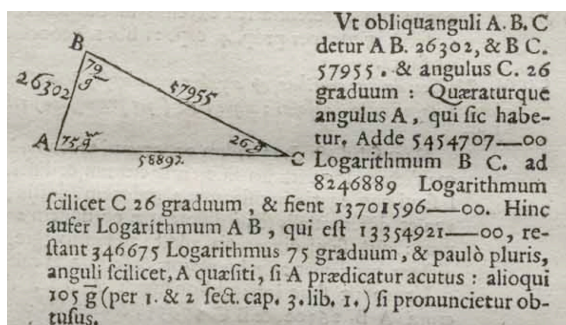
Luku e

Edeltävästä tarkastelusta saattaa saada sen käsityksen, että Napier olisi määrittänyt jatkuvan reaaliarvoisen funktion ja valinnut tarkoituksella kantaluvuksi luvun $1/e$ ja siten ennakoitunut luonnollisen logaritmin. Näin ei kuitenkaan ollut asianlaita, vaan hänen työnsä oli näistä mielenkiintoisista yhteyksistä huolimatta vain laskennallinen ja tarkoitettu pelkäsi laskennalliseksi apuvälineeksi. Itse asiassa Napierilla ei ole mitään muuta yhteyttä lukuun e kuin yhteinen nimi. Nimen Neperin⁷ luku ovat luvulle e antaneet jälkipolvet Napierin työtään kunnioittaakseen.

⁷ Kyseessä ei ole väärinymmärrys tai virhe, vaan Napierin nimen eräs kirjoitusasu on Neper.

Esimerkki Napierin logaritmin käytöstä

Tutustaan seuraavaksi esimerkkiin, joka löytyy Napierin kirjasta *Descriptio*.



Kuva 49. Napierin laatima esimerkki, jolla havainnollistetaan logaritmien käyttöä.

Suomennettuna Napierin teksti kuuluu jotenkin seuraavasti:

"Olko annettu teräväkulmainen kolmio ABC , jossa $AB = 26\,302$, $BC = 57\,955$ ja kulma $C = 26^\circ$. Kulma A tulee ratkaista, joka voidaan selvittää seuraavasti: Lisää sivun BC logaritmiin $5\,454\,707$ kulman 26° logaritmi $8\,246\,889$, jolloin saat tuloksen $13\,701\,596$. Etsi seuraavaksi logaritmi AB , joka on $13\,354\,921$ ja jäljelle jää $346\,675$, kulman 75° logaritmi."

Tästä lyhyestä katkelmasta jää hieman epäselvä kuva sinänsä täysin käyttökelpoisesta menetelmästä. Käydäänpä siis Napierin ohjeet vielä vaiheittain läpi.

Aluksi kolmioon ABC sovelletaan sinilauseetta, jonka mukaan

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A}, \text{ joten } \sin A = \frac{BC \cdot \sin C}{AB}.$$

Jotta voidaan selvittää kulman A suuruus on laskettavan yhtälön oikea puoli ja aivan ensimmäiseksi on selvittävä kertolaskusta $BC \cdot \sin C$. Tämä suoritetaan *lisäämällä yhteen* näiden lukujen logaritmit. Seuraavaksi on jaettava saatu tulo sivun AB pituudella. Tämä suoritetaan *vähentämällä* saadusta summasta luvun AB :n *logaritmi*. Saatu tulos on tietyn luvun (varsinaisesti tietyn sinin) logaritmi. Lopuksi etsitään tämä luku taulukosta, jolloin samalta riviltä voidaan lukea suoraan myös se kulma jonka sini tämä luku on. Kulma jota sini $346\,675$ vastaa on 75° .

Napier oli valinnut luvut ilmeisen hyvin, sillä myös taskulaskimella laskien tulokseksi saadaan $A = 75,00015\dots^\circ$ eli logaritmitaulukoilla saatu tulos on täsmälleen oikein. Taulukossa 6 on koottuna esimerkin luvut ja niitä vastaavat logaritmit.

