

2. Analyttinen geometria

2.1 Johdanto

Analyttistä geometriaa pidetään nykyisin kahden ranskalaisen, René Descartesin (1596-1650) ja Pierre De Fermat'n (1601-1665) toisistaan riippumattomina itsenäisinä saavutuksina. Luonnollisesti kaikki se mitä nykyisin ajattelemme analyttisellä geometrialla ei syntynyt välittömästi 1600-luvun alun vuosikymmeninä, mutta keskeiset elementit olivat mukana jo ensimmäisissä aihetta käsitelleissä kirjoituksissa, Descartesin *La Geometriessä* ja Fermat'n *Ad locos planos et solidos isagogeissa*.

Se, kumpi oleelliset oivallukset teki ensimmäisenä ei ole aivan varmuudella tiedossa, mutta jonkinlainen hyvien arvausten ja päätelmien avulla aikaansaatu aikahaarukka on olemassa. Descartes julkaisi tuloksensa ensimmäisenä painetussa muodossa, teoksen *Metodin esitys* liitteessä *La Geometrie* vuonna 1637. Lisäksi tiedetään, että Descartesilla oli jo ainakin idulla uudet geometriaan liittyvät ajatuksensa 1620-luvulla. Ilmeisesti Descartes teki ratkaisevan oivalluksensa jopa jo vuoden 1619 marraskuussa¹. Koska lisäksi tiedetään, ettei Fermat ole voinut omata kaikkia tutkielmassaan käyttäneitä käsitteitä ennen vuotta 1635², niin Descartes olisi siten ollut ensimmäinen analyttisen geometrian kehittäjä. Näin siitäkkin huolimatta, että Fermat oli antanut oman aihetta käsitelleen käsikirjoituksensa isä Mersennen välityksellä matemaatikkoireille jo vuoden 1637 alussa, joitain kuukausia ennen kuin Descartes julkaisi *Metodin esityksen*. Mielenkiintoista on, että Descartes ja Fermat tekivät keksintönsä itsenäisesti 1600-luvun alkupuolella ja kirjoittivat aihetta käsitelleet tekstit suunnilleen samanaikaisesti toisistaan tietämättä³ ja myös julkaisivat tulokset samana vuonna.

Molempien analyttisen geometrian kehittäjän työ oli suoraa jatkoa Vièten ”analyysille”, mutta he lähestyivät aihetta hieman eri näkökulmista. Näkökulmien eron voi tiivistää seuraavasti: Descartes otti lähtökohdakseen käyrän ja johti sille yhtälön, kun taas Fermat lähti liikkeelle yhtälöstä, jota tutkimalla piirsi käyrän.⁴

Myös kirjoittajien lähtökohdissa oli eroa. Descartesille analyttinen geometria oli vain yksi sovellus hänen yleiselle tieteelliselle menetelmälleen. Lisäksi hänen matemaattinen uransa käytännössä päättyi *La Geometrien* julkistamisen jälkeisinä vuosina. Descartes ei pyrkinyt laatimaan järjestelmällistä johdantoa analyttisen geometrian perusteisiin, vaan ainoastaan demonstroimaan tieteellisen yleismenetelmänsä vahvuutta ja osoittaa sen ylivoimaisuus tieteiden kaikilla osa-alueilla, myös matematiikassa. Descartes ei mm. käsitellyt lainkaan yksinkertaisia käyriä.

Fermat puolestaan vasta aloitteli matemaattista uraansa ja kirjeenvaihtoa ranskalaismatematiikoiden kanssa. Hänen analyttistä geometriaa käsitellyt vain noin kymmensivuinen tutkielmansa oli ensimmäinen matemaatikkoireille lähetetty kirjoitus. Se oli Descartesin esitykseen verrattuna alkeellinen, mutta vastaavasti järjestelmällinen analyttisen geometrian perusteiden esitys, jossa hän käsitteli suoran, hyperbelin, paraabelin, ympyrän ja ellipsin yhtälöt.

¹ Forbes, s. 142

² Mahoney, *The Mathematical Career...*, s. 72-73

³ Struik *A Source*, s. 143

⁴ Boyer, *History of Analytic*, s. 101

erkki.luoma-aho@jkl.fi

Descartesin ja Fermat'n tekemät yhtäaikaiset itsenäiset keksinnöt eivät kuitenkaan olleet täysin riippumattomia toisistaan vaan niille on löydettävissä kolmas selittävä tekijä. Boyer on todennut, että yksinkertaisesti ”aika oli kypsä” keksinnölle.

Edellytykset, jotka 1600-luvun alussa täyttyivät liittyivät ensinnäkin matemaatikkojen yleiseen kiinnostukseen käyriä kohtaan, kohdistuen erityisesti Apolloniuksen kartioleikkauksia koskeneisiin kirjoituksiin. Toiseksi matemaatikot hallitsiva tällöin jo hyvin yhden muuttujan determinoidut yhtälöt ja sovelsivat niitä menestyksellinen geometrisiin probleemoihin. Seuraava luonteva askel oli ryhtyä käsittelemään indeterminoitujen yhtälöiden äärettömän monen ratkaisun joukkoa.

Mitä analyttinen geometria sitten on? Luultavasti mieleemme tulee ajatus, että analyttinen geometria sisältää ainakin toisiaan kohtisuorat koordinaattiakselit ja pisteiden merkitsemisen koordinaatistoon, pistejoukon yhtälön, käyrien piirron pisteittäin, erityisesti muodossa $y = f(x)$, käyrien yhtälöiden johtamisen sekä käyrien ominaisuuksien tutkimisen. Tässä mielessä ajateltuna Descartesin ja Fermat'n työt tuottavat pienen pettymyksen. Kumpikaan ei esittele tai käytä koordinaatistoa⁵, käyrät määritellään tai johdetaan pelkästään yhden akselin avulla. Molemmat käyttivät tietenkin kahta muuttujaa, mutta muuttujien geometrinen tulkinta oli janan pituus. Nämä janat piirrettiin toisiinsa nähden kiinteässä kulmassa, joka ei välttämättä ollut suora. Pistettä koordinaattien määrittämänä objektina ei ollut. Käyriä ei piirretty pisteitä laskien, toisen muuttujan suhteen ratkaistu muoto $y = f(x)$ ei ollut tavoiteltu tai käytetty. Mainituista viidestä kriteeristä siis vain kaksi viimeistä, mutta samalla kaksi tärkeintä, olivat selvällä tavalla läsnä ensimmäisissä analyttisen geometrian teksteissä.

2.2 Algebrallisen ajattelun syntyminen

Fermat ja Descartes olivat tärkeässä roolissa algebrallisen ajattelutavan vahvistumisessa. Antiikin Kreikan ajoista aina 1500-luvulle saakka matematiikan ajattelutapa oli geometrinen. Matemaatikkojen käyttämät menetelmät olivat pohjimmiltaan säilyneet kreikan matematiikan ajoista ennallaan. Vasta Vièten uusi algebra, *ars analytica* ja tämän algebrallisen analyysin soveltaminen geometriaan eli analyttisen geometrian synty ylitti kreikkalaisten saavutukset. Algebrallisen ajattelun syntyminen ja matematiikan algebrisoituminen 1500-luvun lopulta alkaen mahdollisti differentiaali- ja integraalilaskennan ja sitä kautta modernin matematiikan syntymisen. Mikä tärkeintä, kaikki matematiikan peruskäsitteet vapautuivat fyysiseen maailmaan ja geometriaan liittyvistä konnotaatioista: dimensio, avaruus tai reaaliluku eivät sisällä konkreettista tulkintaa⁶. Matematiikka oli muuttumassa abstraktiksi. Näin ei ollut vanhassa geometrisessa ajattelumaailmassa. Vieläpä Descartes, vaikka hän muuten torjuikin lausekkeiden ja yhtälöiden homogeneisuuden katsoi tarpeelliseksi huomauttaa, että esimerkiksi lausekkeesta $a^2b^2 - b$ voidaan ottaa kuutiojuuri, sillä lausekkeen ensimmäinen termi voidaan ajatella jaetuksi yksiköllä ja jälkimmäinen termi kerrotuksi kahdesti yksiköllä⁷.

⁵ Boyer, s. 76; Mahoney, *The Mathematical Career*, s. 82

⁶ Mahoney, *The Beginnings*, s. 2

⁷ Descartes, s. 299

2.3 Rene Descartes ja ensimmäinen painettu analyttisen geometrian esitys

Kehityskulkuja hieman yksinkertaistaen Descartesia voidaan pitää analyttisen geometrian tosiasiallisena perustajana, sillä se opittiin tuntemaan pelkästään Descartesin työn kautta. Itse asiassa useita vuosisatoja Descartesia pidettiin analyttisen geometrian ainoana kehittäjänä ja Fermat ohitettiin täysin. Kuitenkin tarkka tutustuminen Descartesin käytännössä ainoan matemaattiseen tekstinsä, *La Geometrien*, sisältöön ei vastaa odotuksia, jos sieltä etsii tuttua ”koordinaatistogeometriaa”. Etenkin paljon käytetty käsite *kartesinen koordinaatisto* on harhaanjohtava, sillä *La Geometriesta* ei yksinkertaisesti löydy suorakulmaista koordinaatistoa. Descartes ei myöskään käsittele yksinkertaisten käyrien eli mm. suoran, ympyrän ja paraabelin yhtälöitä. Ylipäätään hän ei, vaikka ymmärsi laatineensa aivan uudenlaisen ja tehokkaan menetelmän, vaivautunut laatimaan johdantoa tai peruskäsitteiden esittelyä. Niiden sijaan hän käyttää runsaasti sivuja erään hyvin vaikean Pappuksen ongelmana⁸ tunnetun geometrisen probleeman ratkaisuun. Hieman kärjistäen sanottuna Descartesille analyttinen geometria oli Pappuksen ongelman ratkaisun ”sivutuote”. Jopa sellainenkin arvio on esitetty, että Descartes kirjoitti *La Geometrien* vain jotta saattoi rehennellä keksinnöillään, ei siksi että olisi halunnut selittää ne toisillekin⁹.

