

1. Algebra ja aritmetiikka	2
1.1. Johdanto	2
1.2 Mitä kantalukua käytettäisiin?	3
1.3 Suomen kielen lukusanat ja suomalaisten varhainen lukujärjestelmä	6
1.4 Kymmenjärjestelmän paikkajärjestelmä syntyy	7
1.4.1 Numeromerkkien synty	7
1.4.2 Paikkajärjestelmän synty	9
1.5.1 Al-Khwarizmi ja intialaisten numeromerkkien leviäminen	12
1.5.3. Numeromerkit kautta maailman.....	15
1.6 Algebra syntyy	16
1.6.3 Al-Khwarizmin jälkeinen aika	21
1.6.4 Arabien algebrallinen perintö	26
1.7 Algebra ja aritmetiikka Euroopassa	27
1.7.1 Ensikosketus	27
1.7.2 Kääntämisen vuodet ja algorismin synty	28
1.7.3 Italialaiset algebrat	29
1.7.4 Leonardo Pisalaisen Liber abaci.....	30
1.7.5 Jordanus de Nemore	32
1.7.6 Abacistit ja algoristit.....	35
1.7.7 Luca Pacioli Summa.....	36
1.7.8 Algebra Saksassa	40
1.7.9 Algebra Englannissa.....	43
1.7.10 Algebra Ranskassa	44
1.7.12 Rafael Bombelli ja kompleksiluvut	51
1.7.12 Algebran uusi alku	53
1.7.13 Desimaaliluvun käsite	61
1.7.13 Algebran kehitys Vièten jälkeen	67
1.7.13 René Descartes ja modernit merkinnät	69
1.7.14 Lopuksi	74
1.8 Merkintöjen kehittyminen	77

1. Algebra ja aritmetiikka

1.1. Johdanto

Luvut ja laskeminen ovat oleellinen osa yleissivistystä. Sen takia ei ole yhdentekevää miten suoritamme laskutoimitukset ja kuinka merkitsemme lukuja. Numero-merkit ja lukujärjestelmä ovat joko este tai kannustin matematiikan ja luonnontieteiden tutkimukselle. On arvioitu, että vasta nykyisen kymmenjärjestelmän laajamittainen käyttöönotto keskiajan lopulla mahdollisti renessanssiajan matematiikan ja luonnontieteiden saavutukset.

Toinen teknisen yhteiskuntamme oleellinen osa on symbolinen algebra. Matematiikka ja luonnontieteet nojaavat korkean abstraktion tason omaavaan algebraan. Millainen olisi luonnontieteen maailma ilman kaavoja?

Näiden tärkeiden taitojen alkeet opitaan koulussa, mutta niiden historia jää usein epäselväksi. Kenen ansiota on paikkajärjestelmä? Ketä saamme kiittää kirjainlaskennasta?

Vaikka paikkajärjestelmällä ja algebralla on eri alkukodit, ovat ne levinneet ja kehittyneet Keskiajalta alkaen samanaikaisesti toinen toisiinsa lomittuneina. On luontevaa tutustua niiden historiaankin yhdessä. Aloitan tarkastelun lukujärjestelmän keskeisimmästä osasta, kantaluvusta. Tämän jälkeen tutustutaan paikkajärjestelmän ja numeromerkkien syntyyn sekä algebran varhaisiin vaiheisiin.

1.2 Mitä kantalukua käytettäisiin?

kaksijärjestelmä

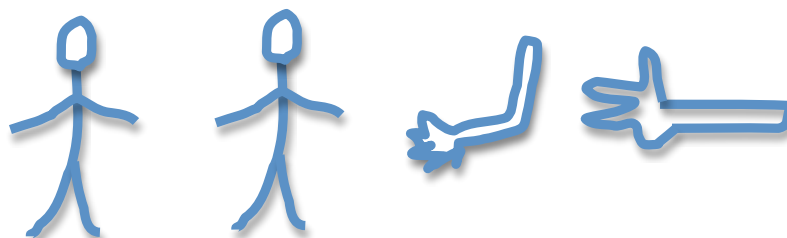
Alkeellisin laskeminen perustuu yhden, kahden ja kahta suurempien ryhmien toisistaan erottamiseen, jolloin kaikki kahden ylittävä määrä on ”paljon” tai ”monta”. Keräilemällä ja metsästäämällä elantonsa hankkineen ihmisen ei tarvinnut laskea suuria lukuja, sillä omistettavia tavaroita oli hyvin vähän, rahaa ei ollut ja elinyhteisö oli pieni. Tästä hieman kehittyneemmässä laskutavassa kahta suuremmat luvut osataan erottaa, mutta laskeminen suoritetaan edelleen kahden ryhmissä. Tällainen tapa on ollut käytössä esimerkiksi joillain Australian mantereen koillisosassa tavatuilla heimoilla. He suorittavat laskemisen seuraavalla tavalla: ”yksi, kaksi, kaksi ja yksi, kaksi ja kaksi” jne. Myös eräät Afrikan pygmiheimot laskevat vastaavalla tavalla käyttäen lukusanoja *a*, *oa*, *ua*, *oa-oa*, *oa-oa-a*, *oa-oa-oa* luvuille 1, 2, 3, 4, 5 ja 6.

Binäärisen järjestelmän lisäksi kantalukuun kolme ja neljä perustuvia lukujärjestelmistä on käytetty, mutta niitä on selvästi vähemmän kuin kantalukuun viisi perustuvia. Eräässä Pohjois-Amerikan intiaaniheimojen käyttämiä lukujärjestelmiä kartoittaneessa tutkimuksessa havaittiin, että viitteitä binäärisestä järjestelmästä oli noin neljänneksellä heimojen kielistä, mutta puhdasta kaksijärjestelmää ei kuitenkaan tavattu yhdelläkään heimolla. Noin kuusi prosenttia heimosta käytti järjestelmää, jonka kantalukuna oli kolme tai neljä, mutta viisijärjestelmä oli käytössä joko puhtaana tai osana 10- tai 20-järjestelmää lähes puolella heimoista.

viisijärjestelmä

Luku viisi on ymmärrettävä valinta kantaluvuksi. Laskeminen on luontevaa ryhmitellä yhden käden sormien lukumäärän mukaan. Tutkijat ovat löytäneet Etelä-Amerikan sademetsistä heimoja, joiden kielissä käytetään lukusanoja ”yksi, kaksi, kolme, neljä, käsi, käsi ja yksi” jne. Tukkimiehen kirjanpito: */, //, ///, ////, ###, ### /*, jne., perustuu lukujen ryhmittelyyn viiden sarjoissa. Vastaavia alkeelliseen viivojen ryhmittelyyn perustuvia eläinten luihin raapustettuja lukuja on löytynyt Euroopasta jopa 30 000 vuoden takaa.

Grönlannin inuitien kielestä löytyy yhdistelmiä sekä viisi- että 20-järjestelmästä. Lukusanat etenevät viiteen asti ”normaalisti”, mutta lukua kuusi vastaa sana ”toinen käsi”, lukua seitsemän vastaa sana ”toinen käsi, kaksi”, jne. Luku 11 on ”ensimmäinen jalka”, luku 12 ”ensimmäinen jalka, kaksi” jne. Lukua 16 vastaa ilmaisu ”toinen jalka” ja lukua 17 ”toinen jalka, kaksi”. Kun koko ihminen on laskettu loppuun saadaan ”mies” eli luku 20.



Kuva 1. Tunnistatko kuvasta inuitien tavalla ilmaistun luvun?

12-järjestelmä

Myös yli kymmenen olevia kantalukuja on käytetty ja viitteitä erityisesti luvun 12 käytöstä on jäljellä. Itse asiassa 12 olisi matematiikan kannalta parempi valinta kantaluvuksi kuin kymmenen sen hyvien jaollisuusominaisuuksien johdosta. Murtolukujen kanssa tuskailevan oppilaan kannalta olisi etu, jos kolmasosa tai kuudesosa kantaluvusta olikin kokonaisluku eikä päättymätön jaksollinen desimaaliluku, kuten nyt. Puolittaminen olisi samantasoinen operaatio kuin nykyisin. Neljäsosan laskeminen olisi helpompaa. Viidesosan ottaminen kantaluvusta vaikeutuisi hie-
man, mutta se olisi yhtä vaikea laskutoimitus kuin nykyisin neljäsosan laskeminen kantaluvusta. Historian pyörää ei voi kuitenkaan kääntää takaisin.

Luvun 12 jaollisuusominaisuuksista johtuen se sitä on käytetty mitta- ja painojärjestelmien kantalukuna. Latinan kielessä on sana *uncia*, jonka merkitys on kahdestoistaosa. Mittayksikkö uncialla oli monta käyttökohdetta. Se oli massan yksikkö, jolloin se oli 1/12 osa *librasta* (n. 27 g) tai rahayksikkö, jolloin se oli 1/12-osa aluksi pronssisen, mutta myöhemmin kuparisen kolikon *as* arvosta tai pituusmitta, jolloin se merkitsi 1/12 jalasta (n. 25 mm). Latinan kielessä on omat sanat muillekin luvun 12 murto-osille: 2/12 on *sextans*, 3/12 on *quadrans*, 4/12 on *triens*, jne. aina lukuun 12/12 saakka, josta siis käytettiin nimitystä *as*, kokonainen.

Nämä 12-järjestelmään perustuneet yksiköt ovat siirtyneet roomalaisilta Brittein saaren nykyisillekin asukkaille. Sekä tuuman *inch* (12 jalkaa) että unssin *ounce* (12 naulaa) kantasana on juuri *uncia*. Lisäksi aina vuoteen 1971 saakka saarivaltiossa oli käytössä rahajärjestelmä, jonka perusyksikkö punta vastasi arvoltaan 240 penniä eli 20 shillinkiä, joten yksi shillinki oli arvoltaan 12 penniä. Tässä rahajärjestelmässä oli siis mukana kantaluvut 12, 20 ja 240.

Myös itse englannin kielessä on jäänne kantaluvun 12 käytöstä. Luvuista 11 ja 12 käytetään nimittäin sanoja ”eleven” ja ”twelve” eikä ”oneteen” ja ”tweeten”, kuten laskeminen jatkuu luvusta 13 alkaen: ”thirteen”, ”fourteen”, jne.

20-järjestelmä

Kaksikymmenjärjestelmää on käytetty laajasti mm. kelttien parissa. Kelttivaikutusten peruna ranskan kielessä luku 80 on *quatre-vingt* (neljä-kaksikymmentä) ja luku 90 on *quatre-vingt-dix* (neljä-kaksikymmentä-kymmenen). Lisäksi luvulla 120 on vanha muoto on *six-vingt* ja luvulla 140 *sept-vingt*.

Useat Keski-Amerikan intiaanikansat, kuten mayat ja azteekit, käyttivät kehittyntä 20-järjestelmää, jonka puitteissa he laativat mm. erittäin tarkkoja kalentereita.

0	1	2	3	4
	•	••	•••	••••
5	•	••	•••	••••
	•	••	•••	••••
10	•	••	•••	••••
	•	••	•••	••••
15	•	••	•••	••••
	•	••	•••	••••
20	•	••	•••	••••
	•	••	•••	••••
25	•	••	•••	••••
	•	••	•••	••••
30	•	••	•••	••••
	•	••	•••	••••
35	•	••	•••	••••
	•	••	•••	••~
40	•	••	•••	••••
	•	••	•••	••••
45	•	••	•••	••••
	•	••	•••	••••
50	•	••	•••	••••
	•	••	•••	••••
55	•	••	•••	••••
	•	••	•••	••••
60	•	••	•••	••••
	•	••	•••	••••
65	•	••	•••	••••
	•	••	•••	••••
70	•	••	•••	••••
	•	••	•••	••••
75	•	••	•••	••••
	•	••	•••	••••
80	•	••	•••	••••
	•	••	•••	••••
85	•	••	•••	••••
	•	••	•••	••••
90	•	••	•••	••••
	•	••	•••	••••
95	•	••	•••	••••
	•	••	•••	••••
100	•	••	•••	••••
	•	••	•••	••••
105	•	••	•••	••••
	•	••	•••	••••
110	•	••	•••	••••
	•	••	•••	••••
115	•	••	•••	••••
	•	••	•••	••••
120	•	••	•••	••••
	•	••	•••	••••
125	•	••	•••	••••
	•	••	•••	••••
130	•	••	•••	••••
	•	••	•••	••••
135	•	••	•••	••••
	•	••	•••	••••
140	•	••	•••	••••
	•	••	•••	••••
145	•	••	•••	••••
	•	••	•••	••••
150	•	••	•••	••••
	•	••	•••	••••
155	•	••	•••	••~
160	•	••	•••	••••
	•	••	•••	••••
165	•	••	•••	••••
	•	••	•••	••••
170	•	••	•••	••••
	•	••	•••	••••
175	•	••	•••	••••
	•	••	•••	••••
180	•	••	•••	••••
	•	••	•••	••••
185	•	••	•••	••••
	•	••	•••	••••
190	•	••	•••	••••
	•	••	•••	••••
195	•	••	•••	••~

Kuva 2. Maya-intiaanien käyttämiä numeromerkkejä.

kymmenjärjestelmä

Kymmenjärjestelmä on nykyisin selvästi käytetyin lukujärjestelmä. Se levisi jo ”ennen aikojen alkua” koko Euraasian mantereen käytetyimmäksi järjestelmäksi. Egyptissä, Kreikassa, Intiassa ja Kiinassa on laskettu muinaisista ajoista alkaen käyttäen kymmenjärjestelmää. Ainoastaan Babyloniassa kehitettiin erikoinen kaksikymmenjärjestelmä. Ennen kymmenjärjestelmää tai sen rinnalla on ollut kuitenkin paikka paikoin käytössä muitakin järjestelmiä ja nämä jäänteet näkyvät edelleen monien eurooppalaistenkin kielten lukusanoissa, kuten edellä on osoitettu. Vain Etelä-Amerissa on käytetty puhtaana kaksikymmenjärjestelmää. Kymmenjärjestelmää voidaan hyvällä syyllä pitää ensimmäisenä yleismaailmallisena standardina, jota tosin ei omaksuttu tietoisesti, vaan se perustui ihmisen anatomiaan. Kymmenjärjestelmässä laskeminen ryhmitellään käden sormien lukumäärän mukaisesti ryhmiin. Kymmenjärjestelmä on kantalukuun viisi eli yhden käden sormien lukumäärään perustuvaa ryhmittelyä luonnollisempi, sillä ihminen on harjaantunut käyttämään molempia käsiään kaikessa, metsästyksessä, työnteossa ja siis myös laskemisessa.

Miksi päivän pituus on 12 tuntia ja vuorokaudessa on 24 tuntia?

Yllättävää kyllä, päivän jakaminen 12 tuntiin ei liity suoranaisesti luvun 12 jaollisuusominaisuuksiin, vaan yli 6 000 vuoden takaisen muinaisen Egyptin uskonnollisiin toimituksiin. Toimituksissa palvelleiden pappien oli rituaalisista syistä tärkeää tietää milloin yö oli loppumassa. Ajan kulkua tarkkailleet papit olivat tehneet huomion, että aina tiettyyn aikaan vuodesta tietty kirkas tähti nousi taivaanrantaan juuri ennen aurinkoa eli nousi heliakkisesti. Johtuen Auringon näennäisestä liikkeestä vuotuisella radallaan Auringon ensi säteitä ennakoanut tähti kuitenkin nousi aina seuraavana yönä muutamia minutteja aikaisemmin kuin edellisenä yönä. Ennen pitkää valittu tähti ei enää sopinutkaan ennakoimaan auringon nousua, vaan papit joutuivat valitsemaan seuraavan kirkkaan tähden. Vaihtojen väliksi sovittiin 10 päivää.

Yötaivaan kirkkaimman tähden Siriuksen heliakkinen nousu sattui hyvin lähelle Niilin jokavuotisten tulvien alkua. Tulvat taas olivat Egyptin maanviljelyksen kannalta elintärkeät, joten Sirius muodostui egyptiläisille tärkeäksi tähdeksi ja tähden noususta laskettiin mm. aurinkovuoden alku. Siriuksen heliakkisen nousun aikaan yön aikana ehti nousta täsmälleen 12 ”airuttähteä”. Tästä johdettiin tapa jakaa yö 12 osaan: tunti vaihtui aina uuden tähden noustessa näkyviin.

Päivä puolestaan jaettiin 10 osaan Egyptissä muuten yleisesti käytetyn kymmenjärjestelmän mukaan. Kymmenen varsinaisen osan lisäksi varattiin yksi osa sekä aamu- että iltahämärälle eli kaikkiaan 12 osaan.

Egyptiläisiltä tapa jakaa sekä päivä että yö 12 osaan siirtyi kreikkalaisille ja sitä kautta myös meille. Tasapituiset tunnit vakiintuivat käyttöön vasta keskiajalla kellojen tekniikan kehityksessä riittävän tarkaksi, jotta aika voitiin mitata ilman aurinkoa, joskin jo kreikkalaiset olivat pohtineet mahdollisuutta siirtyä tasamittaisiin tunteihin.

Kuva 3. Big Ben, Lontoo.