Taulukko 6. Napierin esimerkin luvut ja logaritmit.

Luku eli sini	Logaritmi
5 795 500	5 454 707
$\sin 26^\circ$	8 246 889
$5\,795\,500 \cdot \sin 26^\circ$	13 701 596
2 630 200	13 354 921
$5\,795\,500 \cdot \sin 26^\circ / 2\,630\,200$	346 675

4.2.5. Henry Briggs ja kymmenkantainen logaritmi

Henry Briggs 1614

Napierin vuonna 1614 julkaisema kirja *Descriptio* sai välittömästi osakseen kiitosta ja suoranaista ylistystä. Hänen siinä esittelemänsä logaritmit otettiin käyttöön käytännöllisesti katsoen saman tien ympäri Euroopan. Hänen taulukkonsa todella lyhensivät laskentaan tarvittavaa aikaa. Logaritmien ensimmäisiä soveltajia olivat saksalainen Johannes Kepler, italialainen Bonaventura Cavalieri, ranskalainen Edmund Wingate ja englantilainen Henry Briggs. Briggs, Napierin työn suurin ihailija, toimi Lontoolaisen Gresham Collegien geometrian professorina siihen aikaan kun Napier julkaisi tuloksensa. Briggs ymmärsi välittömästi logaritmien mahdollisuudet tähtitieteessä ja navigoinnissa tarvittavien laskujen helpottajana, mutta havaitsi järjestelmässä myös parannettavaa. Briggs itse kertoo tästä:

"Minä, esitellessäni tätä oppia julkisesti Lontoossa, Gresham Collegessa, huomasin, että olisi tarkoituksenmukaisempaa, että täyden sinin logaritmi olisi 0 (kuten *Canon Mirificuksessa*), mutta täyden sinin kymmenesosan logaritmi tulisi olla 10 000 000 000. Tätä asiaa pohdittuani kirjoitin välittömästi kirjailijalle itselleen."

Briggs siis ehdotti, että $\log R = 0$ ja $\log (R/10) = 10^{10}$.

Yhteydenotto johti siihen, että Briggs matkusti vuosina 1615 ja 1616 tapaamaan Napieria. Vierailujen aikana Napier ja Briggs ystävystyivät, mutta he myös ryhtyivät miettimään yhdessä kuinka logaritmijärjestelmää voisi yksinkertaistaa ja parantaa.

Briggsinkään ehdottama uudistus ei olisi yksin tuonut logaritmeille sitä eleganttia yksikertaisuutta, mikä niillä nykyisin on, joten Napier ehdotti, että

"luvun yksi logaritmin tulisi olla 0 ja täyden sinin logaritmin 10 000 000 000"

eli että, $\log 1 = 0$ ja $\log R = 10^{10}$.

Tämäkään muutos ei ollut lopullinen, vaan Briggs paransi asteikkoa vielä yhdellä tärkeän muutoksen asettamalla, että $\log 10 = 1$. Tämä muutos jo ennalta sovitun $\log 1 = 0$ kanssa johti lopulta tuttuuhon 10-kantaisiin logaritmeihin, jotka nykyisin tunnetaan myös Briggsin logaritmeina. Tässä järjestelmässä luku L on annetun luvun N logaritmi, jos $N = 10^L$.