Jälkikäteen on aina helppo arvioida ja osoittaa puutteita. Tosiasia ei kuitenkaan muutu: Descartesin *La Geometriesta* löytyi ja löytyy edelleen analyttisen geometrian kova ydin, geometrian ja algebran uudennainen yhteys. Tähän liittyen Descartes kirjoitti jo 1620-luvulla *Järjen käyttöohjeissa*, säännössä XVI, seuraavasti:

Ne seikat, jotka eivät vaadi mielen välitöntä keskittymistä mutta ovat johtopäätöksen kannalta välttämättömiä, on parempi esittää lyhyesti merkeillä kuin kokonaisina kuvioina. Näin muisti ei voi pettää, mutta samalla ajatus voi paneutua tekemään päätelmiä muista asioista, ilman että sen tarvitsee keskittyä näiden muistissa säilymiseen. ... Merkitsemme asiat muistiin lyhyesti merkeillä, jotta, ... voimme ... käydä ne kaikki läpi erittäin nopealla ajatuksen liikkeellä ja nähdä niistä mahdollisimman monta yhdellä kertaa. Siispä jokainen seikka, joka on ongelmana ratkaistaessa katsottava yhdeksi asiaksi, merkitään yhdellä ainoalla merkillä, joka voidaan keksiä mielivaltaisesti.

Tavallisen algebran harjoittajat koettavat ilmaista nämä useiden mittojen ja kuvioiden avulla; ensimmäistä he kutsuvat juureksi, toista neliöksi, kolmatta kuutioksi, neljättä bikvadraatiksi jne. Tunnustan, että nämä nimitykset ovat pitkään johtaneet minua harhaan. Janan ja neliön lisäksi en näet havainnut minkään voivan ilmetä kuvittelussani selvemmin kuin kuution ja muiden vastaavanlaisten kuvioiden. Niiden avulla sitä paitsi olin ratkonut varsin monia ongelmia. Pitkän kokemuksen jälkeen oivalsin kuitenkin lopulta, etten tätä ajattelutapaa noudattaen ole koskaan keksinyt mitään, mitä en olisi voinut tajuta huomattavasti helpommin ja selkeämmin ilmankin. Niinpä tulini siihen tulokseen että nämä nimitykset on syytä kokonaan hylätä, jotta käsitteet eivät mene sekaisin. Vaikka suuretta näet kutsuttaisiin kuutioksi tai bikvadraatiksi, sitä ei pidä koskaan kuvitella muuten kuin janana tai pintana edellisen säännön mukaisesti. Niinpä on erittäin tärkeää panna merkille, etteivät esimerkiksi juuri, neliö ja kuutio ole mitään muuta kuin peräkkäisiä suureita, joiden keskinäinen suhde on vakio.¹⁰

Siis jo yli kymmenen vuotta ennen *La Geometrien* kirjoittamista Descartes oli hylännyt ajattelustaan geometrian objektien tiukan sitomisen konkretiaan. Tuntemattoman suureen x kolmatta potenssia ei tulisi enää ymmärtää kuutiona, jonka särmän

⁸ ”Olkoon annettu $2n$ (tai $2n + 1$) suoraa, etsi niiden pisteiden käyrä, joiden n suorasta mitattujen etäisyyksien tulo on yhtä suuri kuin toisista n (tai $n + 1$) suorasta mitattujen etäisyyksien tulo.” Jo kreikkalaiset tiesivät, että kolmen ja neljän suoran tapauksessa käyrä on kartioleikkaus. Viiden käyrän tapauksessa syntyy kolmannen asteen käyrä. Boyer, *History of analytic geometry*, s. 27

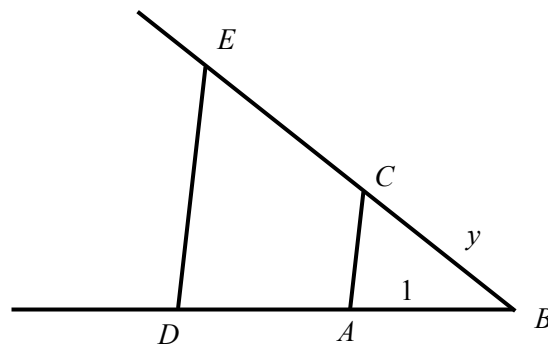
⁹ Stillwell, s. 106

¹⁰ Descartes, *Teokset I*, s. 105-107; alleviivaukset ovat tämän kirjan kirjoittajan lisäämät.

pituus on x , vaan osana geometrasta sarjaa $1, x, x^2, x^3, x^4, \dots$, jonka peräkkäisten jäsenten suhde on vakio: $1/x = x/x^2 = x^2/x^3 = \dots$. Descartes jatkaa ajatuskulkuaan *La Geometriassa* toteamalla sen avaussanoissa, että:

Jokainen geometrian probleema voidaan helposti muuntaa sellaisiksi lausekkeiksi, että ymmärrys tiettyjen suorien viivojen pituuksista on riittävä sen ratkaisemiseksi.¹¹

Perustellakseen väitettään Descartes esitteli *La Geometrien* alussa viiden tavanomaisen aritmeettisen operaation eli yhteen-, vähennys-, kerto- ja jakolaskun sekä neliöjuuren ottamisen geometriset vastineet. Erityisesti kertolaskun esittäminen janaan ja poikkesi aiemmasta käytännöstä, jonka mukaan kahden janan kertolasku kuvaa suorakulmion pinta-alaa. Descartes esitti janojen BD ja BC kertolaskun (kuva 18) lisäämällä puolisuoralle BD pisteen A siten, että $AB = 1$, yhdistämällä pisteet A ja C sekä piirtämällä AC :n kanssa yhdensuuntaisen janan DE , jolloin BE on kertolaskun lopputulos. Asiaa voi perustella esimerkiksi verrannolla merkitsemällä $BD = x$ ja $BC = y$, jolloin x suhtautuu lukuun 1 kuten EB lukuun y , joten $EB = xy$.



Kuva 18. Janojen BD ja BC kertolasku.

Tämä kekseliäs havainnollistus oli oleellisen tärkeä, koska sen avulla Descartes saattoi osoittaa geometrisesti, että kahden janan kertolaskun lopputulos on edelleen pituus ja prosessia toistamalla myös janan potenssi on edelleen pituus. Näin kahden muuttujan yhtälössä kaikki yksittäiset termit ovat pituuksia ja siten esitettävissä yksikköjanan moninkertoina.

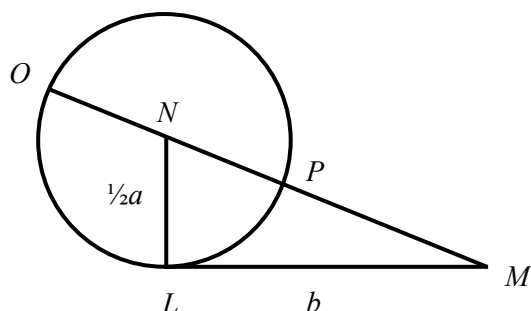
Tämän jälkeen Descartes uudisti jo aiemmin kirjoittamansa periaatteen koskien symbolismia:

Usein ei ole tarpeellista piirtää janoja paperille, vaan riittää merkitä kutakin yhdellä kirjaimella. Siten lisätäkseen jانات BD ja GH merkitsen toista a :lla ja toista b :llä ja kirjoitan $a + b$ Tässä on huomattava, että ilmaisuilla a^2 , b^3 ja vastaavilla minä tavallisesti tarkoitan vain yksinkertaisia janoja, joita kuitenkin nimitän neliöiksi, kuutioiksi, jne. jotta voin käyttää niitä algebrassa.¹²

Esittämällä aritmeettisille operaatioille geometriset vastineet Descartes asetti geometrialle ja analyttiselle algebralle täyden vastaavuuden. Tätä vastaavuutta hyväksi käyttäen hän ratkaisi hieman myöhemmin toisen asteen yhtälön $z^2 = az + b^2$ ympyrän ja suoran avulla. Hän piirsi suorakulmaisen kolmion LMN siten, että $LM = b$ ja $LN = \frac{1}{2}a$. Tämän jälkeen hän piirsi ympyrän, jonka keskipiste on N ja säde LN ja jatkoi hypotenuusaa MN siten, että se leikkasi ympyrän pisteessä O . Tällöin yhtälön ratkaisu on jana $OM = z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$.

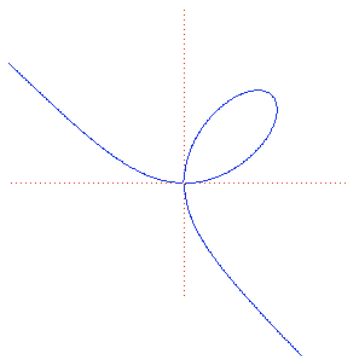
¹¹ *La Geometrie*, s. 2 (s. 297)

¹² Descartes, s. 298



Kuva 19. Toisen asteen yhtälön ratkaisun geometrinen tulkinta.

Descartes ei huomionut mitenkään ratkaisussaan yhtälön toista negatiivista juurta, jonka itseisarvo on PM . Descartesin lukukäsitteen rajoittuneisuus onkin eräs merkittävimmistä *La Geometrien* puutteista. Koska Descartesille muuttujat olivat aina janojen pituuksia, ei hän voinut hyväksyä niiden arvoiksi eli yhtälöiden ratkaisuiksi negatiivisia lukuja, kuten ei myöskään imaginaarilukuja. Negatiivisten lukujen puute rajoitti Descartesin käyrät koordinaatiston 1. neljännekseen. Hän ilmeisesti ymmärsi ainakin jollakin tasolla, että muuttujan eli janan negatiivinen arvo voisi merkitä kuviossa päinvastaista piirtosuuntaan muuttujan positiiviseen arvoon verrattuna, mutta ei hyödyntänyt tätä millään tavoin. Esimerkiksi vuonna 1638 esittelemäänsä käyrää $x^3 + y^3 = 3axy$ hän kutsui ”lehdeksi”, sillä muuttujien positiivisilla arvoilla se todella näyttää lehdeltä, vaikka tosiasiaassa käyrä on monimutkaisempi.