1.3 Suomen kielen lukusanat ja suomalaisten varhainen lukujärjestelmä

Suomen kielen lukusanoille *yksi, kaksi, kolme, neljä, viisi, kuusi, seitsemän, kahdeksan* ja *yhdeksän* löytyy vastineet lähes kaikissa suomalais-ugrilaisissa kielessä. Ne ovat kieleemme muinaista omaperäistä sanastoa. Sana *kymmenen* on lainasana, joka on korvannut alkuperäisen mm. *lukea*-verbin kanssa samaa juurta olevan lukumäärää 10 merkinneen sanan. Sanan *lukea* alkuperäinen merkitys on ollut ”laskea lukumääriä”. Lukusanat *kahdeksan* ja *yhdeksän* ovat syntyneet siten, että sanat *kaksi* ja *yksi* ovat yhdistyneet ikivanhan kieltoisan *e-* taivutusmuodon *-eksan* kanssa. Lukusanojen *kahdeksan* ja *yhdeksän* merkitys on siten ”kahta ei ole” ja ”yhtä ei ole” eli *kaksi* tai *yksi* puuttuu kymmenestä. Tämä havainto yhdessä sen kanssa, että kymmentä suuremmat lukusanat, kuten *yksitoista* ovat muodostuneet ajatuksella ”yksi toisella kymmenellä” osoittavat, että muinaiset esi-isämme ovat käyttäneet laskemisessa kymmenjärjestelmää.

Omaperäisillä sanoilla päästään aina lukuun 99 saakka, mutta tätä suuremmat lukusanat ovat esi-isämme lainanneet muilta kansoilta. Sana *sata* on hyvin vanha arjalainen lainasana, joka on levinnyt kaupankäynnin myötä suomeen. Sana *tuhat* on vanha balttilainen laina. Sanojen *miljoona* ja *miljardi* alkuperä on ranskan kielessä. Sanan *miljoona* ensimmäinen suomenkielinen kirjallinen esiintyminen on vuodelta 1749 ja *miljardin* vuodelta 1865.

1.4 Kymmenjärjestelmän paikkajärjestelmä syntyy

Johdanto

"Intialaisten ansiosta meillä on käytössä nerokas menetelmä, jolla voidaan esittää kaikki luvut vain kymmenen numeromerkinnän avulla antamalla merkeille samanaikaisesti sekä absoluuttinen että paikasta riippuva arvo. Tämä hieno ja tärkeä ajatus ilmenee kuitenkin niin yksinkertaisessa muodossa, että emme ymmärrä tarpeeksi tunnustaa sen arvoa. Mutta menetelmän erityinen yksinkertaisuus ja helppo sovellettavuus kaikenlaisiin laskuihin nostaa meidän aritmeettisen järjestelmämme yhdeksi tärkeimmistä verrattaessa kaikkia hyödyllisiä keksintöjä. Kuinka vaikeaa sen keksiminen oli, voidaan päätellä siitä, että se jäi saavuttamatta kahdelta antiikin suurimmalta nerolta ja tiedemieheltä, Arkhimedeeltä ja Apollinius Pergalaiselta."¹

Nykyisin käyttämämme lukujärjestelmän eli intialais-arabialaisen paikkajärjestelmän oleelliset elementit ovat intialaisten kehittämiä, vaikka järjestelmä joskus virheellisesti yhdistetään pelkästään arabimatematiikoihin ja numeroista puhuttaessa viitataan "arabialaisiin numeroihin".

Järjestelmä rakentuu kahden pilarin varaan. Ensinnäkin se on koodattu eli kullekin numerolle 1-9 ja luvulle nolla on oma erityinen merkkinsä. Toiseksi se on paikkajärjestelmä, jossa lukumerkkien arvo määräytyy merkin sijainnin mukaan sisältäen numeron nolla täysimittaisen käytön sekä numeromerkkien välissä että luvun lopussa. Nämä kaksi lukujärjestelmämme keskeistä elementtiä ovat kehittyneet osittain toisistaan erillään. Tutustumme aluksi numeromerkkien kehittymiseen ja tämän jälkeen siihen kuinka ne yhdistyivät paikkajärjestelmään.

1.4.1 Numeromerkkien synty

Brāhmī-aakkoset

Intian niemimaalla käytettiin kirjoitusta ensimmäisen kerran Indus-joen kulttuurin (2500-1800 eKr.) piirissä, mutta varsinainen intialainen kirjoitus on peräisin ajalta 273-235 eKr., jolloin keisari Asoka hallitsi laajaa aluetta Afganistanista Bengaliin ja Nepalista Intian niemimaan eteläosiin. Hänen valtakaudella ryhdyttiin kaivertamaan käskyjä ja määräyksiä kiviin ja pylväisiin eri kielillä: kreikaksi ja arameaksi sekä sanskritiksi käyttäen kahta intialaisperäistä aakkostoa, kharoshthia ja brāhmia. Brāhmī-aakkosten tarkkaa alkuperää ei tunneta, ne ovat mahdollisesti peräisin seemiläisestä arameasta, aikansa lingua franca-kielestä. Aikaa myöten brāhmī-kirjoitus syrjäytti kaikki kilpailevat kirjoitustavat ja siitä tuli useimpien tällä alueella nykyisinkin puhuttavien kielten kirjoitustapojen lähde.

Brāhmī-numerot

Brāhmī-aakkostoon kehittyi kolmannen esikristillisen vuosisadan aikana omat numeromerkit ykkösille, kymmenille, sadoille, tuhansille ja kymmenille tuhansille. Lukuja kirjoitettaessa merkkejä toistettiin ja yhdistettiin. Suurten lukujen esittäminen tämän järjestelmän puitteissa oli hieman ongelmallista, sillä kymmeniä tuhansia suuremmille luvuille ei ollut omaa merkkiä, kuten ei myöskään luvulle nolla. Sanskritin kielessä oli kuitenkin oma sana jokaiselle kymmenen potenssille aina lukuun 10^{421} saakka. Suuretkin luvut oli siten mahdollista ilmaista kirjallisessa muodossa.

Varhaisimmat säilyneet brāhmī-numerot eivät juurikaan muistuta meidän nykyisin käyttämiämme numeromerkkejä. Brāhmī-numeroiden merkitys olikin siinä, että numeroita 1-9 ei merkitty toistamalla viivaa, nuolenpäää tms. yksinkertaista merkkiä, vaan kullekin numerolle oli oma merkkinsä. Numerojärjestelmä oli koodattu.

¹ Näin on todennut ranskalaisen matemaatikko Laplace (1749-1827), Lähde: Cajori, A History of Mathematical notations, s. 70

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Third century BCE: Brahmi of Asoka				+		𑀓𑀾			
Second century BCE: Inscriptions of Nana Ghat	—	=		𑀓𑀓		𑀓𑀾	𑀓𑀓		𑀓𑀓
First or second century CE: Inscriptions of Nasik	—	=	≡	𑀓𑀓𑀓𑀓	𑀓𑀓𑀓𑀓	𑀓𑀓𑀓𑀓	𑀓𑀓𑀓𑀓	𑀓𑀓𑀓𑀓	𑀓𑀓𑀓𑀓

Kuva 4. Brāhmī-numeroita sekä brāhmī-numeroiden johdannaisia ajalta n. 200 eKr. – 200 jKr. Aivan varhaisimmalta ajalta ei ole säilynyt kuin merkit 1, 2, 4 ja 6.

Lähde: Ifrah, s. 397

Gupta-numerot

Brāhmī-aakkosten pohjalta kehittyi lukuisia erilaisia merkistöjä. Näistä tärkein oli Gupta-dynastian (n. 240-535) aikana kehittyneet Gupta-aakkoset, jotka olivat käytössä laajalla alueella Intian niemimaan pohjoisosissa.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
—	=	≡	𑀓𑀓	𑀓𑀓	𑀓𑀓𑀓𑀓	𑀓𑀓𑀓𑀓	𑀓𑀓𑀓𑀓	𑀓𑀓𑀓𑀓	
𑀓𑀓	𑀓𑀓	𑀓𑀓	𑀓𑀓	𑀓𑀓		𑀓𑀓	𑀓𑀓	𑀓𑀓	
	𑀓𑀓	𑀓𑀓	𑀓𑀓	𑀓𑀓			𑀓𑀓	𑀓𑀓	
		𑀓𑀓	𑀓𑀓	𑀓𑀓			𑀓𑀓		
			𑀓𑀓	𑀓𑀓			𑀓𑀓		
				𑀓𑀓			𑀓𑀓		
							𑀓𑀓		
							𑀓𑀓		

Date: fourth to sixth century CE.

Source: inscriptions of Parivrajaka and Uchchakalpa

FIG. 24.38. Gupta numerals

Kuva 5. Gupta-numeroita 4.-6. vuosisadoilta (Lähde: Ifrah s. 379, kuva 24.38)

Nāgarī-numerot

Gupta-merkistö muuntui noin 600-luvulla Nāgarī-merkistöksi. Nāgarī-kirjoitus syrjäytti brāhmī-kirjoituksen sanskritin virallisena aakkostona. Nāgarī-merkistö on yhä edelleen käytössä, joskin sitä kutsutaan nykyisin nimellä Devanāgarī. Nāgarī-numeroiden pohjalta arabit muokkasivat numeromerkit. Nāgarī-merkistön numeromerkeissä voi havaita jo joitain nykyisten numeromerkkien piirteitä (kuva 6).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
—	≡	≡	Ɔ	Ɔ	Ɔ	Ɔ	Ɔ	Ɔ	Ɔ
—	≡	≡	Ɔ	Ɔ		Ɔ	Ɔ	Ɔ	Ɔ
—	≡	≡	Ɔ				Ɔ	Ɔ	Ɔ
Ɔ	2	3	Ɔ				Ɔ	Ɔ	Ɔ
Ɔ			Ɔ					Ɔ	Ɔ

Date: eighth to twelfth century CE (Fig. 24.3).
Source: various manuscripts from northern and central India (the place-value system).

FIG. 24.39B. Ancient Nāgarī numerals

Kuva 6. Nāgarī-numeroita 8.-12. vuosisadoilta (Lähde: Ifrah s. 380 kuva 24.39B)

1.4.2 Paikkajärjestelmän synty

Paikkajärjestelmän syntymisen tarkkaa ajankohtaa ei tunneta. Ensimmäinen varma kirjallinen dokumentti, jossa käytetään paikkajärjestelmää on vuodelta 458, joten paikkajärjestelmän käyttö yhdessä luvun nolla kanssa keksittiin tai kehittyi Gupta-dynastian aikaan Intiassa mitä ilmeisimmin 400-luvun alussa tai jopa jo 300-luvulla.

Vuodelle 458 ajoitetussa ensimmäisessä dokumentissa ei käytetä vielä minkään erityisen aakkoston numeromerkkejä, vaan luvut kirjoitetaan sanoin mm. seuraavasti: *trīṇy ekam sapta shat trīni dve chavāry ekakam*. Sanskritin kielen lukusanat kääntyvät seuraavasti: kolme yksi seitsemän kuusi kolme kaksi neljä yksi. Tekstin kirjoittaja ilmaisi lukusanajonon yhteydessä *kramāt* (järjestyksessä) tai *ankakra-mena* (numeroiden järjestyksessä), jotta lukija ymmärsi tulkita numerot luvuksi, jossa numeroilla on kasvava järjestys. Ykköset olivat siis ensimmäisenä ja kyseessä on luku 14 236 713. Kyseistä dokumentista otetussa toisessa esimerkissä on käytetty myös lukua nolla: *panchabhyah khalu shūnyebhyah param dve sapta chāmbaram ekam cha cūpam cha*, joka voidaan kääntää ”viisi tyhjää, sitten kaksi ja seitsemän, taivas, yksi ja kolme ja yksi” eli 13 107 200 000.

Tähän aikaan kirjoittajat saattoivat korvata varsinaisen numeroa ilmaisevan sanan sellaisella sanalla, joka tuo lukijan mieleen oikean numeron. Sanan kaksi asemesta saatettiin kirjoittaa ”silmät”, ”kädet”, ”siivet” tai jokin muu vastaava sana. Tämän periaatteen mukaisesti edellisessä esimerkissä ”taivas” on vastine sanalle ”nolla”.

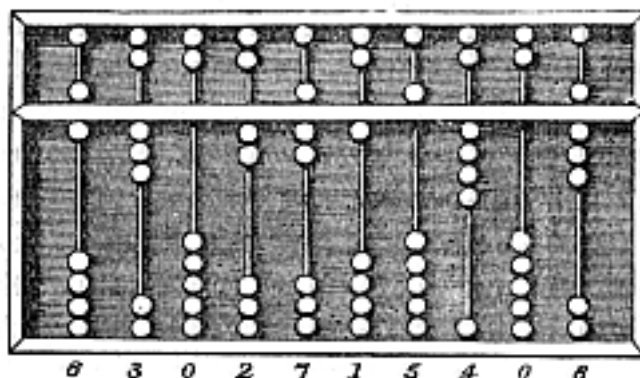
Toinen ajoitettu dokumentti osoittaa, että intialainen Aryabhata vanhempi käytti vuonna 476 paikkajärjestelmää, niin ikään luettelemalla luvut sanoina².

² Ganguli, The Elder ...,
erkki.luoma-aho@jkl.fi

Paikkajärjestelmän alku

Mikä sitten sai intialaiset ilmoittamaan lukuja tällä tavalla? Ilmeisesti tapa on saanut alkunsa laskulaudalla lasketun laskun tuloksen ylöskirjaamisesta. Laskulauta on hyvin yksinkertainen kymmenjärjestelmään perustuva laskemisen apuneuvo. Lauta rakennettiin joko puusta tai kivistä ja siihen laadittiin akselisto tai kaiverrettiin urat ykkösiä, kymmeniä, satoja jne. ilmaisevia pieniä kuulia varten. Kuulat valmistettiin kivistä, marmorista tai puusta. Kokenut käyttäjä saattoi suorittaa kuulia siirtelemällä lukujen yhteen- tai vähennyslaskun hyvin nopeasti. Laskulauta pitää sisällään ajatuksen sekä paikkajärjestelmästä että luvusta nolla. Laskulaudalla oleva luku on muodostettu kymmenen potenssien kertoimina ja on mahdollista, että esimerkiksi kymmenten määrää osoittavaan kohtaan ei tule kuulaa eli numeroa. Kun luku kirjoitettiin, aluksi sanoin, numerot luettiin järjestyksessä ja kuulaton eli numeroton kohta ilmaistiin kirjoittamalla ”tyhjä”, ”taivas”, ”ilma” tai jotain vastaavaa.

500-luvulla tai viimeistään 600-luvun alussa intialaiset jättivät vanhasta numerojärjestelmästä – joka ei ollut paikkajärjestelmä – kaikki luvun 9 ylittävät numerosymbolit pois ja ryhtyivät kirjoittamaan lukuja kokonaislukujen 1-9 merkeillä paikkajärjestelmässä samaan tapaan kuin sanoilla. Tärkeimmäksi merkkijärjestelmäksi muodostui samaan aikaan kehittynyt Nāgarī-kirjoitus.



Kuva 7. Kiinalaistyyppinen laskulauta Suanpan. Laudalla on luku 6 302 715 408. Kuvan ylemmät kuulat vastaavat lukua 5 ja alemmat lukua 1.

Luku nolla

Koska vanhassa merkistössä ei ollut merkkiä luvulle nolla ryhdyttiin tyhjään paikkaan kirjoittamaan piste. Tyhjän paikan pistettä ei aluksi pidetty numerona, vaan se merkitsi sananmukaisesti ”tyhjää”. Varsinaisia numeroita ajateltiin edelleen olevan yhdeksän. Kuitenkin jo niinkin pian kuin 500-luvun alussa eräät intialaiset matemaatikot pitivät *symbolia* nolla *lukuna* nolla. Vuonna 628 intialainen Brahmagupta suorittaa mm. laskutoimitukset $0 + 0 = 0$, $0/a = 0$, $0 \cdot a = 0$, $0 \cdot 0 = 0$ ja $\sqrt{0} = 0$ ja viimeistään tällöin voidaan varmuudella sanoa ainakin joidenkin matemaatikoiden käsitelleen nollaa lukuna³. Brahmaguptan työn arvoa ei himmennä se, että hän em. oikeiden sääntöjen lisäksi laski $0/0 = 0$. Tämä kertoo vain käsitteiden täsmentymättömyydestä⁴. 600-luvun lopussa nollan kirjoitusasuakin uudistui, pisteen tilalle ryhdyttiin kirjoittamaan pieni ympyrä. Myös lukujen kirjoitusjärjestys muuttui ja numerot ryhdyttiin kirjoittamaan laskevassa järjestyksessä, suurimman kymmenen potenssin kerroin ensimmäiseksi.

³ Boyer, Zero: The Symbol, ..., s. 328

⁴ Ganguli, The Indian...II, s. 390

Intialaisilla matemaatikoilla oli ilman varsinaista ja tarkkaa määritelmää käytös-
sään positiiviset luvut, negatiiviset luvut ja luku nolla. Kun arabit myöhemmin
omaksuivat intialaisten paikkajärjestelmän ja lukumerkit he omaksuivat sen vajaas-
sa muodossa. Negatiiviset luvut olivat lopulta ”unohduksissa” intialaisten jälkeen
lähes tuhat vuotta ja vasta 1500- ja 1600 luvuilla Euroopassa ne keksittiin uudes-
taan ja hyväksyttiin lopullisesti oleelliseksi osaksi lukualuetta.