John Napier oli tässä vaiheessa jo niin iäkäs ja kihdin vaivaama, ettei enää jaksanut ryhtyä laskemaan uudistettuja taulukoita, vaan työ jäi Henry Briggsin harteille. Napier kuolikin jo vuonna 1617, jälkimmäistä tapaamista seuranneena vuonna, eikä edes ehtinyt nähdä uudistettuja taulukoita valmiina, vaan Briggsin laatima *Logarithmorum Chilias Prima* eli ("Johdatus logaritmeihin") ilmestyi vasta Napierin kuoleman jälkeen. Tässä teoksessa Briggs esitteli uuden 10-kantaisen logaritmijärjestelmän ja hän oli myös laskenut lukujen 1 – 1000 logaritmit 14 desimaalin tarkkuudella. Tämän jälkeen hän omistautui vuosikausiksi laskemaan laajempia taulukoita, jotka hän saikin valmiiksi vajaassa vuosikymmenessä ja julkaisi ne vuonna 1624 teoksessa *Arithmetica Logarithmica*, johon oli laskenut kokonaislukujen 1-20 000 ja 90 000-100 000 logaritmit neljäntoista desimaalin tarkkuudella. Puuttuvien lukujen logaritmit laski hollantilainen Adriaan Vlacq, joka julkaisi vuonna 1628 lukujen 1-100 000 10-kantaiset logaritmit kymmenen desimaalin tarkkuudella. Tästä eteenpäin, aina vuoteen 1924 saakka, nämä Vlacqin laatimat taulukot olivat lähes kaiken numeerisen laskennan pohjana. Vuonna 1924, logaritmien 300-vuotisen historian johdosta ryhdyttiin laskemaan uusia taulukoita kahdenkymmenen desimaalin tarkkuudella. Nämä taulukot valmistuivat vuonna 1949 muuttuen vain muutamassa vuosikymmenessä auttamattoman vanhanaikaiseksi.

Briggsin ja Napierin yhdessä hahmottelemassa järjestelmässä on voimassa puhtaan Napierin alkuperäinen ajatus eli kerto- ja jakolaskujen sekä juurten laskemisen helpottaminen, sillä tässä järjestelmässä, jota siis käytetään edelleen, on voimassa:

$$\begin{aligned}\log(a \cdot b) &= \log(a) + \log(b), \\ \log(a/b) &= \log(a) - \log(b) \quad \text{ja} \\ \log(a^n) &= n \log(a).\end{aligned}$$

Vaikka logaritmitaulukot ja niiden pohjalta laaditut laskutikut ovat nykyisin mu-seotavaraa, niin Napierin keksintö ei suinkaan ole käynyt tarpeettomaksi, sillä loga-ritmi- ja eksponenttifunktio ovat osa itse luontoa. Äänen intensiteetti, maanjäristys-ten voimakkuus ym. sovelluskohteet osoittavat, että tällä logaritmijärjestelmällä on edelleen suuri merkitys. Suurin merkitys matemaatikoille on tietenkin luonnollisel-la e -kantaisella logaritmilla, johon tutustumme seuraavaksi.

Henry Briggs (1561-1630)

Henry Briggs oli syntyperäinen englantilainen, kotoisin pikkukaupungista Yorkshiren maakunnasta, Pohjois-Englannista. Hän opiskeli kotikaupungissaan kreikkaa ja latinaa, kunnes kirjautui vuonna 1577, 16-vuotiaana, St. John's Collegeen Cambridgessa. Täältä hän valmistui ensin kandidaatiksi vuonna 1581 ja maisteriksi neljän vuoden kuluttua vuonna 1585. Tämän jälkeen Briggs jäi opettamaan tähän samaan col-legeen aluksi pelkkää matematiikkaa, mutta myöhemmin myös fysiikkaa ja tähtitiedettä. Vuonna 1596 Briggs valittiin aivan vastikään Lontooseen perustetun Gresham Collegen ensimmäiseksi matematiikan pro-fessoriksi. Vuonna 1619 hänet valittiin Oxfordin yliopiston ensimmäiseksi geometrian Savilian-professoriksi⁸.