Kuva 20. Descartesin lehti.

Perusteltuaan algebran ja geometrian vastaavuuden ja esiteltyään toisen asteen yhtälön geometrisen ratkaisun ympyrän ja suoran avulla Descartes uppoutui koko ensimmäisen kirjan loppuosan ajaksi ratkomaan Pappuksen ongelmaa ja vasta *La Geometrien* toisessa kirjassa *Käyrien luonteesta* hän ryhtyy käsittelemään tarkemmin kehittämänsä metodia. Analyttisen geometrian ”peruslause” eli kahden muuttujan yhtälön ja käyrän välisen suhteen Descartes ilmaisi seuraavasti:

Minkään käyrän ratkaiseminen ei ole muuta kuin löytää piste, jonka täydellinen määrääminen yhdellä ehdolla on vajaa toisen ehdon ollessa sellainen, että kaikki pisteet yksittäisellä suoralla täyttävät sen. ... Kaikissa tällaisissa tapauksissa voidaan saavuttaa kahden muuttujan yhtälö, joka on täysin samankaltainen edellä löydettyjen kanssa.¹³

¹³ *La Geometrie*, s. 334-335
erkki.luoma-aho@jkl.fi

y :ksi ja toista x :ksi. Saadakseni yhteyden näiden suureiden välille minun täytyy huomioida myös tunnetut suureet, jotka määrittävät käyrän muotoa, kuten GA , jota kutsun a :ksi; KL , jota kutsun b :ksi; ja NL , GA :n kanssa yhdensuuntainen, jota kutsun c :ksi. Sitten sanon, että NL

suhtautuu LK :n, tai c b :n, kuten CB eli y BK :n¹⁵, joka on siten yhtä suuri kuin $\frac{b}{c}y$. Siten BL on

yhtä suuri kuin $\frac{b}{c}y - b$ ja AL on yhtä suuri kuin $x + \frac{b}{c}y - b$. Lisäksi, kuten CB suhtautuu

LB :n, tämä on kuten y suhtautuu $\frac{b}{c}y - b$:n, siten AG tai a suhtautuu LA :n tai $x + \frac{b}{c}y - b$.

Kertomalla verrannon toisen kolmannella saamme $\frac{ab}{c}y - ab$, joka on yhtä suuri kuin

$xy + \frac{b}{c}y^2 - by$, joka saadaan kertomalla verrannon ensimmäinen viimeisellä. Siispä vaadittu

yhtälö on $y^2 = cy - \frac{cx}{b}y + ay - ac$. Tästä yhtälöstä näemme, että käyrä EC kuuluu ensimmäiseen luokkaan ollen itse asiassa hyperbeli.¹⁶

Koska Descartesin muuttujat $x = AB$ ja $y = BC$ ovat tavanomaiseen xy -koordinaatistoon verrattuna vaihtaneet paikkansa ja lisäksi BC :n positiivinen suunta on tavanomaisesta poikkeava modernissa xy -koordinaatistossa vastaavan käyrän

yhtälö on $x^2 = -cx + \frac{c}{b}xy - ax - ac$.¹⁷

Descartesin tässä esimerkissä käyttämä menettelytapa on sama läpi koko *La Geometrien*. Hän aina ensin piirtää käyrän jollakin geometrisella menetelmällä ja vasta tämän jälkeen johtaa käyrän yhtälön. Käyrän pisteittäinen piirtäminen yhtälön perusteella ei kuulunut Descartesin geometriaan eikä hän hahmottanut ainuttakaan käyrää tällä meille tutulla tavalla. Hän kyllä ymmärsi, että indeterminoitu kahden muuttujan yhtälö kyllä yleensä aina esittää käyrää, mutta ei pitänyt pelkkää yhtälöä riittäväksi määritelmäksi käyrälle, vaan vaati aina ensin geometrisen konstruktion.¹⁸ Descartes teki eron ”yhdellä jatkuvalla liikkeellä” aikaansaadun eli geometrisen käyrän (mm. ympyrä, ellipsi, hyperbeli, paraabeli, jne.) ja mekaanisten eli kahdella tai useammalla yhtäaikaaisella liikkeellä aikaansaatujen käyrien välille (ns. transsendenttiset käyrät, kuten spiraali):

On huomionarvoista havaita, että on suuri ero tämän metodin¹⁹, jossa käyrä jäljitetään etsimällä useita pisteitä siltä ja sen, jota käytetään spiraalissa ja vastaavissa käyrissä.²⁰

Geometrisilla käyriillä oli erikoisasema, sillä

... kaikilla geometristen käyrien pisteillä, eli niillä, jotka ovat määritelty täsmällisellä ja tarkalla mittauksella, täytyy olla täsmällinen suhde kaikkiin suoran pisteisiin²¹ ja tämä suhde täytyy voida ilmaista yhden yhtälön avulla.²²

Käyrien yhtälöillä eli geometrian ja algebran yhteensovittamisella oli Descartesille Pappuksen ongelman ratkaisun lisäksi toinenkin päämäärä: yli toista astetta olevien

¹⁵ $\frac{NL}{LK} = \frac{CB}{BK} \Leftrightarrow \frac{c}{b} = \frac{y}{BK} \Leftrightarrow BK = \frac{b}{c}y$

¹⁶ *La Geometrie*, s. 321-322; Descartes luokitteli käyrät Pappuksen tapaan. Pappuksen käyttämä käyrien luokittelu, ks. alaviite sivulta 11.

¹⁷ Vaihdetaan y :n tilalle $-x$ ja x :n tilalle y .

¹⁸ *History of anal.*, s. 88

¹⁹ Descartesin analyttisen geometrian metodin, jossa käyrä muodostetaan geometrisesti.

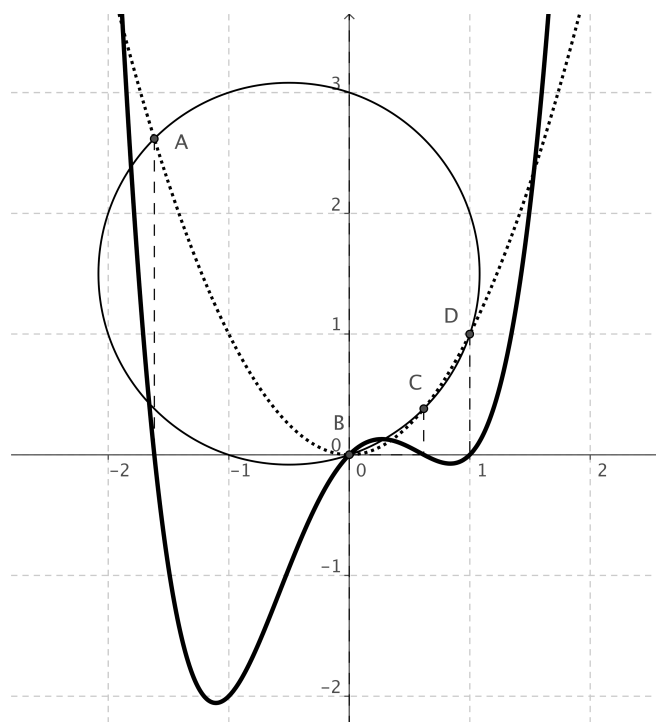
²⁰ transsendenttisissä käyrissä

²¹ eli jokainen käyrän piste voidaan ilmaista akselilla olevan pisteen avulla

²² *La Geometrie*, s. 319

erkki.luoma-aho@jkl.fi

yhtälön geometrinen ratkaisu eli leikkauspisteiden A , B , C ja D x -koordinaatit $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$, 0 , $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ja 1 ovat yhtälön $x^4 - 2x^2 + x = 0$ ratkaisut.



Kuva 23. Neljännen asteen yhtälön geometrinen ratkaisu kahden toisen asteen käyrän leikkauspisteiden avulla.

Merkitys

Descartes itse piti varmasti tärkeimpinä matemaattisina saavutuksinaan Pappuksen ongelman ratkaisua ja korkeamman asteen yhtälöiden ratkaisujen konstruointia toisen asteen käyrien eli kartioleikkausten avulla. Hänen *La Geometrien* tavoitteet eroavat siten siitä mihin tavanomaisesti analyttisen geometrian avulla pyritään. Onkin niin että matematiikan kehityksen kannalta ajateltuna hänen matemaattinen algebran ja geometrian yhdistänyt menetelmänsä oli lopulta *La Geometrien* tärkein anti, eivät sen sovellukset. Descartes päämääränsä saavuttaakseen yhdisti algebran ja geometrian toisaalta antamalla algebrallisille laskutoimituksille geometrisen tulokinnan ja toisaalta tekemällä kuviot tarpeettomiksi korvaamalla niiden käytön algebrallisilla operaatioilla. Descartes käynnisti matematiikassa reformin, joskaan ei osannut ennakoida mihin se johtaisi.²⁵

²⁵ Boyer, Descartes and the geometrization..., s. 390, 391
erkki.luoma-aho@jkl.fi

René Descartes (1596-1650)



Descartes syntyi 31.3. 1596. Hänen perheensä kuului virkamiesaatelisten säätyyn *noblesse de robe*. Descartesin äiti kuoli lapsivuoteeseen, kun René oli vuoden vanha. René joutui yhdessä sisartensa kanssa ensin väliaikaisesti, mutta muutamaa vuotta myöhemmin pysyvästi edesmenneen äitinsä sukulaisten huomaan hänen isänsä avioituttua uudestaan. René päätyi lopulta isoenonsa kasvatettavaksi.