Nollan nimitys

Alkuperäinen arabiankielinen sana nollalle on *sifr*, joka merkitsee ”tyhjää” siinä
mielessä kuin kädet ovat tyhjät. Fibonacci, joka ensimmäisenä eurooppalaisena kir-
joitti kymmenjärjestelmästä käytti sanaa ”zephirum”. Latinan kielessä nollaa mer-
kitseväksi valikoitui zephyrus, mikä merkitsee ”tuulen henkäystä” tai kevyttä tuulta
eli ei juuri mitään. Tästä sanasta on johtunut englannin kieleen lukua 0 tarkoittava
sana zero.

Suomen kielen sana nolla on periytynyt vastaavasta käsitteellisestä
väärinymmärryksestä. Nolla on alun perin lainasana ruotsin kielestä, jonne se on
johdettu latinan sanasta nulla, ”ei mitään, arvoton, mitätön”.⁵

⁵ Ifrah, s 589, Häkkinen, s. 793

1.5 Arabit oppivat kymmenjärjestelmän

Tausta

Muhammed perusti islamin 600-luvun alussa. Hänen vuonna 632 tapahtuneen kuolemansa jälkeen uuden uskonnon seuraajat, muslimit, ryhtyivät levittämään Islamia valtaisalla kiihkolla miekkaan turvautuen sillä seurauksella, että vuosisadan kuluttua he olivat luoneet valtaisan Espanjasta Intiaan ulottuvan imperiumin. Vasta Kaarle Martel onnistui pysäyttämään muslimien etenemisen vuonna 732 lähellä Toursia Ranskassa.

Kiivaimman sotavaiheen jälkeen arabivalloittajat, jotka olivat taustaltaan vain vaatimattomia paimentolaisia, aloittivat tutustumisen valloittamiensa kansojen tieteseen ja kulttuuriin. Jo 700-luvun jälkimmäisen puoliskon aikana käännettiin ensimmäiset intialaiset ja persialaiset astronomiset kirjoitukset arabian kielelle.

Viisauden talo

Tekstien kääntämisen ja tieteiden edistymisen kannalta merkitykseltään ratkaisevaksi muodostui 800-luvun alussa Bagdadiin perustettu kääntämisen ja tutkimuksen keskus Viisauden talo. Sinne kutsuttiin alkuun pääasiassa kristittyjä oppineita, jotka käänsivät kalifin ja muiden suojelijoiden taloudellisen tuen turvissa runsaasti valloitetuilta alueilta ja Bysantista hankittuja intialaisia ja kreikkalaisia matemaattisia tekstejä. Kääntäminen ja tekstien hankinta koettiin niin tärkeäksi, että kalifit lähettivät tarkoitusta varten varustettuja retkikuntia ympäri valtakuntaa tehtävänänsä tuoda tärkeitä tieteellisiä tutkielmia Bagdadiin käännettäväksi ja säilytettäväksi. Mm. Eukleiden, Arkhimedeksen, Apolloniuksen, Diofantoksen ja Ptolemaioksen tekstejä käännettiin. Viisauden taloon kerääntyi lopulta niin suuri määrä kirjoja, että kirjastoa voi pitää lähes tarunhohtoisen Aleksandrian kirjaston tasoisena. Erityisesti kiinalaisten sotavankien mukana siirtynyt paperinvalmistuksen taito edesauttoi laajan kirjaston syntymistä. Viisauden talossa myös laadittiin ensimmäinen aihealueittainen indeksointijärjestelmä, nykyisten kirjastoluetteloiden esikuva.

Varhaiset todisteet

Ensimmäinen kirjallinen todistus intialaisen lukujärjestelmän leviämisestä tulevan arabivaltakunnan alueelle on vuodelta 662, kun vain hieman ennen islamilaisten armeijan saapumista syyrialainen piispa Severus Sebokt mainitsee kirjoituksissaan, että hindut ovat keksineet taidokkaan menetelmän, jonka avulla on mahdollista laskea käyttäen vain yhdeksää numeromerkkiä. Intialaisten numerojärjestelmä tunnettiin ainakin joillain Lähi-Idän alueilla jo ennen sen siirtymistä arabeille 700-luvulla. Arabihistorioitsija Ibn Khaldun kirjoittaa teoksessaan *Prolegomena* (1390), että vuonna 773⁶ saapui ensimmäisen kerran intialaisten oppineiden joukko kalifi al-Mansurin hoviin Bagdadiin mukanaan tietämys numerojärjestelmästä. Siten viimeistään 770-luvulla arabioppineet tulivat tuntemaan desimaalisen paikkajärjestelmän, luutavasti ainakin joitain vuosikymmeniä aiemmin.

1.5.1 Al-Khwarizmi ja intialaisten numeromerkkien leviäminen

Oppi desimaalijärjestelmästä levisi vähitellen yhä laajemmalle alueelle ja alkoi korvata aikaisemmin käytettyjä järjestelmiä. Tärkein yksittäinen ja samalla varhaisin teos, josta meillä on yksityiskohtaisia tietoja on Muhammad ibn Mūsā al-Khwārizmī (n. 780-850) Viisauden talossa 820-luvulla kirjoittama *Kitāb al jamī' wa'l tafriq bi hisab al hind* (Kirja lisäämisestä ja vähentämisestä hindujen tavalla). Kirjassa, josta tuli kalifikunnassa valtaisan suosittu ja jonka vaikutuksesta tietämys desimaalijärjestelmästä levisi Muhammedin seuraajien valtakunnassa al-Khwārizmī esittelee desimaalijärjestelmän alkeista alkaen yhdessä useiden esimerkkilaskujen kanssa. Teos on alkuperäisessä muodossa hävinnyt, mutta siitä on säilynyt useita latinankielisiä käännöksiä, mm. Robert Chesterlāisen 1100-luvulla

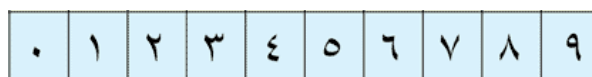
⁶ Smith & Karpinski, s. 92

laatima. Al-Khwarizmin kadonnan työn lisäksi arabit laativat muitakin aihetta käsitteleviä teoksia, joista vanhin arabiankielellä säilynyt on laadittu 900-luvun alussa Damaskossa⁷.

Siirtymä uuteen järjestelmään ei kuitenkaan sujunut kitkatta. Kutein usein uusien ajatusten levitessä käy, joillain alueilla halutaan pitäytyä tiukasti vanhassa tutussa näkemättä uuden keksinnön etuja. Näin tietenkin kävi numerojärjestelmänkin kanssa, jota joillain alueilla hyljeksittiin ja jopa vastustettiin aktiivisesti. Muutamassa sadassa vuodessa arabit olivat kuitenkin omaksuneet järjestelmän.

Arabialaiset numerot

Intialaisilla oli useita kymmeniä variaatioita numeromerkeistä. Numeromerkkien siirtymäreittiä intialaisilta arabeille on siten mahdotonta jäljittää tarkkaan. On kuitenkin nykyisin tiedossa, että arabi-imperiumin itä- ja länsiosissa numerojärjestelmä otettiin käyttöön merkkien osalta hieman erilaisissa muodoissa. Merkkien läntiset muodot siirtyivät Eurooppaan, joten useissa Lähi-idän valtioissa, kuten Egyptissä, Irakissa, Iranissa, Jordaniassa ja Saudi-Arabiassa on käytössä meidän merkeistämme poikkeavat numeromerkit (kuva 8). Näiden kahden päälinjan lisäksi numeromerkkien kirjoitusasuissa oli runsaasti paikallista vaihtelua.⁸

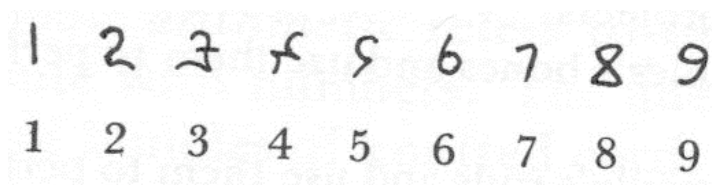


Kuva 8. Modernit arabialaiset (itäarabialaiset) numeromerkit. Ensimmäisenä on luku nolla.

Hiekkanumerot

Imperiumin läntisessä osassa eli mm. nykyisen Espanjan alueella otettiin käyttöön ilmeisesti Nāgarī-numeroista johdetut Gobar- eli hiekkanumerot 800- ja 900-lukujen aikana. Nimitys tulee arabien käytössä olleesta pienestä sylissä pideltävästä taulusta tai laudasta, jolle levitettiin hienojakoista hiekkaa ja jota käytettiin hiekan levittämisen jälkeen kirjoitusalusena. Useat hiekkanumeroista ovat jo nykyisin käytössä olevien näköisiä, suurimpien erojen löytyessä numeroista 4 ja 5 (kuva 9).

Näin siis 900-luvun lopulla myös Euroopan mantereella, Pyreneiden niemimaalla, käytettiin intialaista tai intialais-arabialaista numerojärjestelmää. Numeromerkitkin muistuttivat jo melko paljon nykyisiä numeromerkkejä. Pian niiden Espanjaan saapumisen jälkeen myös kristillinen latinankielinen Eurooppa sai ensikosketuksen niihin.



Kuva 9. Länsi-arabialaisia Gobar- eli hiekkanumeroita. Merkeissä oli kuitenkin huomattavaa paikallista vaihtelua. Lähde: Bunt, Jones, Benedict, s. 226

⁷ Saidan A S.: The Earliest ..., s 475

⁸ Gandz, The origin of the ghubar..., s. 14
erkki.luoma-aho@jkl.fi

Taulukko 1. Intialaisen numerojärjestelmän kehittyminen ja leviäminen

Aika	Tapahtuma
200-luku eKr.	Brāhmī-numerot ovat yleisesti käytössä.
300-500 –luvut jKr.	Gupta-numerot kehittyvät Brāhmī-numeroista.
400-luku	Paikkajärjestelmä kehittyy.
600-luku	Nāgarī-numerot kehittyvät Gupta-numeroista.
660-luku	Syyrialainen piispa Severus Sebokt mainitsee intialaisten käyttävän 9 numeromerkkiä.
770-luku	Bagdadin hoviin saapuu intialaisia oppineita mukanaan tietous numerojärjestelmästä.
820-luku	Al-Khwārizmī laatii kymmenjärjestelmästä ensimmäisen arabiankielisen oppikirjan.
900-luku	Länsi-arabialaiset hiekkalaskumerkit ovat laajasti käytössä muslimien parissa Pyreneiden niemimaalla Euroopassa.

1.5.2. Desimaaliset murtoluvut

Intialaiset eivät käyttäneet desimaalisia murtolukuja. Ensimmäinen kirjallinen lähde, josta ne löytyvät, on arabimatematiikko Abu'l-Hasan al-Uqlīdisīn Damaskoksessa vuosina 952-953 kirjoittama kirja *Kitāb al-fusul fi al-hisab al-Hindī* (Kirja Hinduaritmetiikasta). Kirja on neliosainen aritmetiikan opas, jossa esitellään laskeminen intialaisilla numeroilla. Kirjoittaja suosittelee paperin käyttöä ja sellaisia algoritmeja, joita käyttäen kaikki välivaiheet säilyvät kenen tahansa tarkistettavissa. Paperin valmistus oli aloitettu Bagdadissa jo 700-luvun lopulla. Kirjan toisessa osassa hän esittelee desimaaliset murtoluvut. Ne eivät ilmeisesti ole al-Uqlīdisīn oma, vaan jonkin häntä edeltäneen arabimatematiikon keksintö. Al-Uqlīdisī käyttää tekstissä myös desimaalierotinta, pientä pystysuoraa viivaa yksiköiden paikan ilmaiseamiseen. Desimaalisten murtolukujen keskeisin merkitys on siinä, että niillä voidaan laskea täsmälleen samoin kuin kokonaisluvuilla ja vasta laskun lopussa si-joitetaan desimaalierotin kohdalleen. Tämä ominaisuus on mukana jo Al-Uqlīdisīn kirjassa. Hän esimerkiksi kuvaa kuinka luku 19 puolitetaan viisi kertaa, jolloin hän saa tulokset $9'5$, $4'75$, $2'375$, $1'1875$ ja $0'59375$. Jostain syystä al-Uqlīdisī ei kuitenkaan sovello desimaalilukujaan laajasti, vaan esimerkiksi jakolaskuja hän tekee vain luvuilla 2 ja 10. Tämä voi johtua jopa siitä, että hän ei osaa soveltaa yleisesti jakolaskualgoritmia desimaalilukuihin. Molemmat jakajat ovat niin helppoja, että varsinaista jakolaskualgoritmia ei edes tarvitse käyttää, jotta luvun puolittaminen tai kymmenesosan selvittäminen onnistuu.

Seuraava tärkeä desimaalilukuja käsittelevä kirja on al-Samaw'al Ibn Yahyā al-Maghribīn (1125-1174) aritmetiikan kirja vuodelta 1172. Kirjassa hän esittelee laajasti desimaalilukujen käyttöä likiarvojen laskemisessa. Hän jopa ymmärsi ajatuksen, että desimaaliluku voi lähentyä rajatta jotain tarkkaa tulosta. Al-Samaw'al in teoksen hieman yllättäväkin puute oli, että hän ei käyttänyt siinä edeltäjiensä mallin mukaisia intialaisia numeromerkkejä, vaan ilmaisi luvut sanallisesti.

Ensimmäinen kirja, jossa on sekä laaja desimaalilukujen esittely että intialaiset numeromerkit on Jamshīd al-Kāshīn (1380-1429) *Miftāh al-hisāb* (Laskijan avain). Kirja on itse asiassa matematiikan eri alojen kokoomateos, sisältäen aritmetiikkaa, algebraa ja geometriaa. Al-Kāshīn teoksessa desimaaliluvut ovat jo luonteva osa aritmetiikkaa ja al-Kāshī on kehittänyt niille myös hyvän merkintätavan.

Desimaalilukujen leviämisen esteeksi arabeilta Eurooppaan muodostui lopulta se, että al-Kāshīn tai muiden teoksia ei ehditty kääntää ennen kuin desimaaliluvut ”keksittiin uudestaan” Euroopassa 1500-luvun lopulla.

1.5.3. Numeromerkit kautta maailman

Sanotaan, että ihminen on kehittänyt aakkoset vain kerran. Numeromerkkien osalta tilanne ei ole aivan samankaltainen, vaan intialais-arabialaisen numeromerkkien lisäksi on useita näistä riippumattomia numeroiden merkitsemistapoja. Ohessa taulukkomuodossa erilaisia eri maissa nykyisin käytössä olevia numeromerkkejä. Jo-kaisessa maassa lukujärjestelmä on sama kuin meillä eli kymmenjärjestelmä.

Taulukko 2. Erilaisia moderneja käytössä olevia numeroiden 0-9 merkkejä

Cardinal Numbers in Hindi			Normal	Value
1	ek	एक	○	0
2	do	दो	—	1
3	tin	तीन	二	2
4	car	चार	三	3
5	paanc	पांच	四	4
6	chah	छह	五	5
7	saat	सात	六	6
8	aaTh	आठ	七	7
9	nau	नौ	八	8
10	das	दस	九	9

1.6 Algebra syntyy

1.6.1 Al-Khwarizmin merkitys algebrallisen osaamisen leviämässä

Algebran kehittymisen ja leviämisen kannalta merkittävin ja tunnetuin arabimatemaatikoista on al-Khwarizmi, jonka merkitykseen käyttämämme intialais-arabialaisen numerojärjestelmän leviämässä jo tutustuimme. Jo ennen intialaisten kehittämää numerojärjestelmää käsittelevää kirjaansa al-Khwarizmi laati algebran oppikirjan *al-Kitāb al-mukhtaṣar fī ḥisāb al-jabr wa al-muqābala* (Palauttamisen ja tasapainottamisen laskennon tiivistetty kirja) noin vuonna 820. Kirjan otsikko antaa olettaa, että al-Khwarizmi ei ollut kirjan sisällön alkuperäinen kehittäjä. Al-Khwarizmi toteaa esipuheessa, että hän laati kalifi Al-mamūnin (768-833) pyynnöstä oppaan

”Palauttamisen ja tasapainottamisen tieteestä, rajoittuen siihen mikä on hyödyllisintä aritmetiikassa, kuten perinnönjaossa, osituksissa, lakiasioissa, kaupankäynnissä, maanmittauksessa, kanavien kaivamisessa, geometrisissa laskelmissa ja vastaavissa tilanteissa.”⁹

Al-Khwarizmi suhtautui aiheeseen hyvin käytännönläheisesti. Tämä käy ilmi jo kirjan avaussanoissa:

”Pohtiessani mitä ihmiset yleensä haluavat laskeissaan havaitsin, että se on aina luku.”

Al-Khwarizmin kirja koostuu kolmesta osasta. Ensimmäisessä osassa hän opettaa yksityiskohtaisten esimerkkien avulla kuinka toisen asteen yhtälö ratkaistaan. Hän myös perustelee osan ratkaisumenetelmistä geometrisesti esimerkkien kautta. Al-Khwarizmi kuvailee sekä yhtälöt että niiden ratkaisut sanallisesti. Hän käyttää sekä ratkaisumenetelmien esittelyssä että niiden perusteluissa vain ja ainoastaan esimerkkilukuja. Hän ei kirjoita edes numeroille intialaisia numeromerkkejä, vaikka ne kirjan kirjoittamisen aikaan jo tunnettiin Bagdadissa.