Briggs oli Gresham Collegen professorina John Napier julkaistessa *Descriptionin* vuonna 1614. Hän ymmär-si heti logaritmien arvon ja mahdollisuudet tähtitieteen ja navigoinnin apuna ja paneutui tutkimaan ja kehit-tämään niitä. Maaliskuussa 1615 hän kirjoitti kirjeessä ystävälleen, että "Napier, Merchistonin lordi, on saattanut minun ajatuksen ja käteni työskentelemään hänen uusien ja ihailtavien logaritmiensa parissa. Toivon näkeväni hänet tänä kesänä, jos se on Jumalan mieleen, sillä en ole koskaan nähnyt kirjaa, joka olisi miellyttänyt ja ihmettyttänyt minua tätä enempää."⁹ Hän oli niin vaikuttunut työstä, että halusi tavata kasvatustien henkilön, joka oli ne keksinyt ja matkustikin Edinburghiin Merchistonin linnaan tapaamaan itseään John Napieria. Näiden kahden matematiikan historian merkkihenkilön tapaamisesta on talletettu värikäs kuvaus:

Eräs John Marr, oli matkustanut jo edeltä käsin Skotlantiin ollakseen paikalla näiden suuresti oppineiden miesten kohdates-sa. Herra Briggs ilmoitti edeltä päivän jolloin saapuisi Edinburghiin. Sovitun päivän saavuttua linnanherra Napier oli varma, ettei Briggs saapuisikaan: "Kas John, herra Briggs ei näyttäisi kuitenkaan saapuvan." Napier sanoi. Juuri tällä hetkellä linnan oveen koputettiin. John Marr kiiruhti ovelle todetakseen suureksi tyydytyksekseen, että Briggs oli saapunut. Hän johdatti Briggsin yläkertaan linnanherran kamariin. Kamarissa, hiljaisuuden vallitessa, nämä kaksi vain katselivat toisiaan suurella kunnioituksella lähes neljännestunnin ajan. Lopulta herra Briggs sanoi: "Herrani, olen lähtenyt tälle matkalle nähdäkseni teidät henkilökohtaisesti ja saadakseni kuulla, että millaisen neronleimauksen kautta tulit ensimmäisen kerran ajatelleeksi tätä astronomian loistavinta apua, nimittäin logaritmeja, mutta herrani, kun te olette ne keksineet, niin ihmettelen, ettei kukaan ole niitä aiemmin löytänyt, sillä nyt ne ovat niin yksinkertaisia." Hän viihtyi suuresti lordi Napierin luona ja joka kesä niin kauan kuin lordi oli elossa tämä kunnioitettava mies matkusti Skotlantiin vain tavatakseen hänet.¹⁰

Napier ja Briggs keskustelivat vierailujen aikana logaritmijärjestelmän parantamisesta ja yhteisesti sopien he lopulta päättivät luoda järjestelmän, jossa $\log 1 = 0$ ja luvun 10 logaritmi olisi jokin sopiva luku. Lopulta Briggs teki valinnan, että $\log 10 = 1 = 10^0$.

Ennen laajan logaritmitaulukoiden kirjan julkaisemista vuonna 1624 Briggs julkaisi, geometrian professorille sopivasti, Eukleiden *Alkeiden* kuusi ensimmäistä kirjaa vuonna 1620. Näiden lisäksi kolmas tärkeä Briggsin

⁸ Henry Savile oli geometrikko, raamatunkääntäjä ja maailmanmatkaaja, jonka Oxfordin yliopistolle lahjoittamalla va-roilla perustettiin 1619 kaksi hänen nimeään kantavaa professuuria. Toinen oli tähtitieteen ja toinen geometrian alalta.

⁹ Henry Briggs, Lontoolaisen Gresham Collegen geometrian professori, kirjoitti näin vuonna 1614 John Napierin kirjaa *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio* lukiessa (Smith II, s. 516 ja Dictionary of Scientific Biography,)

¹⁰ Lilly, s. 235-237

laatima teos oli *Trigonometria Britannica*, trigonometria kirja, joka sisälsi myös logaritmeja. Tämä tosin julkaistiin vasta kolme vuotta Briggsin kuoleman jälkeen vuonna 1633.

Aikalaiset ovat kuvailleet Briggsiä miellyttäväksi ja pidetyksi mieheksi. Hän vietti elämänsä viimeiset vuodet Oxfordissa, jossa kuoli vuonna 1630.