Vuonna 1606 Descartes lähetettiin jesuiittojen ylläpitämään kouluun La Flècheen. Opinto-ohjelmaan kuului mm. klassisia kieliä, matematiikkaa, ja Aristoteleen metafysiikkaa.²⁶ Descartes oli melko kriittinen saamaansa koulutusta kohtaan, vaikka La Flèche oli tällöin yksi Euroopan kuuluisimmista kouluista, todeten mm. "etten tuntenut opintoyritysteni hyödyttäneen minua mitenkään"²⁷ ja että "filosofia antaa keinot, joilla voi puhua vakuuttavasti kaikista asioista ja herättää ihailua vähemmän oppineissa."²⁸

La Flèchen jälkeen Descartes jatkoi opintojaan Poitiersin yliopistossa lakia opiskellen. Hän sai tutkinnon valmiiksi vuonna 1616. Valmistuttuaan Descartes oli kuitenkin vielä liian nuori liittymään säätynsä edellyttämään lakitoimeen. Vuonna 1618 hän muutti protestanttiseen ja ilmapiiriltään vapaampaan Alankomaihin opiskellen mm. sotilasarkkitehtuuria. Alankomaissa hän tapasi Isaac Beeckmanin (1588–1637), joka rohkaisi Descartesia opiskelemaan matematiikkaa ja fysiikkaa. Beeckmanille Descartes kirjoitti jo vuonna 1619 ensimmäisestä tieteellisestä läpimurrostaan, aivan uudesta tieteestä. Tästä kehittyi myöhemmin analyttinen geometria.²⁹

Alankomaissa hän liittyi vapaaehtoisena Naussaun ruhtinas Morizin armeijaan ja vietti vuodet 1619-1628 kierrellen pitkin Eurooppaa eri armeijoiden mukana. Hän arvellaan osallistuneen mm. Prahan valloitukseen 1620 ja piipahtaneen ainakin Italiassa. Varsinainen sotilas hän ei kuitenkaan ollut ja tiedetään, että talven 1619 hän vietti pääasiassa saksalaisessa yläkamarissa mietiskellen kamiinan lämmössä uutta tieteellisen tiedon hankkimisen menetelmää. Eräs hänen keskeinen ajatuksensa oli epäillä kaikkea mitä siihen saakka oli opetettua auktoriteettien voimalla ja päinvastoin pyrkiä etsimään todellista tietoa itse mietiskellen. Yläkamarissa hän myös koki kolme enneunta, joiden kerrotaan ohjanneen ja rohkaissees Descartesia mietiskelyisään.

Mietiskelyjensä tulokset, Metodin, Descartes kuvaa teoksessa *Discours de la methode* (1637) eli *Metodin esitys*. Yhdessä noin 1628 valmistuneen, mutta vasta 1700-luvulla julkaistun *Järjen käyttöohjeiden* kanssa Metodin esitys on mielenkiintoinen matka filosofin ja matemaatikon pohdiskeluihin, joissa hän pyrkii luomaan uuden pohjan kaikille tieteille. Likimain kaikki Descartesin varsinaiset luonnontieteelliset väittämät, joihin hän päätyi Metodinsa avulla ovat toinen toisensa perään osoittautuneet paikkansa pitämättömiksi. Näistä erikoisimpia ovat väite, että sydämessä oleva tulen tapainen lämpö pitää verenkiertoa yllä ja väite, että ruumis ja mieli ovat yhteydessä toisiinsa käpyrauhasen välityksellä. Ainoa tuloksiltaan edelleen voimassa oleva tieteellinen työ on hänen lopulta ainoaksi matemaattiseksi julkaisukseen jäänyt *La Geometrie*. Descartesin merkitys onkin siinä, että hän ensimmäisenä ja vakuuttavalla tavalla nousi vallitsevaa ajattelutapaa vastaan. Kuuluisin Descartesin toteamuksista lienee ”Cogito, ergo, sum” eli ”Ajattelen, siis olen”. Tällä hän kuvasi sitä, että vaikka ihmisen tulee epäillä ja kaikkea ja kaikkia, jopa omia aistihavaintojaan, niin kuitenkin vähintään ajattelevan mielen tulee olla olemassa.

Vuonna 1649 Descartes muutti 1649 Ruotsin hoviin opettamaan kuningatar Kristiinaa ja avustamaan tätä tiedeakatemian perustamisessa. Descatesilla oli ollut läpi koko elämänsä tapana viettää aamulla useita tunteja sängyssä mietiskellen ennen varsinaista nousua päivään. Syynä tähän tapaan Descartes ilmoitti äidiltään periytyneen sairaalloisuuden. Aamuvirkku Kristiina vaati kuitenkin Descartesia nousemaan jopa aamuviideltä eikä sallinut hänen loikoilla puolille päiville sängyssään. Mahdollisesti aamun rasitukset ja Ruotsin talvi, ”jossa ajatuksetkin jäätivät” osoittautuivat liian raskaiksi Descartesille ja hän menehtyi 53-vuotiaana talvella 1650.

²⁶ EB

²⁷ Teokset I, s. 123

²⁸ Teokset, s. 123

²⁹ DSB, s. 51

2.4 Pierre de Fermat ja *Ad locos planos et solidos isagoge*

Descartes aloitti *La Geometrien* liittämällä aritmeettisille operaatioille vastaavuuden geometriassa. Fermat sen sijaan tarttuu käsikirjoitusmuotoon jääneessä, noin kymmensivuisessa kirjoitelmassa suoraan asiaan. *Ad locos planos et solidos isagoge*, jonka otsikon moderni käännös voisi olla: ”Ensimmäisen ja toisen asteen käyrät – johdanto” alkaa seuraavasti:

Ei ole epäilystäkään, etteivätkö useat muinaiset kirjoittajat olisi kirjoittaneet käyristä, näin todistaa Pappus, joka seitsemännen kirjansa alussa sanoo, että Apollonius on kirjoittanut tasokäyristä ja Aristaeus kappalekäyristä. Mutta minusta vaikuttaa, että heiltä käyrien opiskelu ei luonnistunut kovin helposti. Tämän päättellemme siitä, että useille käyrille he eivät antaneet riittävän yleistä käsittelyä. Tämä selkiytyy jäljempänä.

Alistamme siis tämän tieteen soveliaalle ja ainutlaatuiselle analyysille, jotta tästä eteenpäin avautuisi yleinen tapa opiskella käyriä.

Fermat’n ja Descartesin ajatuskulkuja verratessa huomio kiinnittyy samaan asiaan: tyytymättömyys kreikkalaisten tapaan käsitellä käyriä. Descartes esitti kritiikin selvemmin kuin Fermat, mutta molemmat jakoivat halun parantaa tältä osin antiikin saavutuksia. Fermat’lle ”sovelias” analyysi merkitsi luonnollisesti Vièten algebraa, jota hän ei pitänyt tarpeellisenä esitellä tarkemmin.

Tämän lyhyen johdannon ja motivaation jälkeen seuraavassa lausessa Fermat asettaa lyhyesti ja ytimekkäästi analyttisen geometrian keskeisen perustan. Hän ei mitenkään perustele tai pyri osoittamaan väittämänsä todeksi. Hänelle kyse on postulaatista:

Niin pian kuin lopullinen kahden muuttujan yhtälö ilmaantuu, niin syntyy ura³⁰ ja toisen muuttujan päätepiste määrittää suoran tai käyrän viivan³¹.

Boyer on todennut, että ”tämä lyhyt lause edustaa yhtä kaikkein merkittävimmistä toteamuksista matematiikan historiassa.”³² Lauseessa on erityistä se, että siinä Fermat esittää samalla sekä määritelmän että tekniikan. Fermat’n ajattelussa ”päätepiste” liikkuu tasossa yhtälön määräämänä muodostaen käyrän.

Tämän jälkeen Fermat jatkaa:

Suora viiva on laatuaan ainoa, mutta käyrien viivojen tyyppejä on äärettömästi: ympyrä, paraabeli, hyperbeli, ellipsi, jne. Milloin tahansa tuntemattoman muuttujan päätepiste piirtää suoran viivan tai ympyrän meillä on tasokäyrä. Milloin se piirtää paraabelin, hyperbelin tai ellipsin meillä on kappalekäyrä. Jos muita käyriä ilmestyy sanomme, että käyrä on lineaarinen³³. Emme lisää mitään tähän viimeiseen tapaukseen, sillä lineaarisen käyrän tutkimisen voi johtaa helposti taso- ja kappalekäyrien tutkimuksista.

Yhtälö on helposti muodostettu, kun kaksi tuntematonta suuretta asetetaan toisiaan vastaan tietyssä annetussa kulmassa, joka usein on suora, ja kun toisen sijainti ja loppupiste on annettu. Jos tällöin kumpikaan tuntemattomista suureista ei ylitä neliötä, on käyrä taso- tai kappalekäyrä, mikä selviää siitä mitä sanomme seuraavaksi.

³⁰ *locus*; olen käyttänyt sanoja ura ja käyrä synonyymeinä, tässä käännöksenä ura.

³¹ *lineam rectam aut curvam*

³² Boyer, History of Analytic Geometry, s. 75

³³ *locus linearis*; Pappuksen luokittelun mukaan suora ja ympyrä ovat tasokäyriä (*locos planos*), ne voidaan muodostaa harpin ja viivaimen avulla. Kappalekäyrät (*locos solidos*) ovat käyriä, jotka voidaan muodostaa kartioleikkauksina. Nämä ovat paraabeli, ellipsi ja hyperbeli. Lisäksi Pappuksella oli kolmaskin luokka, ”lineaariset käyrät”, jotka ovat modernissa luokittelussa kolmannen tai tätä korkeamman asteluvun käyriä. Pappuksen lineaarisuus ei siis liity mitenkään nykyiseen käsitykseen lineaarisuudesta. (mm. Struik, s. 145).