Aivan kirjan alussa Al-Khwarizmi toteaa, että

”palauttamisen ja tasapainottamisen laskennossa tarvitaan kolmenlaisia numeroita: juuria, neliöitä ja yksinkertaisia numeroita”¹⁰.

Tuntemattomasta hän käyttää lisäksi nimitystä *shay* (asia¹¹) ja luvun neliöstä nimitystä dirham, joka oli paikallinen rahayksikkö 800-luvulla.

Hän opettaa myös kuinka binomi kerrotaan monomilla ja binomilla sekä negatiivisiin lukuihin liittyvät merkkisäännöt¹². Esimerkiksi kertolasku $(10 - x)^2$ sujuu al-Khwarizmin ohjeiden mukaan seuraavasti:

”Jos tapaus on: kymmenen miinus asia pitää kertoa kymmenen miinus asialla, niin toimi näin: kymmenen kertaa kymmenen on sata; miinus asia kertaa kymmenen on miinus kymmenen asiaa; ja uudestaan, miinus asia kertaa kymmenen on miinus kymmenen asiaa. Mutta miinus asia kerrottuna miinus asialla on positiivinen neliö. Tulo on siten sata ja neliö miinus kaksikymmentä asiaa.”¹³

Kirjan toinen osa sisältää erilaisia käytännöllisiä geometrisia pinta-alojen ja tilavuuksien määrittämiä. Kolmannessa ja laajimmassa osassa al-Khwarizmi tarkastelee erilaisia toinen toistaan monimutkaisempia islamilaisen lain mukaisia perinnön- ja omaisuudenjakotehtäviä. Tätä osaa ei käännetty aluksi lainkaan latinaksi, sillä tehtävät olivat länsimaisen oikeuden piirissä elävälle hyödyttömiä.

⁹ Rosen, s. 3

¹⁰ Rosen, s. 5

¹¹ Frederic Rosenin käännös (v.1831): *thing*

¹² ”negatiivinen luku kerrottuna positiivisella luvulla on negatiivinen ja negatiivinen luku kerrottuna negatiivisella luvulla on negatiivinen”

¹³ Rosen, s. 24

Yhtälönratkaisu

Al-Khwarizmi jakaa toisen asteen yhtälöt kuuteen erilaiseen tyyppiin¹⁴:

1. Neliöt ovat yhtä suuria kuin juuret ($ax^2 = bx$)
2. Neliöt ovat yhtä suuria kuin numerot ($ax^2 = c$)
3. Juuret ovat yhtä suuria kuin numerot ($bx = c$)
4. Neliöt ja juuret ovat yhtä suuria kuin numerot ($ax^2 + bx = c$)
5. Neliöt ja numerot ovat yhtä suuria kuin juuret ($ax^2 + c = bx$)
6. Juuret ja numerot ovat yhtä suuria kuin neliöt ($ax^2 = bx + c$)

Nämä kuusi yhtälötyyppiä sisältävät kaikki mahdolliset tilanteet, joissa toisen asteen yhtälön termien kertoimet ovat positiiviset eli yhtälöllä on positiivisia juuria. On tärkeää huomata, että vaikka al-Khwarizmi käsittelee sujuvasti negatiivisia lukuja, niin hän ei kuitenkaan pidä ”oikeina lukuina” samassa mielessä kuin positiivisia rationaalilukuja. Negatiivinen luku ei voinut olla yhtälön ratkaisu. Esimerkiksi tyyppin 5 yhtälön ratkaisuoheissa hän huomauttaa, että

”jos olet puolittanut juurten lukumäärän ja kertonut puolikkaan itsellään ja jos tulo on vähemmän kuin neliöiden lukumäärä, niin tapaus on mahdoton¹⁵.”

Al-Khwarizmi ei kelpuuta edes lukua nolla ratkaisuksi. Esimerkiksi yhtälön $x^2 = 5x$ ratkaisuksi kelpaa vain luku 5, al-Khwarizmi kirjoittaa:

”Neliö on yhtä suuri kuin viisi juurta; neliön juuri on viisi ja neliö on kaksikymmentäviisi, mikä on yhtä suuri kuin viisi kertaa juuri.”¹⁶

al-jabr

Negatiiviset luvut eivät olleet ylitsepääsemätön ongelma. Itse asiassa palauttamisen tiede *al-jabr* on negatiivisia lukuja tai monomia sisältävien yhtälöiden muokkaamista muotoon, jossa kaikki termit ovat positiivisia. *Al-jabr* merkitsee ”palauttamista paikalleen”, ”asettamista ennalleen” ja ”viimeistelyä”. Yhtälönratkaisussa operaatio *al-jabr* tarkoitti negatiivisten termien hävittämistä siirtämällä ne yhtäsuuruusmerkin puolelta toiselle. Esimerkiksi yhtälön $x^2 = 40x - 4x^2$ al-Khwarizmi palauttaa 1. tyyppin yhtälöksi $5x^2 = 40x$ ”vähentämällä” neljä neliötä oikealta puolelta ja lisäämällä ne vasemmalle puolelle¹⁷.

al-muqabala

Sana *wa* merkitsee ”ja”, joten *al-jabr wa al-muqābala* koostuu kahdesta osasta, joista *al-muqabala* merkitsee ”tasapainottamista”, joka tapahtuu hävittämällä yhtäsuuruusmerkin molemmilta puolilta löytyvät samat positiiviset termit. Esimerkiksi yhtälön $50 + x^2 = 29 + 10x$ al-Khwarizmi tasapainottaa 5. tyyppin yhtälöksi $21 + x^2 = 10x$ *al-muqābala* käyttäen¹⁸.

Al-Khwarizmi osaa myös sekä kertoa että jakaa yhtälön kokonaisluvulla ja jopa lausekkeella. Esimerkiksi yhtälön $5x^2 = 40x$ hän osaa sieventää muotoon $x^2 = 8x$, yhtälön $\frac{2}{3}x^2 = 5$ muotoon¹⁹ $x^2 = 7\frac{1}{2}$ ja yhtälön $\frac{x}{x+2} = \frac{1}{2}$ muotoon²⁰ $\frac{1}{2}x + 1 = x$.

¹⁴ Rosen, s. 5-13

¹⁵ Jos yhtälössä $x^2 + c = bx$ on voimassa $(b/2)^2 < c$, niin yhtälö on mahdoton.

¹⁶ Rosen, s. 6; koska $5^2 = 25$, niin $x = 5$ ($x = 0$ ei toteuta al-Khwarizmin mukaan yhtälöä)

¹⁷ Rosen, s. 36

¹⁸ Rosen, s. 40

¹⁹ Rosen, s. 62

²⁰ Rosen, s. 63

Tavanomaiset aritmeettiset operaatiot yhdessä toimenpiteiden *al-jabr* ja *al-muqābala* kanssa olivat riittäviä muokkaamaan jokaisen positiivisia juuria antavan toisen asteen yhtälön kuuteen perustapaukseen.

Tyyppin 4. yhtälö

Parhaan kuvan al-Kwharizmin työn luonteesta saa lukemalla hänen omaa tekstiään. Tutustutaan seuraavaksi 4. tyyppin yhtälön ratkaisuoheeseen. Tässä, kuten muissakin tapauksissa, al-Khwarizmi esittelee yleisen ratkaisumenetelmän esimerkin avulla. Esimerkkinä toimii yhtälö $x^2 + 10x = 39$:

"Yksi neliö ja kymmenen juurta ovat kolmekymmentäyhdeksän dirhamia. Ratkaisu on tämä: puolita juurten lukumäärä, mikä tässä tilanteessa on viisi. Kerro tämä itsellään; tu-
los on kaksikymmentäviisi. Lisää tämä kolmeenkymmeneen yhdeksään, summa on kuusi-
kymmentäneljä. Ota nyt juuri tästä, mikä on kahdeksan ja vähennä siitä puolet juurten
lukumäärästä eli viisi; jäännös on kolme. Tämä on neliön juuri, jota etsit. Itse neliö on
yhdeksän."

Sanallinen menetelmä vastaa lauseketta $x = \sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2 + 39} - \frac{10}{2}$ eli yleisesti lauseket-

ta $x = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} - \frac{b}{2}$ yhtälön $x^2 + bx = c$ ratkaisulle.

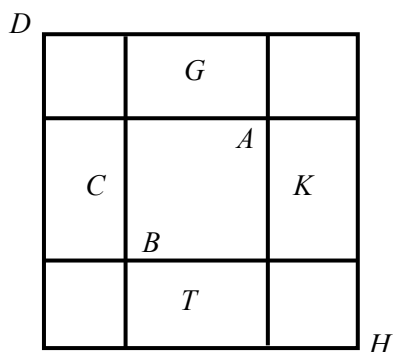
Perustelut tapaukselle 4

Kaikkien kuuden tapauksen ratkaisuoheet läpikäytyään al-Khwarizmi perustelee tapaukset 4, 5 ja 6 geometrisesti. Tutustutaan näistä tapauksen 4 perusteluihin, jotka ovat seuraavat:

"Kuviosta²¹ käy ilmi, että kyseessä on neliö, jonka sivut ovat tuntemattomat. Se esittää juuri sitä neliötä, jonka, tai jonka juuret, tahdot tietää. Tämä on kuvio AB, jonka jokaista sivua voidaan pitää juurina; ja jos sinä kerrot jonkun näistä sivuista jollakin numerolla, niin tätä numeroa voidaan pitää niiden juurten lukumääränä, jotka lisätään neliöön. Jokainen neliön sivu esittää neliön juurta; ja kuten tässä tapauksessa, koska juuret olivat yhteydessä neliöön, voimme ottaa yhden neljäsosan kymmenestä, joka on kaksi ja puoli, ja lisätä se jokaiseen kuvion neljästä sivusta. Siten alkuperäinen neliö lisättyinä neljällä suorakulmiolla, joiden pituutena on neliön sivun pituus ja leveytenä kaksi ja puoli; ne ovat suorakulmiot C, G, T ja K. Meillä on nyt neliö, jolla on yhtä pitkät, mutta tuntemattomat sivut. Mutta jokaisesta neljästä kulmasta puuttuu neliö, jonka sivu on kaksi ja puoli. Jotta voimme vastata tähän puutteeseen ja täydentää kuvio neliöksi meidän täytyy lisätä (minkä me itse asiassa olemme jo tehneetkin) neljä kertaa neliö, jonka sivu on kaksi ja puoli eli yhteensä kaksikymmentäviisi. Me tiedämme, että ensimmäinen kuvio, nimittäin, neliö yhdessä sitä ympäröivien suorakulmioiden kanssa, jotka esittävät kymmentä juurta, on yhtä suuri kuin kolmekymmentäyhdeksän numeroa. Me lisäämme tähän kaksikymmentäviisi, mitkä ovat neljä neliön A B nurkkiin lisättyä neliötä, jolloin suuri kuvio D H on täydellinen ja me tiedämme, että yhdessä tämä tekee kuusikymmentäneljä. Tämän suuren neliön yksi sivu on sen juuri, joka on kahdeksan. Jos me vähennämme kahdesti kymmenen neljäsosan, se on viisi, kahdeksasta, jotka ovat kaksi suuren kuvion D H sivun ääripäät, niin tämän sivun jäännös on kolme, joka on kuvion juuri tai alkupe-
räisen neliön A B sivu. On huomattava, että me puolitimme juurten lukumäärän ja li-
säsimme puolikkaan itsellään kerrottuna lukuun kolmekymmentäyhdeksän, saadaksem-
me neliön täydennettyä neljästä kulmastaan; koska jokaisen luvun neljäsosa kerrottuna
itsellään ja tämän jälkeen luvulla neljä on sama kun kertoisimme luvun puolikkaan itsel-
lään²². Tämän mukaisesti me kerroimme vain juurten lukumäärän puolikkaan itsellään,
sen sijaan että olisimme kertoneet neljäsosan itsellään ja sitten neljällä."

²¹ kuva 10

²² $4 \cdot \left(\frac{b}{4}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2$



Kuva 10. Al-Khwarizmin alkuperäinen kuvio neljännen tapauksen perusteluissa.

Esimerkkiprobleema

Tutustutaan lopuksi vielä yhteen al-Khwarizmin esimerkkiprobleemaan, jonka hän esittää ensimmäisenä neljänteen tapaukseen liittyvänä varsinaisena laskutehtävänä:

"Olen kertonut asian kolmasosan ja yhden dirhemin asian neljäsosalla ja yhdellä dirhemillä jolloin tulos oli kaksikymmentä²³. Lasku: Kerro asian kolmasosa asian neljäsosalla; se on puolikas ja kuudesosa neliöstä. Lisäksi kerro yksi dirhemi asian kolmasosalla, se on asian kolmasosa; ja yksi dirhemi asian neljäsosalla, se on neljäsosa asiaa; ja yksi dirhemi yhdellä dirhemillä, se on yksi dirhemi. Tulos on tämä: puolikas neliön kuudesosasta, asian kolmannes, asian neljännes ja yksi dirhemi on yhtä suuri kuin kaksikymmentä dirhemiä. Nyt yksi dirhemi näistä kahdesta kymmenestä, jäljelle jää yhdeksätoista dirhemiä, joka on yhtä suuri kuin puolikas neliön kuudesosasta, asian kolmasosa ja asian neljäsosa. Tee nyt neliöstäsi kokonainen: tee se kertomalla kaikki mitä sinulla on kahdellatoista. Siten sinulla on neliö ja seitsemän juurta, yhtä suuri kuin kaksisataa ja kaksikymmentäkahdeksan²⁴. Puolita juurten lukumäärä ja kerro se itsellään, se on kaksitoista ja neljäsosa. Lisää tämä numeroihin, se on, kahteensataan kahteenkymmeneen kahdeksaan; summa on kaksisataa neljäkymmentä ja neljännes. Laske tämän juuri, se on viisi toista ja puoli. Vähennä tästä juurten puolikas, se on, kolme ja puoli. Jäljelle jää kaksitoista, joka on vaadittu neliö. Tämä kysymys johtaa sinut yhteen tapauksista, nimittäin 'neliöt ja juuret ovat yhtä suuria kuin numerot.'"

Algebran merkitys

Al-Khwarizmin laatima algebran oppikirja saavutti suuren suosion, eikä varmasti vähiten johtuen sen selkeästä esitystavasta ja runsaasta numeeristen esimerkkien määrästä (40 kpl). Kirjasta tosin puuttui al-Khwarizmin lupaama käytännöllisyys toisen asteen yhtälöiden osalta, sillä useimmat hänen esimerkkinsä alkavat sanoilla "luku jaetaan kahteen osaan...". Käytännölliset geometriset laskut sekä perinnönja-

²³ Modernein merkinnöin al-Khwarizmin lasku etenee näin:

$$\left(\frac{1}{3}x+1\right)\cdot\left(\frac{1}{4}x+1\right)=20$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}x+1=20$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}x=19$$

$$x^2+7x=228$$

$$x=\sqrt{12\frac{1}{4}+228}-3\frac{1}{2}=\sqrt{240\frac{1}{4}}-3\frac{1}{2}=12$$

²⁴ Tähän saakka al-Khwarizmi vain muokkaa yhtälöä ja vasta kun on saanut sen perusmuotoon hän ryhtyy käyttämään aiemmin opettamaansa ja perustelemaansa ratkaisumenetelmää.

on ja osituksen probleemat ratkeavat joko ilman yhtälöä tai ensimmäisen asteen yhtälön avulla.

Termi algebra

Latinan kielelle algebran kirja käännettiin noin 300 vuotta kirjoittamisensa jälkeen 1100-luvulla. Kirjan nimen arabian kieleen tällöin vakiintuneet ilmaisut *al-jabr* ja *al-muqābala* sopeutettiin latinan kieleen kääntämättä niitä. Niinpä algebran alkeet tultiin tuntemaan Euroopassa kirjan *Liber algebrae et almucabala* välityksellä. Samalla yhtälönratkaisun tiede opittiin tuntemaan sanalla ”algebrae” eli ”algebra”.

Abu Jafar Muhammed ibn Musa al-Khwarizmi (n.780 - 850)



Al-Khwarizmin tarkkaa synnyinaikaa tai paikkaa ei ole tiedossa, kuten ei myöskään tarkkaa kuolinhetkeä. Varmuudella tiedetään hänen syntyneen ennen vuotta 800 ja hänen arvellaan eläneen ainakin vuoteen 847 saakka. Lisänimi al-Khwarizmi, millä nimellä hänet länsimaissa tunnetaan parhaiten, viittaa paikkaan nimeltä Khwarizm (Khorezm), jonka sijaitsee Aralin meren eteläpuolella Keski-Aasiassa Uzbekistanilaisen Khivan kaupungissa ja sen ympäristössä. Täältä hänen esi-isänsä vaelisivat valtakunnan keskukseen luultavimmin jo ennen hänen syntymäänsä, sillä arabihistorioitsija al-Tabari kirjoittaa hänen olleen kotoisin eräästä Bagdadia lähellä olevasta pikkukaupungista.

Al-Khwarizmi tuli Viisauden talon jäseneksi al-Mamunin ollessa kalifina (vuosina 813-833). Viisauden talon perusti jo al-Mamunin edeltäjä, kalifi Harun al-Rashid, mutta al-Mamunin aikaan Viisauden talo koki kukoistuskautensa, sillä vapaamielinen kalifi suosi ja tuki tieteellistä tutkimustyötä pitäen oppineisuutta korkeassa arvossa. Al-Khwarizmi omisti Algebran oppikirjansa kalifille, jota hän suorastaan ylistää (Allahin ja Muhammedin lisäksi) erityisesti siitä, että kalifi on rohkaissut ja tukenut häntä kirjan kirjoittamisessa.