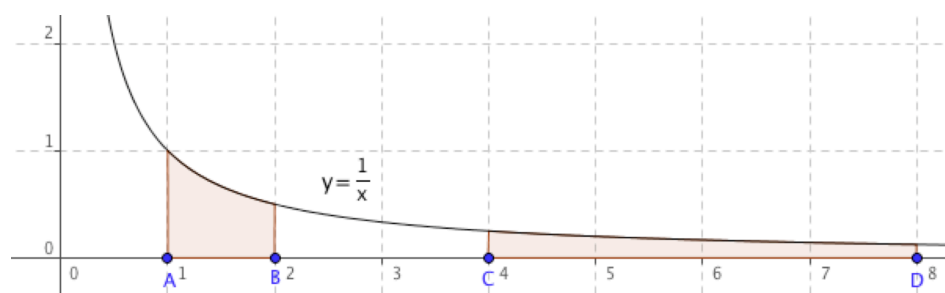
4.2.6. Logaritmin ja eksponenttifunktion yhteys

”Eräs tieteen historian suurimmista hämmästyksen aiheista on, että Napier kehitti logaritmit ennen kuin eksponentit olivat käytössä.”¹¹ kirjoittaa Carl Boyer. Kuitenkin nykyisin logaritmi määritellään nimenomaan eksponentteina. On kiinnostava osa matematiikan historiaa, että vasta sata vuotta logaritmien kehittämisen jälkeen pystyttiin näkemään selvällä tavalla meille niin ilmeinen eksponenttien ja logaritmien välinen yhteys.

St. Vincentiläinen

Belgialainen matemaatikko Gregory St. Vincentiläinen julkaisi vuonna 1647 kirjan *Opus geometricum circuli sectionum conic*. Aiheen kannalta keskeisin tulos on, että jos x -akselilla olevat pisteet $A(a, 0)$, $B(b, 0)$, $C(c, 0)$ ja $D(d, 0)$ sijaitsevat siten, että $b : a = d : c$, niin pinta-alat väleillä $[a, b]$ ja $[c, d]$ ovat yhtä suuret. Hänen maanmiehensä, jesuiitta Alfonso Antonio de Sarasan luettua Gregoryyn tekstiä muutamaa vuotta sen ilmestymisen jälkeen hän huomasi välittömästi, että pinta-aloilla on logaritmin ominaisuus.¹²

Hyperbelin pinta-alassa yhdistyy logaritmien lailla aritmeettinen ja geometrinen muutos: pinta-alat väleillä $[1, 2]$, $[2, 4]$, $[4, 8]$, $[8, 16]$ jne. ovat yhtä suuret, joten pinta-alojen kasvaessa aritmeettisessä suhteessa pinta-aloja rajaavat x -koordinaatit kasvavat geometrisessä suhteessa.



Kuva 50. Hyperbelin ja x -akselin rajaavat välille $[1, 2]$ yhtä suuren pinta-alan kuin välille $[4, 8]$.

¹¹ Cajori, History of Mathematics, s. 161

¹² $\log(b/a) = \log(b) - \log(a)$ ja $\log(d/c) = \log(d) - \log(c)$, joten jos $b : a = d : c$, niin $\log(b) - \log(a) = \log(d) - \log(c)$
erkki.luoma-aho@jkl.fi

Mercator

Hyperbelin rajaaman pinta-alan ja logaritmin välillä olevan yhteyden selvitti Nikolaus Mercator¹³ (1620-1687), joka kirjassaan *Logarithmotechnica* (1668) johti äärettömän sarjan avulla käyrän $y = 1/(1+x)$ pinta-alan. Mercator oli tutustunut munkki Sarasan kommentteihin St. Vincentiläisen töistä sekä John Walliksen (1616-1703) sarjoja koskeviin tutkimuksiin. Hän päätti yhdistää nämä tällöin vielä erilliset tulokset ja johtaa käyrän $1/(1+x)$ pinta-alalle lausekkeen sarjana. Hän myös käytti työssään termiä luonnollinen logaritmi, ensimmäisenä matemaattikkona. Mercatorin johti luonnolliselle logaritmillemme seuraavan summan:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots,$$

joka perustui sarjan

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

eräänlaiseen termeittäin tapahtuneeseen integrointiin. Tällöin ei vielä tunnettu analyysin yleisiä lainalaisuuksia, mutta erityistapauksissa matemaatikot osasivat johtaa pinta-aloille kaavoja.