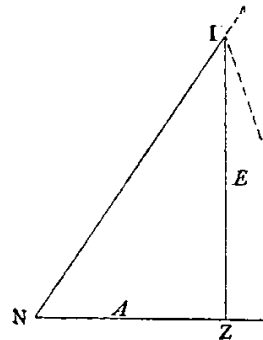
erkki.luoma-aho@jkl.fi

Tässä Fermat kuvaa kuinka yhtälöä ryhdytään muodostamaan. Periaate on sama kuin Descartesilla. Kaksi muuttujaa vastaavat kahta janaa. Toinen jana on ”akselilla” ja toinen, ns. ordinaatta, sijoittuu ensin mainitun janan jatkeeksi vakiokulmassa. Ensimmäisessä esimerkissään Fermat käsittelee suoran yhtälöä:

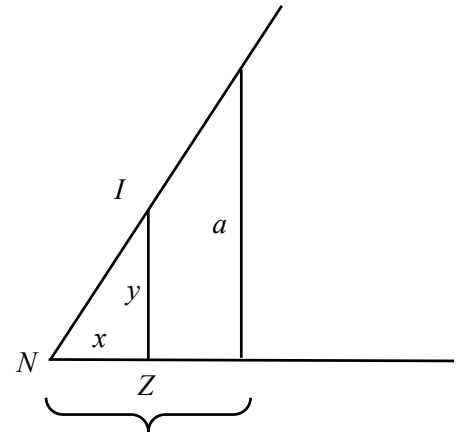
Olkoon NZM suora viiva tietyssä paikassa ja N suoran kiinteä piste. Olkoon NZ tuntematon suure A ja tietyssä kulmassa NZI oleva jana ZI toinen tuntematon suure E . Jos

D kertaa A on yhtä suuri kuin B kertaa E ,³⁴

niin piste I piirtää suoran viivan, sillä B suhtautuu D :hen kuten A suhtautuu E :hen. Koska suhde $A:n$ ja $E:n$ välillä on annettu ja koska kulma pisteessä Z on myös annettu, kolmion NZI muoto yhdessä kulman INZ kanssa on annettu.



Kuva 24.



Kuva 25. b

Esityksessä on merkittävä ero verrattaessa Descartesin *La Geometrien* logiikkaan. Fermat esittää ensin yhtälön $ax = by$ ja sitten ilmaisee yhtälön esittävän suuraa. Perustelu on nähtävissä kuvasta 25. Yhtälöstä Fermat kirjoittaa verrannon $b:a = x:y$, jonka vastine on aina kaksi yhdenmuotoista kolmiota. Siten janan E (kuva 24) eli y :n (kuva 25) päätepisteen I piirtämä ura on suora. Tarkkaan ottaen kyseessä on puolisuora, sillä Descartesin tapaan Fermat hylkää muuttujien negatiiviset arvot.

Vastaavalla tavalla, aina yhtälöstä käyrään edeten, Fermat johtaa kaikkiaan seitsemän erilaista tapausta:

- i) $ax = by$ (suora)
- ii) $xy = b$ (hyperbeli)
- iii) $x^2 + xy = ay^2$ (suora)
- iv) $x^2 = ay$ (paraabeli)
- v) $b^2 - x^2 = y^2$ (ympyrä)
- vi) $b^2 - x^2 = ay^2$ (ellipsi)
- vii) $b^2 + x^2 = ay^2$ (hyperbeli)

³⁴ $ax = by$

Tällainen perusteellisuus vastaa lähes nykyisenkaltaista oppikirjatasoa. Fermat tavoitteena lieneekin ollut esitellä kehittämänsä menetelmää toivoen saavansa palautetta muilta matemaatikoilta. Siksi oli tarpeen kuvata menetelmä mahdollisimman selvästi. Haittapuolena oli, että vaikka Fermat ymmärsi ja myös sen selvästi kirjoitti esillekin, että jokainen eri yhtälö määrittää jonkin uuden käyrän, hänen työstään niitä ei noussut esille yhtään, päinvastoin kuin Descartesilta.

Fermat ansioksi on kuitenkin luettava, että vain noin reiluun kymmenen sivun mittaiseen tekstiin hän sai mahtumaan analyttisen geometrian peruseriaatteen – käyrien ja kahden muuttujan yhtälöiden liiton, kattavan toisen asteen käyrien käsittelyn sisältäen ohjeet kuinka jokainen toisen asteen yhtälö voidaan palauttaa Fermat esittelemään seitsemään perustapaukseen. Se mikä *Johdannosta* puuttui oli sovellukset. Tämän puutteen hän korjasi pian *Isagogen* julkaisemisen jälkeen laatimassa liitteessä, jossa ratkaisi mm. yhtälön $x^3 + bx^2 = c^2b$ paraabelin $x^2 + bx = by$ ja hyperbelin $c^2 = xy$ leikkauspisteiden kautta.

Merkitys

Vaikka *Johdanto* levisikin käsikirjoitusmuodossa isä Mersennen välittämänä pariisilaismatemaatikoille, niin hieman myöhemmin kirjana ilmestynyt Descartesin *La Geometrie* jätti sen täysin varjoonsa. Koska Fermat kieltäytyi itsepäisesti julkaisemasta tuloksiaan, niin kun *Ad locos planos et solidos isagoge* lopulta julkaistiin postuumisti lähes puoli vuosisataa kirjoittamisen jälkeen vuonna 1679, oli se auttamatta sisällöltään alkeellinen ja merkinnöiltään kömpelö. Descartesin menetelmät olivat tällöin täysin hallitsevassa asemassa.

Toisaalta voidaan olla myös hyvillään siitä, että, että toinen kilpailijoista vetäytyi areenalta – tai oikeastaan ei edes astunut sinne. Olisiko tuloksena ollut yhtä ankara ja totinen kiista mikä syttyi Newtonin ja Leibnizin kannattajien välille koskien differentiaalilaskentaa jos Fermat olisi viitsinyt laatia aiheesta kokonaisen kirjan ja julkaissut sen samaan aikaan Descartesin kanssa? Fermat olisi ollut kykenevä sen tekemään, mutta hän ei nähnyt sitä vaivan arvoisena. Loppujen lopuksi hänelle matematiikka oli vain mukavaa ajanvietettä. Käsikirjoitusten suuritöinen hiominen kirjaksi ei kiinnostanut häntä.

Pierre de Fermat (1601-1665)



Pierre de Fermat oli kotoisin etelä-Ranskan pikkukaupungista Beaumont-de-Lomagnesta ja oli juuriltaan baski. Pierren isä oli varsin menestyvä kauppias. Hänen äitinsä Claire de Long oli aristokraatti ja häneltä Pierre peri arvonimen ja aseman *noblesse de robe* mikä takasi hänelle toimen parlamentin lakiasioiden neuvonantajana. Hänen sosiaalinen taustansa vaikutti luonnollisesti opiskeluihin ja uraansa. Fermat kävi peruskoulun paikallisessa Fransiskaanikoulussa. Yliopiston hän suoritti lakiopintoihin erikoistuneessa, kautta Euroopan tunnetussa, Orléansin yliopistossa. Pierre sai tutkinnon suoritettua kevääseen 1631 mennessä. Tällöin hän oli saavuttanut mm. laajan kielitaidon halliten sujuvasti ranskan, italian, espanjan, latinan ja kreikan kielet.

Vuonna 1631 Fermat osti Toulousista lakiasiaintoimiston parlamentin edesmenneen neuvonantajan leskeltä ja aloitti lakimiehen uransa parlamentin yhteydessä (*conseiller au Parlement, commissaire aux requêtes*). Samana vuonna hän myös avioitui äitinsä serkun kanssa. Avioliitosta syntyi kaikkiaan viisi lasta.

Fermat vietti mitä ilmeisimmin taloudellisesti varsin huoletonta elämää äitinsä suvulta perimänsä aseman ja parlamentin yhteydestä hankkimansa toimen turvin. Hän myös eteni urallaan hyvin, joskin väitetään, että urakehitys johtui pikemminkin kollegoiden korkeasta kuolleisuudesta kuin Fermat'n lahjoista lakimiehenä. Ilmeisesti hänen ei edes ollut omiaan alalla, mm. eräs raportti vuodelta 1644 antaa varsin huonon kuvan hänen suoriutumisestaan työtehtävissään.

Fermat'n uravalinta johtuikin enemmän suvun asemasta kuin luontaisesta taipumuksesta. Sen sijaan, että olisi ollut menestyvä lakimies, hän oli yhdessä Descarten kanssa aikansa Euroopan lahjakkain matemaatikko. E. T. Bell on värikkäällä tavalla nimennyt Fermat'n "harrastelijoiden prinssiksi". Harrastelija hän olikin, sillä hän ei julkaissut kuin yhden tutkielman koko elämänsä aikana. Hän toisaalta ylläpiti, silloin kun töiltään kykeni, laajaa kirjeenvaihtoa ja vaikutti varsinkin 1600-luvun alkupuoliskolla monilla tavoin matematiikan kehitykseen. Hän ei myöskään pyrkinyt pitämään itsellään tietoa keksinnöistään, vaan antoi auliisti ne muidenkin tietoon lähettämällä tutkielmiensa käsikirjoituksia osana kirjeenvaihtoa.

Mahoney, Fermat'n matemaattisen elämäkerran kirjoittaja, pitää hänen matemaattisena esikuvanaan ja opettajanaan Viétea, vaikka miehet eivät koskaan edes tavanneet; Viéte kuoli kaksi vuotta Fermat'n syntymän jälkeen. Väitetään Mahoney perustelee sillä, että Fermat, itseoppinut matemaatikko, sai matemaattisen peruskoulutuksensa perehtymällä Viéten julkaisemiin kirjoihin omaksuen täysin hänen ajattelunsa. Viéten analyyysin sisäistettyään hän sovelsi sitä menestyksellä Apolloniuksen tasokäyriin, lukuteoriaan ja todennäköisyyslaskentaan, jonka toisena perustajana Fermat'a pidetään yhdessä Blaise Pascalin kanssa. Lukuteorian tutkijana hän oli aikaansa edellä ja mm. Fermat'n suuri lause yhdessä kuuluisimman sivuhuomautuksen *Cuius rei demonstrationem mirabilem sane detexi hanc marginis exiguitas non capere* (Olen keksinyt väittämälle ihmeellisen todistuksen, mutta marginaalissa ei riitä sille tilaa) kanssa nousi tunnetuksi vasta hänen kuolemansa jälkeen. Työnsä vuoksi hän joutui 1640-luvulta alkaen vähentämään kirjeenvaihtoaan ja kun hän yritti vuosikymmeniä myöhemmin palata entisentapaiseen kirjeenvaihtoon tiedeyhteisön kanssa, oli hän jo hieman sivuraiteilla viimeaikaisesta kehityksestä. Se mikä oli 1600-luvun alkupuoliskolla uutta oli vuosisadan puolivälin jälkeen jo auttamatta vanhanaikaista. Hän ei mm. koskaan omaksunut tällöin jo laajaksi omaksuttuja Descartesin merkintöjä vaan pitäytyi loppuun saakka Viéten *ars analyticassa*. Koska hänelle matematiikka oli harrastus, hän tutki vain sitä mikä häntä itseään kiinnosti. Ja mm. juuri lukuteoria ei ollut hänen lisäksi kenenkään merkittävän matemaatikon kiinnostuksen kohde 1600-luvun loppupuoliskolla.