Vaikka al-Khwarizmin omia tieteellisiä saavutuksia on arvioitu (mukaan lukien mm. tähtitiede ja maantiede) parhaimmillaankin keskinkertaisiksi, niin hän onnistui olemaan oikeaan aikaan liikkeellä. Hänen algebran kirjansa kohosi vuosisatojen ajaksi ensin islamilaisen ja myöhemmin myös latinankielisen maailman tärkeimmäksi algebran oppikirjaksi. Hänen intialaiset numeromerkit esitellyt kirjansa oli tärkein yksittäinen teos, jonka kautta Euroopassa opittiin tuntemaan nykyaikainen kymmenjärjestelmä.

Al-Khwarizmin elämän loppupuolella, kalifi al-Wathiqin (kuoli vuonna 847) sairastuessaan äärellä, kerrotaan tapahtuneen seuraava erikoinen tapaus: kalifin sairastuttua hän kutsui kokoon oppineita miehiä, al-Khwarizmi mukaan lukien, laatimaan hänelle horoskoopin, jotta selviäisi olisiko tauti kuolemaksi. Miehet laativat horoskoopin, joka lupasi kalifille elinaikaa vielä 50 vuotta. Kalifi kuoli kuitenkin 10 päivää horoskoopin laatimisesta.

Algebran alkuperästä

Paljon on pohdittu al-Khwarizmin esittelemän algebran alkuperää ilman yksimielistä lopputulosta. Kirjan selkeä esitystapa ja geometriset perustelut viittaisivat Kreikkaan, yhtymäkohtia on erityisesti Eukleideen Alkeiden toisen kirjan ”geometrisen algebran” kanssa. Toisaalta pitäytyminen numeroissa ja ylipäätään numeroiden pitäminen lähtökohtana ei sovi Kreikan yleisiä periaatteita korostavaan matemaattiseen perinteeseen. Arabimatemaatikot saivat käsiinsä kuitenkin jo 700-luvun lopulta alkaen kreikankielisiä matemaattisia tekstejä, joten on luultavaa, että Kreikan matematiikan, erityisesti Alkeiden, vaikutteet ovat kirjassa läsnä.

Al-Kwharizmin lähestymistapa ja geometriset kuviot muistuttavat myös Babylonialaista leikkaa-liimaa-geometriaa, mutta ajallinen (yli 2500 vuotta) ja kulttuurinen välimatka on niin suuri, että suoraa siirtymää ei ole voitu osoittaa – huolimatta siitä, että muinainen Babylon sijaitsi likimain samalla paikalla kuin nykyinen Bagdad.

Al-Kwharizmin työssä on lisäksi Intialaista alkuperää muistuttavia piirteitä, mm. etumerkillisten lukujen kertolaskun merkkisäännöt löytyvät ensimmäisen kerran intialaisen Brahmaguptan tähtitieteellisistä töistä 600-luvun puolivälissä eli noin 150 vuotta ennen al-Kwharizmin kirjan kirjoitusajankohtaa. Intialaista alkuperää olevia matemaattisia tekstejä tuotiin Bagdadiin käännettäväksi jo 700-luvun puolivälistä alkaen, mm. juuri Brahmaguptan kirja oli yksi ensimmäistä arabian kielellä käännettyistä tieteellisistä kirjoituksista. Luultavimmin algebra onkin arabien itse kehittämä menetelmä, jonka rakennusaineina ovat olleet ainakin kreikkalainen ja intialainen matemaattinen perintö, mahdollisesti myös babylonialainen.

1.6.3 Al-Khwarizmin jälkeinen aika

Thabit ibn Qurra

Jos al-Kwharizmin geometrysten perusteluiden alkuperä on kiistanalainen, niin noin 50 vuotta tämän työn kirjoittamisen jälkeen Thabit ibn Qurra (836-901) täydensi al-Kwharizmin *Algebran* yksittäisiin esimerkkeihin pohjautuvat perustelut täsmällisiksi ja yleisiksi Eukleideen esimerkin mukaan. Hän laati aiheesta kirjan *Qawl fi tashih masa'il al-jabr bi l-barahin al-handasiya* (Algebrallisten probleemien varmistamisesta geometrisin todistuksin), jossa hän mainitsee erityisesti, että Alkeiden toinen kirja on täysin yhtenevä al-Kwharizmin algebran kanssa. Kirjan II luseen 5 avulla hän ratkaisi tapauksen $x^2 + c = bx$ ja luseen 6 avulla tapaukset $x^2 + bx = c$ ja $x^2 = bx + c$.

Thabit ibn Qurra (836-901)



Thabit ibn Qurra syntyi Harranissa, nykyisen Turkin alueella. Siellä hän vietti nuoruutensa rahanvaihtajana. Hän ja hänen koko sukunsa oli erikoisen tähtiä palvovan uskonsuunnan jäsen. He kutsuivat itseään saabalaisiksi koraanista löytyneen maininnan²⁵ vuoksi ja välttivät pakokäännytyksen islamiin.

Thabit ibn Qurran äidinkieli oli syyria, mutta hän osasi myös kreikkaa ja arabiaa. Kerrotaan, että eräs käsikirjoitusten keruumatkalla kalifin lähettämänä ollut Viisauden talon jäsen vaikutti mm. hänen kielitaidostaan ja kutsui hänet n. 870 Bagdadiin. Siellä hän asui kutsujansa talossa ja ryhtyi opiskelemaan ja kääntämään muinaisia kreikkalaisia matemaattisia tekstejä tämän suojeluksessa. Hän käänsi Apolloniuksen, Arkhimedeen, Eukleideen ja Ptolemaioksen kirjoituksia, joista mm. muutama Arkhimedeen ja Apolloniuksen töistä on säilynyt vain Thabit ibn Qurran arabiankielisenä käännöksenä.

Melko pian kreikankielisiin teksteihin tutustuttuaan ja ne omaksuttuaan Thabit ibn Qurra ryhtyi itsekkin tutkimaan ja kirjoittamaan matematiikasta, erityisesti geometriasta, sekä myös lääketieteestä, fysiikasta, tähtitieteestä ja filosofiasta. Monipuolisuutensa vuoksi häntä pidetään yhtenä merkittävimmistä 800-luvulla vaikuttaneista tiedemiehistä.

²⁵ II 62 ja XXII 17
erkki.luoma-aho@jkl.fi

Abu Kamil

Egyptiläinen abu Kamil (n. 850-930), jatkoi al-Kwharizmin algebrallisia perinteitä noin vuonna 900 kirjoittamallaan teoksella *Kitab fi al-jabr wa'l-muqabala*. Se on toiseksi vanhin kokonaisuudessaan säilynyt algebran kirja²⁶. Siinä hän liitti Thabit ibn Qurran tapaan yleiset Eukleideen geometriaan pohjautuvat perustelut al-Kwharizmin laskumenetelmille. Niiden lisäksi abu Kamil edistyi al-Kwharizmin työn tasosta ratkomalla huomattavasti vaikeampia yhtälöitä kuin edeltäjänsä. Eri-tyinen piirre hänen töissään oli irrationaalilukujen vapaa käsittely. Hän ei tehnyt eroa lukujen 2 , $\sqrt{8}$ tai $\sqrt{\sqrt{2}-1}$ välille. Esimerkiksi hän ratkaisee

$$(10-x)(10-x) - x\sqrt{8} = 40 \text{ saaden vastaukset } x = 10 + \sqrt{2} - \sqrt{42 + \sqrt{800}} \text{ ja}$$

$x = \sqrt{42 + \sqrt{800}} - \sqrt{2}$ ²⁷. Myös yhtälön $3\sqrt{x} - 4\sqrt{x-3\sqrt{x}} = 20$ ratkaisu, joka perustuu sijoitukseen $x = z^2$ ja neliöön korottamiseen²⁸ on osoitus Abu Kamilin taidois-
ta. Edes modernia merkintätapaa käyttäen kyseiset laskut eivät ole helppoja.

Monien huomattavan vaikeiden yhtälöiden, joita abu Kamil ratkaisi kirjansa lehdillä kaiken kaikkiaan 61,²⁹ lisäksi abu Kamil todistaa yleisesti geometrinen kuvioi-
den avulla kaksi jo al-Kwharizmin tuntemaa, mutta vain muutamilla esimerkkiluvuilla käsittelemää neliöjuurten sievennyssääntöä³⁰ $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ ³¹ ja

$$\sqrt{a : b} = \sqrt{a} : \sqrt{b}. \text{ Esimerkkinä säännöstä Abu Kamil laskee mm.}$$

$$\sqrt{10} : \sqrt{2} = \sqrt{10 : 2} = \sqrt{5} \text{ }^{32}. \text{ Abu Kamil todistaa lisäksi binomien kertolaskuun liittyv-$$

Näiden ”vanhojen” sääntöjen lisäksi abu Kamil esittelee ja todistaa neliöjuurten

summan ja erotuksen $\sqrt{a} \pm \sqrt{b} = \sqrt{a + b \pm 2\sqrt{ab}}$. Esimerkkinä hän laskee erotuksen

$$\sqrt{9} - \sqrt{4} \text{ lausekkeella } \sqrt{9 + 4 - 2\sqrt{9 \cdot 4}} = 1 \text{ ja summan } \sqrt{9} + \sqrt{4} \text{ lausekkeella}$$

$$\sqrt{9 + 4 + 2\sqrt{9 \cdot 4}} = 5. \text{ Tätä sääntöä sovelsivat myöhemmin mm. al-Karaji ja Leonardo Fibonacci}^{33}.$$

Abu Kamilin algebran kirja oli vielä yhdellä tavalla al-Khwarizmin kirjaa edistyneempi. Hänen yhtälöissään esiintyy, ensimmäisen kerran arabian kielellä³⁴, korkeampia potensseja aina kahdeksanteen saakka. Kahdeksatta potenssia hän kutsuu ”neliö neliö neliö neliöksi”. Hän siis laskee eksponentit yhteen eli muodostaa potenssin kertolaskun kautta. Seitsemättä potenssia hän ei käyttänyt, kuudetta potenssia hän kutsui ”kuutio kuutioksi”, viidettä potenssia ”kuutio neliöksi”, neljättä potenssia ”neliö neliöksi” ja kolmatta potenssia ”kuutioksi”³⁵.

Abu Kamil käyttää esikuvansa mukaan edelleen pelkää sanallista ilmaisua. Koska symboliikka ei löydy edes numeroiden osalta, niin juuria sisältäneiden yhtälöiden ratkaiseminen on vaatinut ”Egyptin laskijaksi” kutsutulta oppineelta melkoista taituruutta. On myös hyvä huomata hänen irrationaalilukujen suhteen osoittama ava-

²⁶ Oaks s. 405

²⁷ Levey, s. 146

²⁸ Levey, s. 122

²⁹ Levey, s. 18

³⁰ Levey, s. 72-76

³¹ ”Tästä asetan yleisen säännön. Kun numero kerrotaan numerolla, ota juuri tuloksesta; se on yhtä suuri kuin ensimmäisen luvun juuri kerrottuna toisen luvun juurella.” (Levey, s. 72)

³² Levey, s. 74

³³ Levey, s. 25 ja 76

³⁴ Diofantoksen työt olivat tässä vaiheessa vielä tuntemattomia arabimatemaatikoille, ne käännettiin ilmeisesti vasta 998.

³⁵ Levey, s. 18-19

rakatseisuus ja taipumus hyväksyä ne samaan asemaan positiivisten kokonaislukujen kanssa.

Al-Karaji

Alati lisääntyvä algebrallisten lausekkeiden monimutkaisuus pakotti arabialgebrikkot harkitsemaan muitakin vaihtoehtoja lausekkeiden kuvailuun kuin vain ”asia” tai ”neliö”. Kehitys ei kuitenkaan johtanut varsinaiseen symboliikan syntymiseen, vaikka abu’l-Wafan (n. 940-998) kääntämä Diofantoksen *Arithmetica*³⁶ oli tärkeä inspiraation lähde algebraa merkittävästi kehittäneelle arabimatematiikolle Abu Bakr al-Karajille (n.980-1030). Al-Khwarizmin retorisen algebran perintö kahlitsi hänen seuraajiaan liikaa. Al-Karajin työtä on kuvattu ”algebran aritmetisoimiseksi”. Al-Karajin seuraajansa al-Samarqandi kuvaa työnsä ja samalla Al-Karajin työn päämäärää näin:

”käyttää kaikkia niitä aritmeettisia välineitä tuntemattomien kanssa samaan tapaan kuin aritmetiikassa näitä välineitä käytetään tunnettujen kanssa.”³⁷

Tuloksena oli ensimmäinen monomien ja polynomien esitys.

Al-Karaji kirjoitti Bagdadissa vuoden 1000 tienoilla kirjan *al-Fakhri* (Ihmeellinen), joka oli omistettu visiiri Fakhr al-Mulkille. Abu Kamilin jo aiemmin käyttöön ottamia korkeampia potensseja hän nimitti aiemmasta konkreetista kuvakielestä poiketen ”järjestyksiksi”. Tällä uudella, vaikkakin edelleen sanallisella, tavalla kuvata potensseja hän havaitsi, että jokainen järjestys (x^n) kerrottuna vastaavalla osallaan ($1/x^n$) antaa tuloksen 1³⁸. Hän myös muotoili järjestyksille (vain positiivisille eksponenteille) seuraavat säännöt:

$$(1) \frac{1}{x} : \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2} : \frac{1}{x^3} = \dots$$

$$(2) \frac{1}{x} : \frac{1}{x^2} = \frac{x^2}{x} = \dots = \frac{1}{x^{n-1}} : \frac{1}{x^n} = \frac{x^n}{x^{n-1}}$$

$$(3) \frac{1}{x^n} \cdot \frac{1}{x^m} = \frac{1}{x^{n+m}} \quad (4) \frac{1}{x^n} \cdot x^m = \frac{x^m}{x^n}.$$

Al-Karaji rakensi näiden järjestyksiin liittyvien laskusääntöjen avulla monomien teorian (mm. kertolaskut) ja tämän jälkeen ”koostettujen suureiden” eli polynomien teorian esittämällä polynomien yhteen- vähennys- ja kertolaskulle yleiset säännöt. Polynomien jakolaskulle hän ei kuitenkaan löytänyt yleistä sääntöä, kuten ei polynomien juurillekaan, joskin hän osasi laskea juuren erityistapauksissa perustuen seuraavaan havaintoon: Koska monomien x_1 , x_2 ja x_3 summan neliö on

$(x_1 + x_2 + x_3)^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + (x_2^2 + 2x_1x_3) + 2x_2x_3 + x_3^2$, niin operaatio voidaan kääntää päätelemällä x_1 ja x_3 laitimmaisten termien neliöjuurista sekä jakamalla toinen tai toiseksi viimeinen kahdella ja termillä x_1 tai x_3 . Esimerkiksi polynomien $x^8 + 2x^6 + 11x^4 + 10x^2 + 25$ neliöjuuri $x^4 + x^2 + 5$ voidaan päätellä laskemalla termien x^8 ja 25 juuret ja jakamalla $2x^6$ luvulla 2 ja termillä x^4 .

Al-Karajin kyvyttömyys johtaa yleistä juurialgoritmia tilanteissa, joissa oli negatiivisia kertoimia, johtui ilmeisesti siitä, että hän ei osannut negatiivisten lukujen vähennyslaskun merkkisääntöä, vaikka hän osasi perussäännöt ja mm. tiesi, että $a - (-b) = a + b$ eli että ”negatiivinen luku $-b$ voidaan vähentää positiivisesta luvusta a laskemalla $a + b$ ”. Ilmeisesti hän ei koskaan ymmärtänyt, että $-a - (-b) = -(a - b)$

³⁶ Levey s. 19

³⁷ Rashed, s. 17

³⁸ Berggren, s. 114

erkki.luoma-aho@jkl.fi

eli että ”negatiivinen luku $-b$ voidaan vähentää negatiivisesta luvusta $-a$ laskemalla erotuksen $a - b$ vastaluku”. Tästä eräs matematiikan historian tutkija on todennut³⁹, että

”opiskelijat, jotka ovat taistelleet merkkisääntöjen kanssa voivat kokea lohdutusta huomattavasti, että oli aika, jolloin näiden sääntöjen keksiminen asetti suuria vaatimuksia parhaiden matemaatikkojen älykkyydelle ja nykyisen alkeismatematiikan keksimisen taustalla on huomattava määrä työtä ja virheellisiä alkuja.”

al-Samaw'al

Al-Karajin antaman esimerkin mukaan hänen seuraajansa jatkoivat algebran aritmetisointia. Näistä erityisesti ibn Yahya al-Maghribi al-Samaw'al (n. 1125-1174) jatkoi suoraan al-Karajin työtä. Itse asiassa hänen motivaationsa laatia algebran tutkielma oli korjata al-Karajin töissä havainneensa puutteet.