Myös Newton oli kiinnostunut vastaavasta ongelmasta ja löysi tuloksen muutamia vuosia ennen Mercatoria, ilmeisesti vuonna 1665, mutta kuten usein muissakin vastaavissa tapauksissa, ei julkaissut löydöistään, joten sarja on nimetty Mercatorin sarjaksi.

Euler

Tarvittiin enää yksi matemaatikko, joka kietoi kaikki vielä hieman toisistaan irrallaan olevat narun päät yhteen yhtenäiseksi teoriaksi. Ja tämä henkilö oli tietenkin Leonhard Euler, joka yhdisti jo aiemmin käsitellyssä kirjassaan *Introductio* kaiken edeltävän tiedon logaritmeista yhteen ja määrittelee logaritmit nykyisellä tavalla eksponentteina. Kirjan luvussa VI Euler käsittelee eksponenttien ja logaritmien yleisiä ominaisuuksia ja merkintöjä määritellen seuraavasti:

Jos $y = a^z$, niin y on z :n funktio ... ja mikä tahansa arvo annetaan z :lle, niin y :n arvo saadaan määrättyä.¹⁴

Aivan samoin, kuten a :n ollessa vakio jokaiselle z :n arvolle voidaan määrätä y :n arvo, niin vastaavasti jokaista positiivista y :n arvoa kohti voimme määrittää z :n arvon siten, että $a^z = y$. Tätä lukua z , mikäli sitä pidetään y :n funktiona, kutsutaan y :n LOGARITMIKSI. Logaritmeista keskusteltaessa on oletettava, että a on jokin vakio, jota kutsutaan logaritmin kantaluvuksi. ... Tapana on merkitä luvun y logaritmia symbolilla $\log y$. Jos siis $a^z = y$, niin $z = \log y$.¹⁵

Mikä tahansa kantaluku valitaankin, niin $\log 1 = 0$, sillä jos yhtälöön $a^z = y$, joka siis vastaa yhtälöä $z = \log y$, sijoitetaan $y = 1$, niin saadaan $z = 0$.¹⁶

Euler oli lopulta nähnyt logaritmien syvimmän olemuksen ja yksinkertaistanut määritelmän nykyiseen muotoonsa. Logaritmi ei ollut enää pelkästään taulukosta katsottava ”keinotekoinen” luku, vaan jatkuva funktio. Lisäksi hän ymmärsi, että

¹³ Häntä ei pidä sekoittaa aikansa kuuluisimpaan kartografiin Gerardus Mercatoriin (1512-1594), joka esitteli edelleen yleisesti käytetyn oikeakulmaisen *Mercatorin projektion*.

¹⁴ Euler, s.77-78

¹⁵ Euler, s. 78

¹⁶ Euler, s. 79

kantaluvun ei tarvinnut olla 10, mihin oli Briggsin logaritmien myötä totuttu, vaan kantalukuja on itse asiassa äärettömän paljon, joskin hän toteaa tekstissään, että

"vaikka kantaluvun valinta riippuu vain valinnastamme, niin sen silti tulisi olla suurempi kuin luku 1^{17} .

Eulerin laatima esimerkki logaritmien soveltamisesta

Seuraava esimerkki on poimittu kirjasta *Introductio*:

Vedenpaisumuksen jälkeen koko ihmiskunta väheni vain kuuteen ihmiseen. Jos oletamme, että kaksi sataa vuotta vedenpaisumuksen jälkeen väestö olisi ollut 1 000 000, niin mikä olisi ollut vuosittainen väestönkasvu?