Kun Fermat'n paperit lopulta julkaistiin 1679, oli niillä enää historiallista kiinnostusta ja esimerkiksi analyttisen geometrian perustajana pidettiin pitkään yksinomaan Descartesia. Ujoksi herrasmieheksi kuvattu harrastelijamatemaatikko on saanut vasta myöhemmin sen arvostuksen, mikä hänelle kuuluu useiden matematiikan osa-alueiden alkuvaiheen pioneerina.

2.5 Descartesin ja Fermat'n jälkeinen aika

Vaikka analyttisen geometrian keksiminen laittoi alulle kehityksen, joka oli edesauttamassa mm. differentiaalilaskennan kehittymistä, ei muutos tapahtunut hetkessä. Fermat'n tutkielma ei luonnollisesti voinutkaan saavuttaa kovin suurta yleisöä ilman julkaisemista, mutta edes Descartesin työ ei levinnyt välittömästi kovin laajalle. Syynä oli pääasiassa hän itse. Työ oli vaikeaselkoinen ja hän esitti uuden menetelmänsä tärkeimmät osat kirjansa keskellä osana Pappuksen ongelman ratkaisua. Myös kirjoituksen kieli karsi osan potentiaalisista lukijoista. Descartesia on kritisoitu ylimielistä kirjoitustyylistä. Hänellä oli tapana jättää monia vaikeitakin välivaiheita kirjoittamatta, jotta ei veisi ”keksimisen iloa” lukijalta, kuten hän itse asian esitti. Descartesin menetelmästä vakuuttuneet matemaatikot ryhtyivät kuitenkin pian laatimaan johdanto- ja selitysteoksia *La Geometrie*lle.

Debeaune

Florimond Debeaune (1601-1652) julkaisi 1639 kaksi vuotta *La Geometrien* ilmestymisen jälkeen, ensimmäisen kommentaarin *Notes brèves*. Siinä Debeaune pyrki selvittämään Descartesin työn kaikkein vaikeimpia kohtia. Descartes on todennut, että hänen aikalaisista juuri Debeaune ymmärsi parhaiten *La Geometrien* sisällön³⁵. Debeaunen kommentaari levisi pääasiassa van Schootenin kääntämänä latinankielisenä versiona.

Van Schooten

Hollantilaisen Leidenin yliopiston matematiikan professorin Frans van Schooten (1615-1660) laatimasta *La Geometrien* latinankielisestä laitoksesta muodostui ehdottomasti vaikutukseltaan merkittävin yksittäinen teos, joka edisti Descartesin geometrian leviämistä. Kyseessä ei itse asiassa ollut pelkkä alkuperäisen tekstin käännös, vaan huolella valmistettu käännöksen ja useiden kommentaarien yhteisteos. Van Schootenin teos ilmestyi ensimmäisen kerran vuonna 1649, jolloin se sisälsi Debeaunen kommentaarin sekä van Schootenin laatiman laajan kommentaarin *Commentarii*. Teoksen suuri suosio innosti van Schootenin laatimaan laajennetulla kommentaarilla ja lisätyllä materiaalilla varustetun toisen painoksen, joka paisui lopulta kaksiosaiseksi järkäleeksi. Toisesta painoksesta, joka ilmestyi 1661 otettiin muuttamaton lisäpainos vuonna 1683. Vuonna 1695 ilmestyi vielä neljäs painos, jossa materiaalia oli taas laajennettu mm. Jacob Bernoullin huomautuksilla³⁶. Descartesin työ tuli lopulta tunnetuksi näiden van Schootenin latinankielisten kirjojen kautta. Van Schooten innosti myös oppilaitaan tutustumaan analyttiseen geometriaan. Heistä mm. Christian Huygens (1629-1695), Jan Hudde (1628-1704) ja Jan de Witt (1625-1672) osallistuivat alan tutkimukseen ja van Schooten sisällytti heidänkin tekstejään *Geometrian* toiseen painokseen.³⁷

De Witt

Jan de Witt laati 1600-luvun puolivälin aikoihin teoksen, jota on luonnehdittu ensimmäiseksi analyttisen geometrian oppikirjaksi. Tämä teos, *Elementa curvarum linearum*, valmistui jo 1649, mutta de Wittin valtiollisten tehtävien hoito viivästytti teoksen viimeistelyä lähes kymmenellä vuodella. Käsikirjoituksen painokuntoon saattamisessa suuren työn teki de Wittin opettaja ja hyvä ystävä van Schooten, joka

³⁵ DSB; Boyer, s. 107-108

³⁶ Grootendorst, s. 7

³⁷ Boyer, History of anal geom, s. 108-109; DSB; Grootendorst, s. 3
erkki.luoma-aho@jkl.fi

mm. tarkasti kaikki laskutoimitukset ja piirsi huolellisesti kirjan kuvat. Van Schooten liitti de Wittin *Elementan* osaksi *Geometrian* toista painosta.

De Wittin keskeinen motiivi oli vapauttaa kartioleikkaukset kartiosta. Hän kirjoitti kirjeessä vuonna 1658:

Pidin sitä täydellisesti vastoin luonnollista järjestystä, jota matematiikassa tulisi kunnioittaa niin paljon kuin mahdollista, etsiä näiden käyrien alkuperää kartiosta ja sitten siirtää ne ta-
soon.³⁸

De Witt johti kirjassaan paraabelille, ellipsille ja hyperbelille nykyisin tavanomaiset määritelmät liikkuvan pisteen urina viittaamatta mitenkään kartioon. De Witt antoi paraabelille johtosuora-polttopiste määritelmän sekä ellipsille ja hyperbelille määritelmät kahdesta polttopisteestä mitattujen etäisyyksien summan ja erotuksen kautta. Lisäksi hän osoitti, että ensimmäisen asteen yhtälö esittää suoraa. Näin jo 1600-luvun loppupuoliskolla analyttisen geometrian peruskäyrät olivat saaneet nykyisen esitysasun. De Witt pitäytyi edelleen yksiakselisessa järjestelmässä sekä muuttujien x ja y positiivisissa arvoissa.³⁹

Jan de Witt (1623-1672)



Jan (joidenkin lähteiden mukaan Johan) de Witt oli kotoisin Dordrechtin kaupungista Hollannista. Hänen isänsä Jacob oli kaupungin pitkäaikainen pormestari. Jan sai latinankielisen peruskoulutuksen Dordrechtissä. Hän opiskeli lakia Leidenin yliopistossa sekä matematiikkaa professori van Schootenin yksityisoppilaana. Van Schooten ohjasi de Wittin opiskelemaan erityisesti Descartesin algebran ja geometrian perusteet. De Witt osoittautui taitavaksi matemaatikoksi, mutta juurikaan löytänyt aikaa paneutua siihen kunnolla. Christian Huygens, de Wittin maanmies ja myös van Schootenin oppilas, kirjoitti kirjeessään englantilaiselle John Wallisille, että jos de Witt olisi saanut keskittyä matematiikkaan olisi hän ylittänyt heidän kaikkien saavutukset. Tieteen sijasta de Wittin elämäntyö oli politiikassa. Hän nousi osittain isänsä maineen varjolla jo nuorena, noin 30-vuotiaana, maansa pääministeriksi. Hän osoittautui näissä tehtävissä erittäin kyvykkääksi ja hänet valittiin tehtävään uudestaan useita peräkkäisiä kertoja.

De Witt luotsasi maataan useiden sotien lävitse ja pystyi siitä huolimatta takaamaan Alankomaille vakaan taloudellisen kehityksen. Hänen aikanaan Alankomaat nousi Euroopan merkittävimpien ja vauraimpien valtioiden joukkoon. Vuonna 1672 Englannin ja Ranskan hyökättyä maahan de Wittin vastustajat organisoivat mielenosoituksen. Väkijoukko ylti lopulta väkivaltaiseksi, karkasi de Wittin päälle murhaten hänet ja hänen veljensä käytännössä repimälle heidät kappaleiksi. Nykyisin de Witt arvostetaan erääksi maansa merkittävimmistä valtiomiehistä.

Newton

1600-luvun loppupuoliskolla matemaatikoiden innostuksen ja kiinnostuksen valtasi juuri keksitty infinitesimaalinen analyysi. Englannissa Newtonin johdolla ja manner-Euroopassa Leibnizin sekä myöhemmin myös Bernoullien johdolla ajan parhaat voivat keskittyivät kehittämään differenti- ja integraalilaskentaa. Analyttinen geometria sellaisenaan jäi uuden ja innostavan menetelmän varjoon, joskin Descartesin ja Fermat'n tutkielmien keskeinen käsite eli käyrä säilyi edelleen tutkimuskohteena.

³⁸ Grootendorst s. 4

³⁹ DSB; Grootendorst; Boyer anal, s. 114-117

Sir Isaac Newton (1642-1727) laati ilmeisesti jo vuonna 1676 puhtaan analyttisen geometrian tutkielman, jonka hän uudisti 1695. Newton on tunnettu siitä, että hän Fermat'n tapaan suorastaan panttasi uusia keksintöjään ollen hyvin vastahakoinen julkaisemaan mitään. *Enumeratio linearum tertii ordinis*⁴⁰ julkaistiin lopulta teoksen *Opticks* liitteenä vuonna 1704.