Al-Samaw'al oli syntyisin varakkaasta ja koulutetusta perheestä. Häntä rohkaistiin jo 13-vuotiaana opiskelemaan lääketiedettä ja matematiikkaa. Matematiikan opinto-ohjelmaan kuului alkuun intialaisten kymmenjärjestelmä, astronomisia taulukointia (trigonometriaa) ja aritmetiikkaa sekä näiden jälkeen algebraa ja geometriaa. Hän valittaa omaelämäkerrassaan⁴⁰, että Bagdadissa ei voi enää opiskella Eukleiden Alkeiden ensimmäistä kirjaa pidemmälle ja tästä syystä hän ryhtyi matkustelemaan ympäri valtakuntaa opiskellen. Algebran osalta hän omaksui Abu Kamilin ja suuresti ihailemansa al-Karajin tulokset. Jo kahdeksantoistavuotiaana hän hallitsi omatoimisen opiskelun kautta arabivaltakunnan tärkeimmät matematiikan teokset ja oli valmis aloittamaan oman matemaattisen kehitystyön.

Hän kirjoitti tärkeimmän matemaattisen teoksensa *Al-Bahir fi'l-Hisab* (Laskemisen häikäisevä kirja) jo 19-vuotiaana, jossa hän mm. esittelee al-Karajilta tuntemattomaksi jääneen negatiivisten lukujen vähennyslaskun merkkisäännön. Näin hän saattoi täydentää al-Karajin puutteellisen polynomien käsittelyn ja mm. laskea negatiivisia termejä sisältäneen polynomin

$25x^6 + 9x^4 + 84x^2 + 64 + 100x^{-2} + 64x^{-4} - 30x^5 - 40x^3 - 116x - 48x^{-1} - 96x^{-3}$ neliöjuuren.

Al-Samaw'al täydensi myös potenssien teoriaa johtamalla samankantaisten potenssien kertolaskun $x^n \cdot x^m = x^{n+m}$ kaikille kokonaislukueksponenteille n ja m (toinen tai molemmat eksponentit saattoivat siis olla negatiivisia). Tämän hän teki yksinkertaisen taulukoinnin avulla. Hän laati taulukon, johon sijoitti keskelle luvun yksi (vastaten potenssia eli järjestystä 0) ja tästä oikealle kasvavat järjestykset 1, 2, 3, jne. ja luvusta 1 vasemmalle vähenevät järjestykset vastaavasti. Esimerkiksi luvun kaksi järjestykset ovat taulukossa $\dots, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, \dots$. Tämän jälkeen hän kuvaa kuinka laskemalla järjestyksiä yhteen tai vähentämällä niitä toisistaan voidaan päättellä kertolaskun lopputulos. Esimerkiksi laskun $x^{-3} \cdot x^{-4} = x^{-7}$ hän selittää seuraavasti:

”... kuution osan ($1 : x^3 = x^{-3}$) järjestys on kolme ja neliö neliön osan järjestys on 4. Me lisäämme ne yhteen ja saamme 7, jonka alapuolelta löytyy neliö neliö kuution osa.”

Al-Samaw'al esittää al-Bahirissa merkittävän uuden keksinnön, nimittäin binomi-kaavan $(a + b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + nab^{n-1} + b^n$ kaikille kokonaisluvuille n . Tämän keksinnön hän tosin laittaa al-Karajin nimiin vakuuttaen kirjas-

³⁹ Berggren, s. 112

⁴⁰ Katz, s. 253

saan vain siteeraavansa al-Karajia⁴¹. Binomikaavassa tarvittavat kertoimet al-Samaw'al saa Pascalin kolmiosta, jonka hän selittää sanallisesti näin:

"Al-Karaji sanoi, että menestyäksemme meidän täytyy laittaa taulukkoon yksi ja tämän alle yksi, siirtää ensimmäinen yksi toiseen sarakkeeseen ja lisätä ensimmäinen yksi tämän yksi alapuolelle. Saamme täten kaksi, jonka kirjoitamme siirretyn yhden alapuolelle ja laitamme yksi luvun kaksi alapuolelle. ..."

Teksti jatkuu edelleen selittäen kuinka taulukkoa täydennetään laskemalla lisäämällä lukuja yksi ja laskemalla vierekkäisiä yhteen. Taulukossa 2 on nähtävillä näiden ohjeiden mukaan laadittu lopputulos.

Taulukko 2.

1	1	1	1	1	...
1	2	3	4	5	...
	1	3	6	10	...
		1	4	10	...
			1	5	...
				1	...
					...

Al-Samaw'al täydensi vielä al-Karajin "koostettujen lausekkeidenkin" teoriaa kehittämällä polynomien jakolaskun algoritmin. Hän esittää mm. kuinka jakolaskusta⁴²

$$\frac{20x^6 + 2x^5 + 58x^4 + 75x^3 + 125x^2 + 196x + 94 + 40x^{-1} + 50x^{-2} + 90x^{-3} + 20x^{-4}}{2x^3 + 5x + 5 + 10x^{-1}}$$

saadaan tulos $10x^3 + x^2 + 4x + 10 + 8x^{-2} + 2x^{-3}$. Hänen menetelmänsä on oleellisesti sama kuin mitä me nykyisinkin käytämme, lukuun ottamatta sitä, että hän käytti edelleen sanallista ilmaisua.

Nuoruuden matemaattisen uran jälkeen al-Samaw'al opiskeli lääketiedettä ja vietti loppuelämänsä kiertävänä lääkärinä. Hän menestyi ammatissaan erinomaisesti ja sai hoitaakseen hyvin korkea-arvoisia potilaita. Hän myös väittää omaelämänsä kehittäneensä erilaisia uusia ja tehokkaita yleislääkkeitä. Koska hän kirjoitti algebran kirjansa hyvin nuorena ei sitä julkaistu kuin vasta useita vuosia sen valmistumisen jälkeen. Kaikesta päätellen hän myös korjaili sitä ja kirjoitti jopa useaan kertaan uudestaan. Kirjan vaikutuksesta myöhempiin arabimatematiikoihin on todettu:

"On vaikeaa varmistua tämän kirjan vaikutuksesta arabimaailmaan, mutta epäsuoraa ja rajoitettua vaikutusta on saattanut olla al-Kashin vuonna 1427 ilmestyneeseen kirjaan *Mitafh-al-hisab*. Kirja oli ilmeisesti täysin tuntematon lännessä."⁴³

⁴¹ Rashed, s. 63-67

⁴² Berggren, s. 115-117

⁴³ Adel Anboubi, Dictionary of Scientific Biography, osa ??, s.95 (kohdassa al-Samaw'al) erkki.luoma-aho@jkl.fi

1.6.4 Arabien algebrallinen perintö

Arabimatemaatikot kehittivät algebraa myös Abu Kamilin ja al-Karajin välisenä aikana sekä al-Samaw'alin jälkeen. Merkittävimpiä näistä ovat ibn al-Haytam (965-1039), joka tunnetaan pääasiassa optiikan alalta ja latinalaisella nimellä Alhazen, Omar al-Khayyam (1048-1131) geometrisen algebran perustajana ja kolmannen asteen yhtälön ratkaisusta kartioleikkausten avulla ja Sharaf al-Din al-Muzaffar al-Tusi (n. 1135 - 1213) al-Khayyamin työn jatkajana.

Kieli, maantieteellinen välimatka ja uskonto muodostivat kristillisen Euroopan ja islamilaisen Lähi-idän välille muurin, joka esti satoja vuosia useiden matemaattisten keksintöjen siirtymisen. Arabien algebrallisista saavutuksista latinankieliseen Eurooppaan siirtyi pääasiassa vain alkeellisin muoto. Vaikka arabien teoksia käännettiin runsaasti niin paljon arabimatemaatikoiden aikaansaannoksista painui unholaan ja vasta nykyinen historian tutkimus on löytänyt nämä ”unohdetut jalokivet” ja antanut niille niiden ansaitseman arvon. Kuitenkin ainakin al-Khwarizmin, Abu Kamilin ja al-Karajin⁴⁴ työt ovat vaikuttaneet Euroopan matematiikan kehitykseen. Missä määrin al-Samaw'alin työ on tunnettu onkin jo epävarmaa. Kuitenkin Roshi Rahed kirjoittaa, että

”kaikki todisteet viittaavat siihen, että Leonardo Pisalainen oli ainakin jossain määrin tietoinen tästä traditiosta⁴⁵”

viitaten al-Karajin ja al-Samaw'alin töihin. Joka tapauksessa mongolien valloitetua 10. helmikuuta 1258 Bagdadin tuhoten ja hävittäen täysin Viisauden talon kirjaston katkesi yksi ajanjakso matematiikan historiassa ja kehityksen painopiste alkoi siirtyä kohti länttä.

⁴⁴ Katz, s. 307

⁴⁵ Rashed, s. 32

1.7 Algebra ja aritmetiikka Euroopassa

Historiallinen tausta

Rooman imperiumi jakaantui vuonna 395 lopullisesta kahtia. Länsi-Rooma luhistui vuonna 476 saksalaisperäisten barbaareiksi kutsuttujen heimojen hyökkäysten alla. Länsi-Rooman viimeinen keisari, vasta noin 15-vuotias Romulus Augustus syrjäytettiin syyskuussa 476. Usein tästä hetkestä katsotaan alkaneen Euroopan historian ajanjakso, jota kutsutaan Keskiajaksi.

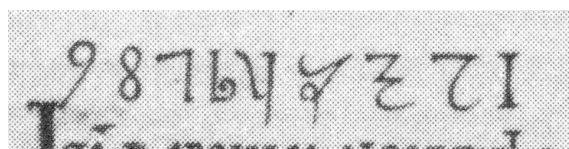
Rooman jälkeisessä Keskiaikaisessa feodaaliyhteiskunnassa ei ollut entisenlaista keskushallintoa vaan valta oli maataan ja maaorjiaan yksinvaltaisesti hallinneilla paroneilla. Paronit saattoivat olla jopa täysin luku- ja kirjoitustaidottomia. Linnan herran ja köyhän maaorjan välissä oli vain hyvin pieni käsityöläisten ja kauppiaiden muodostama keskiluokkaa. Kaupankäynti oli vähäistä, sillä paronien johtamat pienet valtiot olivat usein omavaraisia. Lähes kaikki Rooman valtakunnan aikaiset yhteydet itään katkesivat. Tarvetta alkeismatematiikan ylittämiseksi ei ollut. Seuraavien yli 500 vuoden ajan kulttuurin ja tieteen taso pysyttelikin verrattain alhaisena.

Barbaarien kulttuureissa ei ollut omaa matematiikan tutkimisen ja opiskelun perinnettä. Roomalaiset eivät olleet osoittaneet suuruutensa aikaan kiinnostusta matematiikkaa kohtaan lukuun ottamatta sen käytännöllisiä maanmittaukseen ja kaupankäyntiin liittyviä sovelluksia. Kreikan matematiikan perinne oli säilynyt kreikkalaisten parissa, mutta ei ollut levinnyt osaksi Rooman kulttuuria⁴⁶.

Vaikka antiikista oli periytynyt käsitys sivistyksen pohjana olevasta seitsemästä vapaasta taidosta jotka jaettiin triviumiin (kielioppi, logiikka, retoriikka) ja quadraviumiin (aritmetiikka, geometria, tähtitiede ja musiikin teoria), niin käytännössä luostareissa ja katedraalikouluissa, joissa opetus pääasiassa tapahtui, tarjolla ollut kirjallisuus ei tarjonnut mahdollisuutta todelliseen matematiikan opiskeluun ja käytännössä matematiikan tutkimus oli pysähdyksissä Euroopassa Keskiajan alussa, ns. pimeän Keskiajan aikana.

1.7.1 Ensikosketus

900-luvulla intialais-arabialainen numerojärjestelmä oli levinnyt islamilaiseen Al-Andalusiaan maakuntaan, nykyisen Espanjan alueelle. Suurin osa Pyreneiden niemimaasta kuului tällöin islamilaisten valloittajien komentoon. Ensimmäinen latinankielinen teksti, jossa esitellään uudet numerot on Isidor Sevillalaisen teokseen *Origenes* vuonna 976 tehty lisäys *Codex Vigilanus*. Tässä käytetyt numerot ovat selvästi Gobar-numeroita.



Kuva 11. Codex Vigilanusin numerot vuodelta 976. Lähde: Flegg, Lukujen historia, s. 166

⁴⁶ Mahoney, kirjassa Lindberg, s. 145
erkki.luoma-aho@jkl.fi

Paavi Sylvester II

Ensimmäiseksi ”länsimaalaiseksi”, joka oppi käyttämään intialais-arabilaista numerojärjestelmää, mainitaan munkki Gerbert. Hänet valittiin vuonna 999 paaviksi, jolloin hän muutti nimekseen Sylvester II. Munkkiaikanaan Gerbert asui kolme vuotta Espanjassa opiskellen mm. matematiikkaa ja astronomiaa. Ranskaan palatuaan hän luennoi matkalla oppimastaan uudesta numerojärjestelmästä. Hän myös kehittäli uuden tavan laskea helmitaululla: yksikön arvoiset helmet korvataan helmillä, joihin on kaiverrettu numeroarvo länsi-arabialaisessa muodossa. Esimerkiksi lukua viisi edustamaan ei siirretty viittä yksittäistä helmeä, vaan helmi, johon on kaiverrettu luvun viisi merkki. Luvulle nolla ei ollut omaa merkkiä, vaan sitä kuvasi tyhjä rivi. Koska uusi helmitaulu vaati peruslaskutoimitusten hallintaa, mitä perinteisessä helmien siirtelyyn perustuvassa helmitaulussa ei tarvittu, uusi menetelmä ei yleistynyt.

Gerbert Aurillacilainen eli Paavi Sylvester II (n.945-1003)

Gerbert syntyi Ranskan keskiylängöllä sijaitsevassa Aurillacin pikkukaupungissa. Hän kävi koulua luostarissa, jossa myös ryhtyi munkiksi.

Vuonna 967 hän sai siirron Espanjaan, Barcelonalaisen kreivin hoviin, jossa hän sai jatkaa opiskelua keskittyen erityisesti matematiikkaan ja luonnontieteisiin. Espanjassa olonsa aikana hän mahdollisesti teki matkan arabien hallitsemaan Andalusiin maakuntaan tai oli muulla tavoin kosketuksissa arabioppineiden kanssa tutustuen ensimmäisenä eurooppalaisena intialais-arabialaiseen numerojärjestelmään.

Vuonna 970 Gerbert matkusti Roomaan, jossa pääsi sekä paavi Johannes XIII:n että keisari Otto I:n suosiin. Omasta pyynnöstään hän sai siirron Reimsiin, jossa hän opiskeli logiikkaa arkkiepiispa Adalbéron johdolla toimien myös itse luostarissa opettajana. Siellä hän toimeenpani koulu-uudistuksen. Onnistuneen uudistuksen seurauksena oppilaita saapui pitkienkin matkojen takaa Reimsiin. 980-luvun puolivälistä alkaen hän hankki itselleen vaikutusvaltaisia ystäviä saaden näin nostetta kirkolliselle uralleen.

Nuoren keisarin Otto III:n myötävaikutuksella Gerbert valittiin paaviksi vuonna 999. Hän otti paavilliseksi nimekseen Sylvester II, pitäen esikuvanaan Konstantinus Suuren aikaista oppineisuudestaan tunnettua paavi Sylvesteriä. Otto III, Sylvester II:n suojelija, Rooman menneen mahdin palauttamisesta ja kristillisestä teokratiasta unelmoinut keisari kuoli vuonna 1002 ja Sylvester II seuraavana vuonna vasta neljä vuotta valintansa jälkeen.

1.7.2 Kääntämisen vuodet ja algorismin synty

Reconquista eli Iberian niemimaan valtaus muslimeilta takaisin kristittyjen hallintaan alkoi jo 700-luvulla. 1000-luvulla siihen saakka hyvin hidas eteneminen nopeutui. Vuonna 1085 vallattiin Toledo, Cordoban kalifaatin pääkaupunki ja arabiankielisten kristittyjen tärkein keskus. Kolmen uskonnon ja useiden kulttuurien sekoituspaikkana se muodostui 1100-luvulla tärkeimmäksi arabien matemaattisen sivistyksen siirtymävyöhykkeeksi kohti Eurooppaa. Aluksi käännettiin pääasiassa arabien itse laatimia tai heidän kääntämiään teoksia latinaksi. Toledossa toimineista oppineista Adelard Bathilainen (1075-1160) käänsi Al-Khwarizmin numerojärjestelmän kuvauksen nimellä *Liber Algorismi de numero Indorum*. Myös Johannes Sevillelainen käänsi sen. Robert Chesteriläinen käänsi al-Khwarizmin *Algebran* noin 1145. Kirja käännettiin Keskiajan lopulla kaikkiaan kolme eri kertaa. Gerard Cremonalainen⁴⁷ käänsi sen noin 1170 ja vielä seuraavalla vuosisallalla valmistui anonyymi käännös. Abu Kamilin *Algebra* käännettiin myös, mutta sen kääntäjä on jäänyt niinikään tuntemattomaksi.