Ratkaisussaan Euler rakentaa ja ratkaisee hyvin tavanomaisen yhtälön, jossa $1/x$ kuvaa vuosittaista kasvukeroa:

$$\left(\frac{1+x}{x}\right)^{200} \cdot 6 = 1000000$$

$$\frac{1+x}{x} = \left(\frac{1000000}{6}\right)^{\frac{1}{200}}$$

$$\log\left(\frac{1+x}{x}\right) = \frac{1}{200} \log \frac{1000000}{6} = \frac{1}{200} \cdot 5,2218487 = 0,0261092$$

$$\frac{1+x}{x} = \frac{1061963}{1000000}$$

$$x = 16$$

Siten vuosittainen kasvu likimain kertoimella $1/16$ (noin 6 %) tuottaisi kahdessa sadassa vuodessa 1 000 000 ihmisen väestön. Esimerkin lopuksi Euler kuitenkin toteaa, että

"Maa ei voisi koskaan ylläpitää sellaista väestöä".

¹⁷ Euler, s.79

Logaritmi sarjana

Logaritmin ja eksponenttien yhteyden ohella Euler selkiytti myös sarjojen ja logaritmien yhteyden. Tätä olivat tosin Mercator ja Newton jo hieman tutkineet, mutta yhtenäisen aiheen käsittely puuttui, jonka Euler teki samaisessa kirjassaan *Introductio*. Hän johtaa sarjojen avulla lukuisia tuloksia, joista poimitaan vain aivan keskeiset eli lukua e koskettavat sarjat.

Eksponenttifunktio

Euler johtaa aluksia sarjakehitelmän yleiselle eksponenttifunktiolle a^z :

$$a^z = 1 + \frac{kz}{1} + \frac{k^2 z^2}{1 \cdot 2} + \frac{k^3 z^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{k^4 z^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots \quad (k \text{ on apumuuttuja}).$$

Luku e

Luku $e = 2,718\dots$ on Eulerin itsensä määrittelemä ja myös nimeämä. Tästä syystä lukua e nimitetään joskus myös Eulerin luvuksi. Kun Euler sijoittaa edelliseen sarjaan $k = z = 1$ hän saa sarjan

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots,$$

josta hän toteaa:

"Jos termit esitetään desimaalilukuina ja lasketaan yhteen saadaan arvo

$a = 2,71828182845904523536028\dots$. Kun tämä arvo valitaan kantaluvuksi, logaritmia on kutsuttava hyperboliseksi. Nimitystä on käytettävä, koska hyperbelin neliöinti¹⁸ voidaan esittää näitä logaritmeja käyttäen. Selkeyden vuoksi tätä lukua 2,718281828459... merkitään symbolilla e , joka kuvaa luonnollisen eli hyperbolisen logaritmin kantalukua."¹⁹

Sarja luvulle e^z

Euler johtaa myös e -kantaisen eksponentti- ja logaritmfunktion sarjakehitelmät.

"Olkoon e edellä mainittu luku. Tällöin

$$e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1 \cdot 2} + \frac{z^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{z^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots$$

ja luonnolliset logaritmit voidaan määrittää sarjoista

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \dots \text{ ja}$$

$$\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \frac{2x}{1} + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \frac{2x^7}{7} + \frac{2x^9}{9} + \dots \text{.}^{20}$$

¹⁸ Käyrän neliöinnillä tarkoitetaan pinta-alan määrittämistä, ts. $\int_a^b \frac{1}{x} dx = \ln b - \ln a$.

¹⁹ Euler, s. 97

²⁰ Euler s. 97

Kaiken kaikkiaan voitaisiin sanoa, että Euler loi logaritmifunktion, sillä ennen Euleria ei logaritmilla ollut lainkaan funktio-ominaisuuksia. Logaritmifunktiosta Euler on todennut, että se on ”kaikkein luonnollisin ja hedelmällisin käsite”. Myöhemmissä teoksissaan Euler johtaa myös eksponentti- ja logaritmifunktioiden derivointisäännöt.