Kuten tutkielman nimestä voi päätellä Newton luokitteli järjestelmällisesti kaikki kolmannen asteen käyrät. Tähän saakka niistä käsitelty vain tiettyjä erikoistapauksia, kuten Descartesin lehteä ($x^3 + y^3 = 3axy$) ja Diokleen kissoidia ($y^2 = \frac{x^3}{2a-x}$).

Kiinnostuksen kohteena ja tutkielmien pääasiallisena sisältönä oli ollut tähän saakka toisen asteen käyrät eli kartioleikkaukset. Newton siirsi siten käyrien tutkimisen uuteen vaiheeseen, sillä korkeamman asteen käyrät eivät kuuluneet kreikkalaisen klassisen matematiikan sisältöön.

Newton jakoi käyrät kaikkiaan 72 eri luokkaan. Luokittelun lisäksi hän hahmotteli pisteittäin tiettyjä keskeisiä käyriä. Newton siis lähestyi käyriä Fermat'n tavalla eli lähtökohtana hänellä olivat yhtälöt. Newtonin käsittelyssä uutta oli myös se, että *Enumeratio* on ensimmäinen tutkielma, jossa käytetään sekä positiivisia että negatiivisia koordinaatteja.

Newton käytti luokittelun pohjana leikkauspisteitä suoran kanssa yhdistäen leikkauspisteiden lukumäärän ja yhtälön asteluvun. Newtonin käyttämät abskissa (*abscissa*) ja ordinaatta (*ordinata*) vastaavat likimain nykyterminologian x - ja y -koordinaattia.⁴¹ Newton otti ensimmäisenä käyttöön kaksiakselisen järjestelmän, joskin akselit yleisesti oletettiin olevan vinossa kulmassa toisiinsa nähden.⁴² Luokittelusta hän toteaa kirjansa avaussanoissa näin:

Geometriset käyrät on parasta jakaa järjestyksiin⁴³, abskissan ja ordinaatan välisen yhtälön dimension mukaan, tai, mikä on sama asia kuin, kuinka monta kertaa ne voivat leikata suoran viivan. Niin siis ensimmäisen järjestyksen käyrät ovat suoria; ne jotka ovat toista järjestystä ovat kartioleikkauksia ja ympyröitä; ne jotka ovat kolmatta järjestystä ovat kuutioparaabeli, Neilian paraabeli, muinaisten kissoidi ja muut jotka tulemme kuvailemaan. Ensimmäisen suvun⁴⁴ käyrät (koska suoria ei lueta käyrien joukkoon) ovat samoja kuin toisen järjestyksen käyrät ja toisen suvun käyrät ovat samoja kuin kolmannen järjestyksen käyrät. Infinitesimaalisen järjestyksen käyrä on sellainen, jonka suora voi leikata äärettömän monessa pisteessä, kuten spiraali, sykloidi, quadratrix ja jokainen käyrä, joka on saanut syntynsä säteen rajattomasta pyörimisestä.⁴⁵

Muutaman sivun jälkeen Newton aloittaa varsinaisen luokittelun jakamalla toisen suvun eli kolmannen asteen käyrät ensin neljään tapaukseen ja sitten vielä tarkemmin kaikkiaan 72 erilaiseen lajiin⁴⁶. Esimerkiksi ensimmäisessä tapauksessa yhtälö on $xy^2 + ey = ax^3 + bx^2 + cx + d$, missä a, b, c, d ja e ovat "annettuja suureita" eli parametreja.

⁴⁰ Hyvin vapaasti sumennettuna: *Kolmannen asteen käyrien luokittelu*.

⁴¹ Abskissa oli yksiakselisessa järjestelmässä "origosta" referenssisuoraa pitkin vedetty jana ja ordinaatta oli abskissan päätepisteestä kohtisuoraan tai jossakin muussa vakiokulmassa piirretty jana, jonka päätepiste määräsi käyrän. Abskissa oli sanana vanha ja se omaksuttiin jo varhain analyttisen geometrian sanastoon.

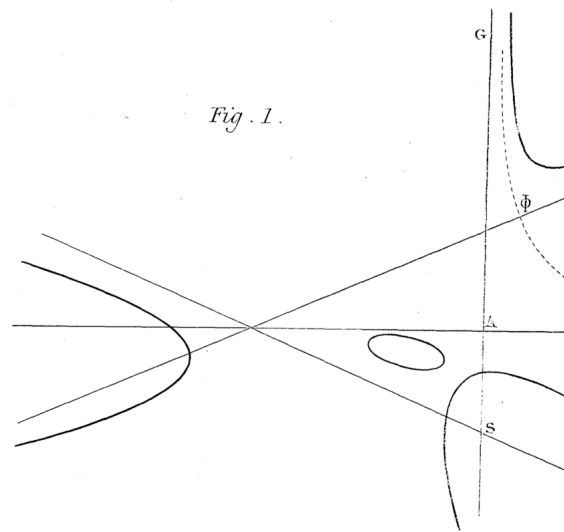
⁴² Boyer, s. 139

⁴³ ordines

⁴⁴ generis

⁴⁵ Talbot, s. 7

⁴⁶ species



Kuva 26. Käyrän $xy^2 + ey = ax^3 + bx^2 + cx + d$ kuva kirjassa *Enumratio*.

Newton käsitteli muissakin teoksissa analyttistä geometriaa, joko yhtenä tai ainoana aiheena. Eräs näistä, postuumisti vuonna 1779 piispa Samuel Horsleyn julkaisema *Geometria analytica sive specimina artis analyticae*, on kiinnostava, sillä tämän tutkielman nimessä esiintyy ensimmäisen kerran ”analyttinen geometria” likimain nykyisessä merkityksessä.⁴⁷

Euler

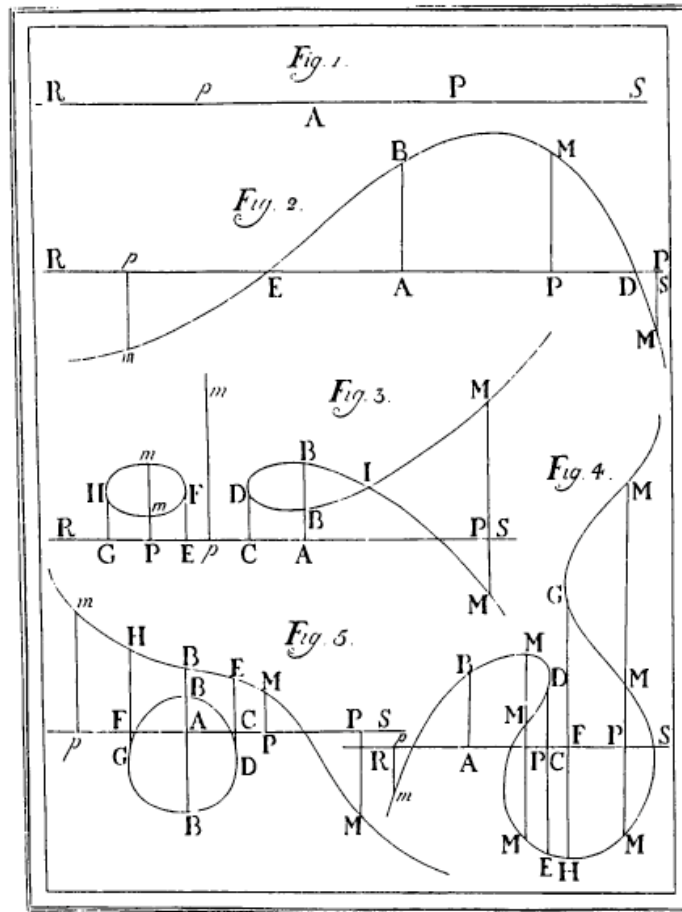
Vuotta 1748 on sanottu analyttisen geometrian kehityksen kannalta yhtä tärkeäksi kuin vuotta 1637.⁴⁸ Syy tällaiseen luonnehdintaan on Leonhard Eulerin (1707-1783) julkaisemassa kirjassa *Introductio in analysin infinitorum* (1748). *Introductio* on kaksiosainen laaja teos ja tulemme myöhemmin käsittelemään sen ensimmäistä osaa, jossa Euler mm. määrittelee funktion. *Introductionin* toinen osa keskittyy analyttiseen geometriaan ja funktioiden kuvaajien piirtoon. Euler aloittaa kirjan yleisesti käyriin liittyen. Hänkin asettaa edelleen vain yksiakselisen järjestelmän, mutta määrittelee muuttujat etumerkillisinä (kuva 27):

Me esitämme x :n positiiviset arvot merkitsemällä välejä oikealle pisteestä A ja negatiiviset arvot väleillä vasemmalle pisteestä A Koska äärettömän pitkä suora esittää muuttujaa x , haluaisimme nähdä kuinka x :n funktio olisi kaikkein sopivinta esittää. Olkoon y x :n funktio niin, että y saa tietyn arvon, kun jokin tietty arvo liitetään x :n. Kun olemme valinneet suoran RAS ilmaisemaan x :n arvoja, valitsemme jokaiselle määrätylle x :n arvolle vastaavan välin AP ja sitten pystytämme kohtisuoran välin PM vastaamaan y :n arvoa. Jos y :n arvo on positiivinen, niin PM on suoran RS yläpuolella, jos y on negatiivinen, niin PN on kohtisuoraan suoran alapuolella.⁴⁹

⁴⁷ Boyer, Anal., s. 141

⁴⁸ Boyer 180

⁴⁹ Euler, Introductio II, s. 4



Kuva 27. Kuvitusta Eulerin kirjasta *Introductio in analysin infinitorum*

Vaikka Euler ei nimellisesti käytäkään kahta akselia, niin käytännössä hänen esityksensä ei eroa nykykäytännöstä enää mitenkään. Piste A on origo, josta muuttujan x arvot mitataan etumerkillisinä vasemmalle tai oikealle. Muuttuja y saa arvonsa muuttujan x funktiosta eli $y = f(x)$, joten meille tavallinen ”pisteiden taulukointi” oli työkalu myös Eulerille. Tätä hän painottaa mm. kirjoittamalla:

Tällä tavoin käyrä, joka on funktion y seurauksena on täysin tunnettu, sillä jokainen sen pisteistä määräytyy funktion y kautta. ... Tästä seuraa, että käyrällä ei ole yhtään pistettä, joka ei ole määrätynyt funktion y kautta.⁵⁰

Euler piirsi käyrät pisteiden avulla, kun vuosisata aiemmin Descartes näki käyrien syntyvän geometrisesti ”yhden yhtenäisen jatkuvan liikkeen” aikaansaamana. Eulerin lähestymistapa on siis lähempänä Fermat’n ja Newtonin kuin Descartesin lähestymistapaa:

Vaikka moni erilainen käyrä voidaan kuvata mekaanisesti jatkuvasti liikkuvana pisteenä ja kun tämä on tehty koko käyrä voidaan nähdä silmin, silti me ajattelemme näidenkin käyrien alkuperän olevan funktioissa ...⁵¹

Euler luokitteli käyrät Leibnizin esittelemien termien algebrallisiin ja transsendenttisiin sen mukaan voidaanko y :n ilmaista x :n algebrallisena vain transsendenttisena funktiona:

⁵⁰ Euler, *Introductio* II, s. 5

⁵¹ Euler, *Introductio* II, s. 5-6

Käyrä on algebrallinen, jos ordinaatta y on abskissan x algebrallinen funktio... tällaista käyrää on totuttu kutsumaan geometriseksi. Transsendentaalinen käyrä on sellainen, joka voidaan ilmaista $x:n$ ja $y:n$ transsendentaalisella yhtälöllä.⁵²

Algebrallisten käyrien luokittelun pohjana Euler käyttää Newtonin esimerkin mukaan yhtälön astelukua. Toisen asteen käyrien tarkastelun Euler aloittaa yleisestä muodosta $\alpha y^2 + \beta yx + \gamma x^2 + \delta y + \epsilon x + \zeta = 0$. Hän kirjoittaa yleisesti liittyen toisen asteen käyriin:

Nämä ovat käyristä yksinkertaisimpia ja niillä on laajimmat sovelluskohteet kautta koko sofistikoituneen geometrian. Näillä käyrillä, joita kutsutaan myös kartioleikkauksiksi on joitain varsin merkittäviä ominaisuuksia, joista osa tunnettiin jo antiikin aikana ja joista osa on tullut valoon aivan viime aikoina. Tieto näistä ominaisuuksista on arvioitu niin tärkeäksi että hyvä joukko kirjailijoita käsittelee tätä materiaalia geometrian perusteiden yhteydessä. Kuitenkaan kaikkia näitä ominaisuuksia ei voida johtaa yhdestä periaatteesta. Jotkut ovat selviä välittömästi yhtälön perusteella, toiset ominaisuudet nousevat kartion leikkaamisesta ja jotkut riippuvat vielä muista perusteista. Me tutustumme täällä vain niihin ominaisuuksiin, jotka seuraavat suoraan yhtälöstä.⁵³

Euler käsittelee Descartesin tapaan hieman yhtälöiden rakentamista ja graafista ratkaisua, mutta ei anna sille juurikaan painoa, vaan toteaa käsittelyn lopuksi, että tämä on pelkkä kuriositeetti eikä lainkaan hyödyllistä. Näin siis sadan vuoden kuluessa eräs koko karteesisen geometrian päämääristä, yhtälön graafinen ratkaiseminen kahden tasokäyrän leikkauspisteiden avulla oli muodostunut vain kiinnostavaksi sivujuonteeksi vailla hyötyä.

Kaiken kaikkiaan Eulerin käsittelee analyttisen geometrian sekä algebrallisten ja transsendenttien funktioiden kuvaajien teoriaa hyvin laajasti, kaikkiaan 22 kappaaleen ja useiden satojen sivujen verran. Merkittävämpää kuin käydä läpi koko Eulerin laajan teoksen sisältä on todeta, että siinä Euler antoi ensimmäisen täysin analyttisen, systemaattinen ja yleisen käsittelyn analyttiselle geometrialle. *Introduction* sopisi vaikka valita soveltuvien osien teoriaisuus analyttisen geometrian kurssin oppikirjaan niin sisältönsä kuin merkintöjensäkin puolesta.

Cramer

Eulerin *Introductionissa* analyttinen geometria ”kasvoi aikuisuuteen”. Ainoastaan tavanomainen koordinaatisto odotti vielä tuloaan, muilta osin peruskäsitteet olivat kunnossa. Tosin kahden akselin järjestelmä on osittain enää tekninen uudistus. Ensimmäisen kerran kahta akselia käytti sveitsiläinen Genevestä syntyisin ollut matemaatikko Gabriel Cramer teoksessaan *Introduction d'analyse des lignes courbes algébriques* (1750). Erikoista teoksessa on, että vaikka se ilmestyi Eulerin *Introduction* jälkeen, ei siinä ole lainkaan vaikutteita Eulerilta. Cramer itse arveli, että jos Eulerin teos olisi ilmestynyt hieman aiemmin olisi se ollut hyvin hyödyllinen hänen kannaltaan. Nyt Cramer kuitenkin viittaa vain mm. Newtoniin. Kahden akselin esiintymisen lisäksi toinen asia, mistä Cramerin kirja on hyvä muistaa, on edelleen käytössä oleva Cramerin sääntö⁵⁴, jonka hän esittelee tässä teoksessa. Sääntö oli ollut ilmeisesti jo mm. englantilaisen Maclaurinin tiedossa, mutta tuli tunnetuksi vasta Cramerin teoksen kautta.⁵⁵ Cramer, kuten Maclaurinkaan, ei käyttänyt matriiseja tai determinantteja, mutta säännön oleellinen sisältö oli heille tuttu. Kirjassa

⁵² Euler, *Introductio* II, s. 8

⁵³ Euler, *Introductio* II, s. 44 ja 137

⁵⁴ Olkoon yhtälöryhmä $Ax = b$, missä A on $n \times n$ matriisi. Merkitään A_j :llä matriisia, joka on saatu A :sta korvaamalla

sarake j vektorilla b . Tällöin yhtälöryhmällä on täsmälleen yksi ratkaisu $x_1 = \frac{\det A_1}{\det A}$, $x_2 = \frac{\det A_2}{\det A}$, ..., $x_n = \frac{\det A_n}{\det A}$.

⁵⁵ DSB

esiintyy myös tuttu ympyrän keskipistemuotoinen yhtälö $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ ja suoran yhtälö muodossa $a = \pm by \pm cx$.⁵⁶ $x_i = \det(A_i) / \det(A)$,

2.6 Terminologiasta

Tutustutaan vielä lopuksi tiettyjen keskeisten termien ja käsitteiden ensiesiintymisiin ja kehittäjiin. Nämä pienet yksityiskohdat saattavat vaikuttaa epäoleelliselta ja näin ehkä onkin, mutta mielestäni on kuitenkin kiinnostavaa tietää kenen kynästä on mikäkin termi peräisin.

Ajatus koordinaateista on sinänsä vanhaa perua, vaikka Fermat ja Descartes eivät käyttäneet sanaa tai käsitettä järjestelmiinsä sisällyttäneet. Jo Egyptiläiset maanmittaajat käyttivät erilaisia pohjaruudukkoja paikan määrittämiseen ja kreikkalaiset kartantekijät sekä pituus- ja leveyspiirejä niin ikään paikantamisen apuna. 1300-luvulla Nicole Oresme (n. 1320-1382) käytti selvää koordinaatistojärjestelmää, jonka käsitteet *longitudines* ja *latitudines* vastaavat x - ja y -koordinaatteja.⁵⁷ Descartesin ja Fermat'n ensimmäisissä yksiakselisissa järjestelmissä pisteen paikka käyrällä määräytyi mittaamalla ensin matka eli janan pituus annetulla suoralla tietystä kiinteästä pisteestä ja poikkeamalla janan (pituus x) päätepisteestä vakiokulmassa kohti käyrää toisella janalla, jonka pituus on y . Tässä ajattelussa muuttujat olivat luonnollisesti vain positiivisia ja muut muuttujan arvot olivat joko ”väärä” tai ”kuvitteellisia”, kuten Descartes näitä kuvasi. Sekä Descartes että Fermat käyttivät kreikkalaista perua olevaa termiä *ordinatis applicata* kuvaamaan akselilla olevaa janaa. Myöhemmin siirryttiin käyttämään nimityksiä abskissa (” x -koordinaatti”) ja ordinaatta (” y -koordinaatti”) kuvaamaan origosta alkaneita siirtymiä. Nämä termit, kuten koordinaatti (*co + ordinata*) ovat Leibnizin vuosisadan vaihteessa esittelemät.⁵⁸ Käsitteenä *origo* tarkastelun alkupisteenä löytyy jo ensimmäisistä Descartesin ja Fermat'n teksteistä, mutta tätä nimitystä käytti ensi kerran ranskalainen Philippe De La Hire (1640-1718) vuonna 1679 ilmestyneessä kirjassaan⁵⁹. Termiä *karteesinen* käytti ensimmäisen kerran Jean Bernoulli 1692 käyrän yhtälön määrittämisen yhteydessä.⁶⁰ Termejä x -akseli, y -akseli, x -koordinaatti ja y -koordinaatti on käytetty ensi kerran painetussa kirjassa ilmeisesti vasta 1800-luvulla.

⁵⁶ Boyer, History of Anal. S. 195

⁵⁷ Smith II, s. 319

⁵⁸ Smith II s. 324; Cajori History of Mathematics, s. 211; Shwartzman, s. 17; Boyer, History of Analytic Geometry, s. 133

⁵⁹ Boyer, History of Analytic Geometry, s. 121

⁶⁰ Boyer, History of Analytic Geometry, s. 133