⁴⁷ Gerard käänsi Ptolemaioksen *Almagestin*

Toledon lisäksi vuoteen 878 Bysantille, vuodet 878-1060 arabeille sekä vuodet 1060-1090 Normanneille kuulunut Sisilia sekä Etelä-Italia toimivat kääntämisen vähäisempinä keskuksina. Siinä, missä Toledossa keskityttiin pääasiassa arabiankielisiin teoksiin, niin Sisiliassa käännettiin myös kreikankielistä materiaalia. Tätä 1100- ja 1200-lukujen kulttuurista heräämistä kutsutaan mm. Keskiajan matemaattiseksi Renessanssiksi⁴⁸ ja se oli alkusysäys matematiikan ja tieteiden kehitykselle, joka eräässä mielessä on edelleen käynnissä Euroopassa. Kehitys ei kuitenkaan ole ollut tasaista, vaan pyrähdysnomaista. Esimerkiksi kääntämisen ajanjaksoa ja muutamaan 1200-luvun alun algebrikkaa seurasi hitaamman kehityksen ajanjakso ennen kuin 1400-luvulla kehitys taas kiihtyi. Käännöksiä valmistui noin sadan vuoden ajan kaikkiaan useita satoja. Seurauksena eurooppalaisille avautui – lopulta – mahdollisuus tutustua niin arabien kuin kreikkalaisten matemaatikoiden saavutuksiin. Käännettyistä kirjoista kolme ehdottomasti tärkeintä olivat al-Khwarizmin aritmetiikan ja algebran teokset sekä Eukleideen Alkeet⁴⁹.

Algoristit

Al-Khwarizmin aritmetiikan kirja oli vähintään yhtä keskeisessä asemassa intialaisen numerojärjestelmän latinankieliseen Eurooppaan siirtymisessä kuin se oli ollut aiemmin järjestelmän arabialaiseen maailmaan välittämisessä. Siitä tuli Euroopassa niin luettu teos, että Al-Khwarizmin nimen vääristyneestä muodosta tuli yleisnimitys uusilla numeroilla laskemiselle ja 1200-luvulta alkaen numeroilla laskijoita nimitettiin algoristeiksi⁵⁰. Perinteisessä (ei Gerbertin) helmitaulussa pysytteleviä kutsuttiin abakisteiksi⁵¹. Näiden eri tavoilla laskevien välillä oli ajoittain kiistoja, olihan uusi tapa laskea peräisin vihollisilta. 1200-luvulta alkaen seuraavien vuosisatojen aikana ympäri Eurooppaa kirjoitettiin useilla eri kielillä ja paikallisiin oloihin sopeutettuja aritmetiikan oppikirjoja, joiden avulla tietämys uudesta numerojärjestelmästä levisi ympäri Eurooppaa.

1.7.3 Italialaiset algebrikat

Italia 1200-luvulla

1000-luvulta alkaen Italia koki suuria sosiaalisia ja ekonomisia muutoksia. Genova, Pisa ja Venetsia nousivat Pohjois-Eurooppaan, islamilaiseen Pohjois-Afrikkaan ja Bysantin hallinnoimaan Välimeren ympäristöön ulottuvan ulkomaankaupan myötä vahvoiksi kansainvälisiksi vaikuttajiksi. Etenkin Pisalla oli voimakas laivasto, joka osallistui jopa tällöin käynnissä olleisiin ristiretkiin. Elinvoimaisen talouden siivittämänä ryhdyttiin suurisuuntaisiin rakennushankkeisiin. Pisan kaupunkiin ryhdyttiin rakentamaan 1000-luvun lopulla valtaisaa katedraalia, kastekirkkoa ja kellotornia eli ”Pisan kaltevaa tornia”.

Laajan kaupankäynnin seurauksena Italiaan syntyi kirjanpitäjien ammattikunta. Heidän tehtävänään oli ostaa ja myydä tavaraa sekä laskea voitot, tappiot ja katteet. Kaikki tämä laskeminen vaati sekä meren takaisissa myyntikeskuksissa että kotikaupungissa runsaasti työtä ja vaivaa. Roomalaiset numerot eivät sovi laskemiseen, joten selkäreppussa kulkikin jatkuvasti muistiinpanovälineet ja helmitaulu, jolla varsinaiset laskutoimitukset suoritettiin.

⁴⁸ Rose s. 76

⁴⁹ Oaks, s. 406

⁵⁰ Al-Khwarizmin nimestä on peräisin myös kieleemme sana algoritmi, joka kuvaa nykyisin mitä tahansa tarkasti määritettyä mahdollisesti peräkkäiseen toistoon perustuvaa päättävää toimintaohjetta. Aritmetiikkaan liittyvä tuttu algoritmi on jakolaskun suorittaminen jakokulmassa.

⁵¹ Helmitaulun latinankielinen nimitys on abacus.

1.7.4 Leonardo Pisalaisen Liber abaci



Taloudellisen nousun aiheuttamat tarpeet valmistivat Italiaa ja myöhemmin myös muuta Eurooppaa omaksumaan sekä intialaisten numerot että arabialaisten algebran. Kaupankäynnin vanhanaikaisten menetelmien uudistamisen tarpeen ja toisaalta arabien matemaattisten menetelmien etevyyden havainnut Pisalainen kauppiaan poika ja itsekin kauppias Fibonacci eli Leonardo Pisalainen päätyi opiskelemaan perinpohjin arabien matematiikan ja laatimaan useita kirjoja, joissa hän esitteli kollegoilleen niin uutta lukujärjestelmää ja sillä laskemista kuin algebran soveltamista käytännöllisiin tilanteisiin. Hänen tärkein teoksensa *Liber abaci* (Laskennon kirja,⁵² 1202) koostuu viidestätoista kappaleesta, jotka voidaan jakaa neljään osaan. Kappaleissa 1-7 hän opettaa mm. laskemaan intialaisin numeroin, kappaleissa 8-11 hän esittelee kaupankäyntiin liittyviä sovelluksia, kuten mm. valuuttamuunnoksia, kappaleissa 12 ja 13 probleemoja elämän eri aloilta, mm. kuuluisan jänisongelman, ja kappaleissa 14 ja 15 hän käsittelee algebraa. Ensimmäisten kappaleiden sisältö opetetaan nykyisin oleellisilta osiltaan peruskoulun ensimmäisten luokkien aikana ja murtolukujen käsittely yläluokilla. Näin ajateltuna Fibonaccin kirjan alkuosa on alkeellinen, mutta ajan tarpeet huomioon ottaen ehdottoman välttämätön.

Fibonacci aloittaa kirjansa sanoilla

"Yhdeksän intialaisten numeroa ovat 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1. Näillä yhdeksällä numerolla sekä numerolla nolla, jota arabit kutsuvat 'zephirumiksi' voidaan kirjoittaa jokainen luku, kuten tulomme alla esittämään."⁵³

Hän opettaa kuinka intialaisilla numeroilla on mahdollista suorittaa peruslaskutoimitukset. Hänellä on myös runsaasti käytännöllisiä esimerkkejä, jotka kattoivat voittojen arvon ja valuutanmuunnosten laskemisen sekä mittayksiköiden muunnokset ja liuoslaskut. Kauppiat ja liikemiehet ymmärsivät lukujen käytön järjestyksen ja ottivat ne Fibonaccin suosittelena käyttöön.

Algebran osuudessa Fibonacci esittelee al-Khwarizmin tapaan numeron, juuren ja neliön sekä mm. neliöjuorialgoritmin intialaisille numeroille. Hän käsittelee myös lukuisan määrän neliöjuurten laskusääntöjä, joista useat ovat hyvinkin mutkikkaita.

Toisen asteen yhtälöt hän käsittelee al-Khwarizmin kuuden kanonisen yhtälötyypin kautta. Lisäksi hän käsittelee joitain korkeamman asteen yhtälöitä, jotka palautuvat toisen asteen yhtälöiksi sijoituksella, kuten $x^8 + 100x^4 = 10000$. Fibonacci omaksui arabien käyttämät nimitykset. Vakiosta hän käytti nimityksiä *numerus*, *denarius* ja *dragma*, tuntemattomasta *res* tai *radix*, tuntemattoman toisesta potenssista *quadratus*, *census* ja *avere*, kuutiosta *cubus*, neljänestä potenssista *census census* ja kuudennesta potenssista *cubus cubus* tai *census census census* ($x^6 = x^3 \cdot x^3 = x^2 \cdot x^2 \cdot x^2$). Korkeampien potenssien merkinnässä hän siis jatkoi arabien tapaa laskea eksponentit yhteen. Algebralliset tietonsa Fibonacci omaksui arabeilta. Hän jopa käyttää kirjassaan lähes tai täsmälleen samoja numeerisia esimerkkejä kuin al-Khwarizmi, Abu Kamil ja al-Karaji. *Liber abaci* ei noussut arabien tason yläpuolelle, vaan sisälsi pääpiirteissään arabien algebralliset saavutukset 900-lukuun mennessä. Hän ei mm. mainitse mitään al-Karajin ja al-Sama'alin "järjestysten" ja polynomien opista.

Fibonaccin lukukäsitys Arabimatemaatikoiden teksteistä ei ole löydetty yhtään esimerkkiä negatiivisesta luvusta yhtälön varsinaisena ratkaisuna. Myös Leonardo pitäytyi arabien tapaan yhtälöiden positiivisissa ratkaisuisissa. Fibonacci, kuten ne arabimatemaatikot, joilta hän

⁵² Kirjan nimi käännetään jossain yhteyksissä virheellisesti "Helmitaulun kirjaksi", mistä ei ole kuitenkaan kyse.

⁵³ Katz, s. 307

aritmetiikan ja algebran oppinsa ammensi, satoi yhtälöt vahvasti erilaisiin käytännön tilanteisiin. Negatiivinen hinta, vero, tuotteiden määrä tms. ei voinut tulla kyseeseen. Ainoat tilanteet, joissa negatiiviselle ratkaisulle saattoi löytyä selityksen oli tappio voittoa laskettaessa tai laina varallisuutta laskettaessa. Muutamaa tällaista yhtälöä Fibonacci pohtii ja ehdottaa aina, että sanamuotoa muutettaisiin vastaamaan todellista tilannetta. Yleinen suhtautuminen on, että jos yhtälön ratkaisut ovat negatiivisia lukuja, on yhtälö ratkaisematon, ellei negatiivisille ratkaisuille voi antaa mielekästä selitystä⁵⁴. Fibonacciin lukualue muodostui siten pelkästään positiivisista luvuista.

Leonardo Fibonacci (s. n. 1170, k. vuoden 1240 jälkeen)



Leonardo Fibonacci eli Leonardo Pisalainen oli Pisalaisen kauppiaan Guilielmo Bonaccin poika. Fibonacci merkitsee ”Bonaccin perheen jäsen”. Fibonacci tunnetaan parhaiten jänisten lisääntymiseen liittyvästä probleemasta, josta syntyy ns. Fibonacciin lukujono 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, Kuuluisimman teoksensa *Liber abaci* lisäksi hän kirjoitti useita hyvinkin teoreettisia matematiikan kirjoja ja häntä pidetään koko läntisen kristikunnan ensimmäisenä suurena matemaatikkona. Perusteellinen *Liber abaci* säilyi vuosisatojen ajan aina 1400-luvulle saakka merkittävimpänä yksittäisenä Eurooppalaisena matematiikan kirjana.

Vuonna 1192 Leonardon isä lähetettiin Pisan kauppaenklaaviin Afrikan pohjoisrannalle; alueelle, jossa sijaitsee nykyisin Algerialainen kaupunki Bejaïa. Guilielmo päätti ottaa pojan mukanaan ”etsien minulle hyödyllistä ja miellyttävää tulevaisuutta. Siellä hän halusi minun opiskelevan matematiikkaa”, kuten Leonardo itse kirjoittaa. Isä toivoi tietenkin pojalleen kauppiaan ammattia. Bejaïassa Leonardo oppi kymmenjärjestelmän ”erinomaisessa intialaisten yhdeksän numeron taidon opetuksessa.”

Hänen isänsä lähetti Leonardon pian myös pitkille kauppamatkoille Egyptiin, Syyriaan, Bysantiin, Sisiliaan ja Etelä-Ranskaan. Matkoillaan hän opiskeli innokkaasti muitakin arabialaisten käyttämiä matemaattisia menetelmiä.

Vuosisadan vaihteessa Fibonacci muutti pysyvästi takaisin Pisaan. Hänen omien sanojensa sekä kirjallisen tuotantonsa perusteella palatessaan Italiaan Fibonacci hallitsi arabialaisten aritmeettiset ja algebralliset menetelmät sekä Eukleideen geometrian. Matematiikan alalta Fibonacci oli tällöin Euroopan oppinein mies. Seuraavat 25 vuotta Fibonacci käytti kirjoittaen kirjoja kaikesta oppimastaan. Pääteoksensa *Liber abaci* esipuheessa hän sanoo ”tarkasti omaksuen intialaisten metodin, ..., lisäten siihen arvioni mukaan jotain omaa sekä hienokseltaan Eukleideen geometriaa ... työskentelin koostaakseni nämä xv kappaletta, esittäen varmat todisteet lähes kaikelle kirjoittamalleni, ..., jotta tämä tiede on opetuksena halukkaille ja ennen kaikkea Italian kansalle”

Leonardo Pisalaisen merkitys havaittiin pian tieteen tukijana tunnetun, kuutta kieltä puhuneen Saksan kuninkaan ja Pyhän Rooman keisarin Fredrik II:n hovissa ja itse keisari toivoi tapaavansa Fibonacciin. Toive toteutui vuonna 1225 Pisassa. Leonardo Pisalaisen myöhemmästä elämästä ei olen muuta tarkkaa tietoa, kuin dokumentti vuodelta 1140, jonka mukaan Pisan kaupunki myönsi hänelle vuosittaisen palkan ”tunnustuksena hyödyllisyydestä kaupungille ja sen asukkaille opetustehtävien ja antaumuksen kautta.”

⁵⁴ Sessiano, The Appearance of Negative Solutions in Mediaeval Mathematics, s. 108, 148-149
erkki.luoma-aho@jkl.fi

1.7.5 Jordanus de Nemore

Fibonaccin aikalainen Jordanus de Nemore on historian tutkijoille varsin tuntemattomaksi jäänyt hahmo, jonka elämästä ei tiedetä juuri mitään muuta kuin että hän laati tärkeimmät työnsä 1220-luvulla ja työskenteli Euroopassa. Hughes toteaa, että hän oli "Keskiajan Melkisedek, *sine patre, sine matre, sine genealogia*."⁵⁵

De Nemoren algebran teos *De numeris datis* (*Annetuista numeroista*) on kirjoitettu likimain samaan aikaan tai joitain vuosia myöhemmin kuin *Liber abaci*. *De numeris* on edistyskellisempi kuin *Liber abaci* algebrallinen osuus sekä osin jopa arabienkin algebraa edistyskellisempi. Mahdolliset de Nemoren käyttämän lähteet ovat olleet⁵⁶ al-Kwharizmi, Abu Kamil, al-Karaji, Fibonacci ja Eukleides. Näistä varmoina voidaan pitää joko al-Khwarizmin tai Abu-Kamilin algebran kirjaa, vertailu osoittaa suuria yhtäläisyyksiä sekä materiaalin sisällön että jaottelun suhteen. Molemmat teokset olivat sekä tarjolla latinankielisiä 1200-luvun alussa että kuulivat algebran opiskelijoiden oleelliseen lukemistoon. Yhtäläisyyksiä löytyy myös Fibonaccin *Liber abaci* kanssa, mutta nämä voidaan selittää yhteisillä lähteillä.

De numeris datis on sekä *Liber abaci* että arabien töitä edistyskellisempi kahdella toisiinsa kietoutuneella tavalla. Ensimmäinen on materiaalin selkeä ja tiukka jaottelu lauseisiin, niiden perusteluihin sekä numeerisiin esimerkkeihin. Siinä missä al-Khwarizmi, Fibonacci ja osin myös Abu-Kamil luottavat runsaaseen määrään numeerisia esimerkkejä de Nemore johtaa ensin yleisen periaatteen ja sitten vasta numeerisen esimerkin. Tässä mielessä kirja on ainutlaatuisen moderni. Toinen tärkeä uutuus on, että lauseiden perustelussa de Nemore kuvaa tuntemattomia lukuja latinalaisen aakkoston alkupään kirjaimilla säännönmukaisesti koko teoksen läpi. Kirjainten valinnassa ei tosin ole muuta logiikkaa kuin että esiintyville tuntemattomille luvuille valitaan kirjain aakkosjärjestyksessä. Jordanus ei jakanut meille tutulla tavalla muuttujia parametreihin ja varsinaisiin tuntemattomiin, eikä käyttänyt intialaisten numerojärjestelmää. Joka tapauksessa *De numeris datis* oli ensimmäinen algebran kirja, joka ei ollut täysin retorinen.

De numeris datis koostuu neljästä osasta. Osa I käsittelee yhtälöpareja, joista useissa tilanteissa toinen yhtälöistä on toista astetta, mm. lauseet I-4, $x + y = a$, $x^2 + y^2 = b$ ⁵⁷ ja I-18 $x + y = a$, $(x^2 + y^2)/(x - y) = b$. Osat II ja III käsittelevät suhteiden teoriaa, mm. lauseet II-1, $a : x = b : c$, II-5, $x + y = a$, $(x + y) : x = b$, III-1, $a : x = b : a$ ja III-5, $x : b = y$, $x + y = a$, kuten pääosin myös osa IV, jossa suhteita annetaan myös neliöiden avulla, mm. lause IV-7, $x : y = b$, $x^2 - y^2 = b$. Jokainen kirjan 113 lauseesta rakentuu täsmälleen samalla tavalla (1) lauseen tarkka formalisointi, (2) todistus ja (3) numeerinen esimerkki. Lauseiden todistuksissakin de Nemore osoittaa itsenäistä ajattelua ja irtautuu aiemmasta perinteestä perustelemalla lauseet pelkästään aritmeettisilla operaatioilla.