LIITE Yksinkertainen logaritmijärjestelmä

Muodostetaan logaritmijärjestelmä, jonka kantaluku on 0,99 ja suoritetaan järjestelmän avulla muutamia esimerkkilaskuja.

Lasketaan aluksi taulukkoon luvut $0,99^0$, $0,99^1$, $0,99^2$, jne. aina eksponenttiin 50 saakka.

Jos joillekin luvuille b ja n on voimassa yhteys $b = 0,99^n$, niin sanotaan, että luku n on luvun b logaritmi. Esimerkiksi $0,99^{16} = 0,8515$, joten 16 on luvun 0,8515 logaritmi. Merkitään tätä $L(0,8515) = 16$.

Jos merkitään $a = k^n$, $b = k^m$ ja $c = a \cdot b = k^n \cdot k^m = k^{n+m}$, niin:

$L(a) = n$, $L(b) = m$ ja $L(c) = n + m$.

Koska $c = a \cdot b$, niin saadaan tärkeä muuntokaava

$$L(a \cdot b) = L(a) + L(b).$$

Taulukon ja muuntokaavan perusteella voidaan kertolasku $0,99 \cdot 0,77$ suorittaa seuraavasti:

$L(0,99 \cdot 0,77) = L(0,99) + L(0,77) = 1 + 26 = 27$, joten luvun $0,99 \cdot 0,77$ logaritmi on 27. Etsitään siis taulukosta luku, jonka logaritmi on 27. Tämä on 0,7623.

Yhdistämällä tulokset voidaan todeta, että $0,99 \cdot 0,77 = 0,7623$.

Jos suoritetaan kertolasku $0,86 \cdot 0,71$ joudutaan tekemisiin likiarvojen kanssa, sillä taulukosta ei löydy täsmälleen tarvittavia lukuja. Etsitään taulukosta lähimpänä olevien lukujen logaritmit eli $L(0,86) \approx 15$ ja $L(0,71) \approx 34$. Muuntokaavan perusteella $L(0,86 \cdot 0,71) \approx 49$, joten $0,86 \cdot 0,71 \approx 0,6111$, täsmälleen oikean tuloksen ollessa 0,6106.

Vastaavasti kertolasku $86 \cdot 71$ voitaisiin suorittaa etsimällä taulukosta lukuja 0,86 ja 0,71 lähinnä olevien lukujen logaritmit ja siirtää logaritmien summan avulla löydetyn luvun pilkkua yhteensä neljä kertaa ($2 + 2$), joten $86 \cdot 71 \approx 6111$, oikean tuloksen ollessa 6106.

Jos kantaluvuksi olisi valittu vaikkapa 0,9999, niin logaritmi 50 vastaisi tässä taulukossa lukua 0,9950. Näin lukujen 1,0000 ja 0,9950 välissä olisi 49 muuta lukua eli luvut olisivat huomattavasti tiheämmässä ja siten laskeminen tarkempaa. Napier käytti taulukoissaan kerrointa 0,9999999, joten hänen taulukkonsa riitti vaati-
viinkin laskuihin.

Taulukko 7. Logaritmitaulukko

luku	logaritmi
1,0000	0
0,9900	1
0,9801	2
0,9703	3
0,9606	4
0,9510	5
0,9415	6
0,9321	7
0,9227	8
0,9135	9
0,9044	10
0,8953	11
0,8864	12
0,8775	13
0,8687	14
0,8601	15
0,8515	16

luku	logaritmi
0,8429	17
0,8345	18
0,8262	19
0,8179	20
0,8097	21
0,8016	22
0,7936	23
0,7857	24
0,7778	25
0,7700	26
0,7623	27
0,7547	28
0,7472	29
0,7397	30
0,7323	31
0,7250	32
0,7177	33

luku	logaritmi
0,7106	34
0,7034	35
0,6964	36
0,6894	37
0,6826	38
0,6757	39
0,6690	40
0,6623	41
0,6557	42
0,6491	43
0,6426	44
0,6362	45
0,6298	46
0,6235	47
0,6173	48
0,6111	49
0,6050	50