Tutustutaan seuraavaksi kahteen lauseeseen kirjan alusta, lauseisiin I-1 ja I-3. Lauseiden muotoilu noudattaa Hughesin kommentaarin muotoilua: tarkka formalisointi erotetaan todistuksesta kapiteelilla. Olen säilyttänyt de Nemoren alkuperäisen hie-man kömpelön symboliikan. Kaksi- ja kolmikirjaimisilla muuttujilla ab ja abc de Nemore halusi kuvata yhteenlaskulla kahden tai kolmen luvun yhteenlaskulla muodostettuja lukuja. Kirjainten lisäksi muuta symboliikkaa tekstistä ei sitten löydykään. Kaikki luvut De Nemore kirjoitti roomalaisin numeroin.

I-1

"JOS ANNETTU LUKU JAETAAN KAHTEN OSAAN SITEN, ETTÄ OSIEN EROTUS TUNNETAAN, NIIN KUMPIKIN OSA VOIDAAN MÄÄRITTÄÄ.

⁵⁵ Hughes, Jordanus de ..., s. 3 (vailla isää, vailla äitiä, vailla sukupuuta)

⁵⁶ Hughes, Jordanus de ..., s. 9-12

⁵⁷ Esimerkkien modernit muotoilut Hughesin (s. 189-196) mukaiset. Erityinen eroa alkuperäiseen de Nemoren retoriiseen esitykseen on, kirjaimet on muutettu karteesisen tavan mukaiseksi.

Pienempi osa ja erotus ovat yhteensä suurempi osa. Pienempi osa yhdistettynä toiseen yhtä suureen ja erotukseen ovat yhteensä annettu numero. Vähennä sitten erotus annettusta luvusta ja se mitä jää jäljelle on pienempi osa kaksinkertaisena. Puolittamalla tämä saadaan pienempi osa. Seurauksena saadaan suurempi osa.

Esimerkiksi: X jaetaan kahteen osaan, joiden erotus II. Jos tämä vähennetään luvusta X jää VIII, josta puolet on IIII, tämä on pienempi osa, toinen on VI.⁵⁸

De Nemoren todistus esitettynä modernilla symboliikalla:

a = annettu luku; b = osien erotus; x = suurempi osa; y = pienempi osa

$$\begin{cases} x + y = a \\ x - y = b \end{cases}$$

$b + y = x$, sijoitetaan lauseke ylempään, jolloin $2y + b = a$ eli

$$2y = a - b$$

$$y = \frac{a - b}{2}; \quad x = a - y$$

I-3

JOS ANNETTU NUMERO JAETAAN KAHTEN OSAAN SITEN, ETTÄ OSIEN TULO TUNNETAAN, NIIN KUMPIKIN OSA VOIDAAN MÄÄRITTÄÄ⁵⁹.

Olkoon annettu luku abc jaettu osiin ab ja c . Olkoon ab kerrottuna c :llä d ja abc kerrottuna itsellään e . Olkoon f luku d nelinkertaisena ja g e :n ja f :n erotus. Tällöin g on lukujen ab ja c erotuksen neliö. Sen neliöjuuri b on tällöin ab :n ja c :n erotus. Koska lukujen ab ja c sekä summa että erotus ovat annettuja, niin ne voidaan laskea ensimmäisen lauseen perusteella.

Esimerkiksi: Jaa X kahdeksi luvuksi, joiden tulo on XXI. Tämä on nelinkertaisena LXXXIII, joka vähennettynä luvun X neliöstä, nimittäin C:stä on XVI. Tämän juuri on IIII ja se on myös kahden osan erotus. Tämä vähennettynä X:stä antaa VI, jonka puolikas on III, pienempi osa; ja suurempi on VI.

De Nemoren todistus esitettynä de Nemoren kirjainmuuttujilla ja mode-reilla symboleilla.	De Nemoren todistus esitettynä modernilla symboliikalla
$\begin{cases} ab + c = abc \\ ab \cdot c = d \end{cases}$ $abc \cdot abc = e; \quad f = 4d$	$\begin{cases} x + y = a \\ xy = c \end{cases}$ $d = (x + y)^2 - 4xy = (x - y)^2$ $b = \sqrt{d} = x - y$ palautuu tapaukseen I-1:

⁵⁸ Hughes, Jordanus ...

⁵⁹ ks. huomautus 2, Hughes: Jordanus de Nemore, s. 181

al-Khwarizmi: ”Olen jakanut luvun kymmenen kahteen osaan, joiden tulo on kaksikymmentäyksi.” Rosen, s. 41

Abu-Kamil: ”ETSI TÄHÄN VASTAAVA”

Fibonacci: ”ETSI TÄHÄN VASTAAVA”

$g = e - f = (ab + c)^2 - 4d$ $= ab^2 + 2ab \cdot c + c^2 - 4ab \cdot c$ $= ab^2 - 2ab \cdot c + c^2$ $= (ab - c)^2$ $b = ab - c$	$\begin{cases} x + y = a \\ x - y = b \end{cases}$ joka ratkeaa kaavalla $y = \frac{a - b}{2}; \quad x = a - y.$
---	---

Levinneisyys ja vaikutus Siinä missä Fibonaccin *Liber abaci* johdatti lukijan kymmenjärjestelmän, aritmetiikan ja algebran alkeisiin käytännöllisellä tasolla tarjosi *De numeris datis* tarkemman ja yleisemmän otteen. Näistä likimain samaan aikaan kirjoitetuista teoksista *Liber abacin* vaikutus muodostui huomattavan paljon suuremmaksi. *De numeris datis* jäi aikakauden matemaattiseen tasoon verrattuna liian teoreettisena sivuraiteilla, mutta sillä on ilmeisesti ollut kuitenkin oma merkityksensä, ainakin joitain satoja vuosia kirjan kirjoittamisen jälkeen. Hughes kirjoittaa:

"Kopioiden lukumäärä, niiden leviäminen maantieteellisistä ja ajallisista alkupisteistään ja koodeksit, joihin ne on sisällytetty kaikki johtavat ajattelemaan, että sekä aikalaiset että Jordanuksen seuraajat myönsivät *De numeris datiksen* vaikutuksen matematiikalle. ... Johannes Widmann viittaa siihen; Regiomontanus suunnitteli julkaisevansa sen; Adam Riese lainasi sitä; ja Johann Schuebel saattoi sen täydellisesti ajan tasalle. Tällainen käyttö viittaa *De datiksen* huomattavaan arvostukseen myöhäiskeskiajalla.⁶⁰"

Kuitenkin, vaikka Fibonacci ja de Nemoire toivat algebrallisen tiedon Eurooppalaisien omaksuttavaksi, niin vuosisatoja kestänyt matemaattisen tutkimuksen lähes täydellinen pysähtyneisyys ei muuttunut hetkessä ja kaksi 1200-luvun parasta matemaatikkoa jäivät vuosisatojen ajaksi ilman tasoltaan vastaavia seuraajia⁶¹.

⁶⁰ Hughes, Jordanus de Nemori ..., s. 20-21

⁶¹ Lindberg s. 150, s. 162

1.7.6 Abacistit ja algoristit

Italian kauppakaupunkien alati lisääntyvän kaupankäynnin teoreettisia tarpeita tyydyttämään syntyi 1300-luvun aikana Italiaan Fibonaccin esikuvan mukaan eräänlaisten ammattimatematikoiden ammattikunta, *maestri d'abbaco* eli abakistit. Abakistit olivat uuden matematiikan opettajia. He laativat matemaattisia tekstejä, joita he sitten käyttivät kauppakouluissa. Tekstit oli yleensä tarkoitettu pienen yhteisön tai kaupungin kauppiaiden lasten tarpeisiin. Koulujen opetuksen sisältö ja oppimateriaalit pohjautuivat Fibonaccin *Liber abaciin*. Oppilaille opetettiin intialaisten numeromerkkien käyttö, arabien algebran alkeet sekä kaupankäyntiin liittyvää matematiikkaa. Abakistien tekstejä on säilynyt useita satoja. Ne koostuvat pääasiassa erilaisista käytännöllisistä probleemoista ja niiden ratkaisuksista. Näiden tekstien ja abakistien tärkein merkitys oli, että kymmenjärjestelmän ja algebran alkeet levisivät, ei pelkästään Italiaan vaan myöhemmin myös muualle Eurooppaan: Englantiin, Ranskaan ja Saksaan ja näin pohjustivat matematiikan myöhemmin tapahtunut nopeaa kehittymistä. Ensimmäinen koskaan painettu matemaattinen teksti on tuntemattomaksi jääneen abakistin kaupallinen aritmetiikka, joka on painettu vuonna 1478 Trevisiossa. Kirjapainotaito helpotti myös aritmetiikan kirjojen leviämistä. 1480- ja 1490-lukujen aikana ilmestyi pelkästään Italiassa yli 60 painettua abacistiperinteen mukaista aritmetiikan kirjaa⁶².

Abacistiperinteen lisäksi kymmenjärjestelmää levittivät al-Khwarizmin aritmetiikkaan pohjautuneet algoristit eli pelkkää intialaisilla numeroilla laskemista käsitelleet kirjaset. Näitä ilmestyi jo 1100-luvulla muutamia⁶³ ja myöhemmin vuosisatoina Keski-Euroopassa jo useita⁶⁴. 1400-luvulta alkaen italialaisen abacistiperinteen mukaiset oppikirjat syrjäyttivät pelkät algoristit Saksassa, Ranskassa ja Englannissa.

Paperin valmistus

Euroopassa paperinvalmistus alkoi vuonna 1120, nykyisen Espanjan alueella, silloisessa islamilaisessa Al-Andalusian maakunnassa. Sieltä paperinvalmistus siirtyi ensimmäisenä Italiaan, jossa sen valmistus alkoi 1200-luvulla. 1300-luvulla paperitehtaita oli myös Ranskassa ja Saksassa. Numeromerkkien leviäminen on tapahtunut samanaikaisesti paperinvalmistuksen etenemisen kanssa, mikä ei sinänsä ole yllättävää, sillä intialais-arabialaisen numerojärjestelmän edut saadaan käyttöön täysimittaisesti vasta kun käytössä on paperia.

Intialais-arabialaiset numerot syrjäyttivät roomalaiset numerot ja laskemisen helmitaululla lopullisesti vasta 1500-luvulla. Tätä ennen ”algoristisesti” suoritettu lasku saatettiin vielä tarkistaa, varmuuden vuoksi, helmitaululla. Seuraavien vuosisatojen aikana helmitaulut jäivät Länsi-Euroopassa likipitäen täysin unholaan ja 1700-luvun lopulla niitä ei käytetty enää käytännössä lainkaan. Roomalaisten numeroiden käyttö, kuten tiedämme, ei ole kuitenkaan täysin hävinnyt.

⁶² Smith, *The First Great ...*, s. 41

⁶³ Karpinski, *Two Twelfth Century...*

⁶⁴ Karpinski & Waters; Karpinski & Staubach; Waters

erkki.luoma-aho@jkl.fi



Kuva 12. Puupiiirros esittää algoristien ja abakistien välistä kamppailua. Etenkään Pythagoraalla⁶⁵ ei ollut mitään tekemistä asian kanssa.

1.7.7 Luca Paciolin Summa



Kuvitusta Paciolin kirjasta *Summa*.

Abacistien perinne kesti joitain satoja vuosia. Perinteen viimeinen edustaja tai vaihtoehtoisesti renessanssiajan ensimmäinen matemaatikko, katsantokannasta riippuen, kiertävä luennoitsija ja jesuiitta Luca Pacioli kirjoitti kolme lyhyempää aritmetiikan kirjaa ennen vuonna 1494 painettua pääteostaan *Summa de arithmetica, geometrica, proportioni et proportionalita*. *Summa* oli ”renessanssin ensimmäinen matemaattinen ensyklopedia.”⁶⁶ Se sisälsi ensi kerran kootusti painetussa muodossa suunnilleen kaiken aritmeettisen ja algebrallisen tiedon, joka oli ollut tähän saakka tarjolla vain erillisissä käsin kirjoitetuissa kirjoissa. Pacioli ei rajoittunut käsittelemänä enää yhden kaupungin tai pienen alueen tarpeita, vaan tavoitteli suurempaa yleisöä. *Summasta* tulikin nopeasti siteeratuin ja luetuin algebran ja aritmetiikan kirja Italiassa.

Merkinnät

Jo Paciolia edeltäneet abakistit olivat ryhtyneet lyhentelemään Fibonaccilta perittyä algebran perussanastoa *cosa* (asia), *censo* (neliö) ja *cubo* (kuutio) käyttäen yleensä lyhenteitä *c*, *ce* ja *cu*. Neliöjuurelle jo Fibonacci käytti lyhennystä *R* ja *R̄*. Luca Pacioli jatkoi *Summassa* tätä perinnettä lisäten joukkoon kaksi ilmeisesti aivan omaa lyhennysmerkintää, *p̄* italian sanasta *piu* ja *m̄* italian sanasta *meno* yhteen-

⁶⁵ Leonardo Pisalainen mainitsee kirjansa *Liber abaci* esipuheessa opiskelleensa ”Pythagoraan kaaret” tarkoittaessaan ilmeisesti Gerbertin abacusta, ks. Siegler s. 16 ja s. 617. Ehkä tämä Fibonaccin toteamus on ollut taiteilijan mielessä hänen kuvittaessaan abakuksen keksijäksi Pythagoraan.

⁶⁶ Rose, s. 143

ja vähennyslaskuille. Paciollilla oli myös tapana merkitä luvun alku ja loppu pisteellä. Taulukossa 11 on muutamia Paciolin juurilausekkeita:

Taulukko 3.

Pacioli	Moderni
$R_{.200.}$	$\sqrt{200}$
$R_{.6.} \tilde{m} . R_{.2.}$	$\sqrt{6} - \sqrt{2}$
$R_{.cuba. de .64}$	$\sqrt[3]{64}$
$R_{.R_{.120.}}$	$\sqrt[4]{120}$
$R_{.relato}$	viides juuri
$R_{.cuba. de R_{.cuba.}}$	kuudes juuri
$R_{.R_{.R_{.cuba.}}}$	seitsemäs juuri
$R_{.R_{.cuba. de R_{.cuba.}}}$	kahdeksas juuri

Merkinnällä R_v Pacioli ilmaisi, että lausekkeessa on sisäkkäisiä juuria: $R_v . R_{.20\frac{1}{4}.} \tilde{m} . \frac{1}{2}.$ merkitsee lauseketta $\sqrt{\sqrt{20\frac{1}{4}} - \frac{1}{2}}$.

Fibonacci sekä varhaiset abakistit olivat merkinneet korkeammat potenssit eksponenttien yhteenlaskun eli potenssien kertolaskun periaatteella, ts. *cubus cubi* merkitsi Fibonaccille kuudetta potenssia ($x^3 \cdot x^3$). Vähitellen 1400-luvun kuluessa tapa vaihtui eksponenttien kertolaskun eli potenssin potenssin periaatteeseen. Myös Pacioli merkitsi korkeammat potenssit tällä periaatteella, ts. $x^8 = ce.ce.ce.$, kun Fibonacci oli merkinnyt vastaavan kahdeksannen potenssin sanoi *census census census census* eli $x^2 \cdot x^2 \cdot x^2 \cdot x^2$. Alkulukuja ei ollut mahdollista merkitä kertolaskuun perustuvalla tavalla, joten ne Pacioli kirjoitti $x^5 = p.^{\circ}r.^{\circ}$ (*primo relato*), $x^7 = 2.^{\circ}r.^{\circ}$ (*secundo relato*) ja $x^{11} = 3.^{\circ}r.^{\circ}$ (*terzo relato*). Taulukossa 4 on Paciolin tyypillisimmät merkinnät tuntemattomalle ja sen eri potensseille.^{67 68}

Taulukko 4.

Moderni	x	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8
Pacioli	<i>co.</i>	<i>ce.</i>	<i>cu.</i>	<i>ce.ce.</i>	<i>p.^{\circ}r.^{\circ}</i>	<i>ce.cu.</i>	<i>2.^{\circ}r.^{\circ}</i>	<i>ce.ce.ce.</i>

Lukualue

Negatiiviset luvut yhtälön ratkaisuna olivat edelleen vaikea pala. Paciolin teoksista löytyy kuusi tapausta, joissa negatiivinen luku on hyväksytty yhtälön ratkaisuksi ja kaksi näistä on *Summassa*. Pacioli ei suhtautunut enää negatiivisiin ratkaisuihin täysin torjuvasti, kuten Fibonaccin ajoista lähtien oli tehty vaan hän empi niiden hyväksymisen ja hylkäämisen väliltä. Hän toisaalta ”vaistonvaraisesti” hylkää ne,

⁶⁷ Cajori, s. 106

⁶⁸ Cajori sekä Katz; Osoitteessa http://www.sil.si.edu/digitalcollections/incunabula/CF/image_details.cfm?goff=L-0315 on kuvia Summasta.
erkki.luoma-aho@jkl.fi

mutta silti pohtii negatiivisen ratkaisun mahdollisuutta abstraktissa tilanteessa⁶⁹ ja hyväksyy kaupallisessa tehtävässä vastaukseksi negatiivisen hinnan.⁷⁰

Luca Pacioli (n.1445-1517)



Luca Pacioli oli vaatimattomista oloista lähtenyt, mutta aikansa merkittävimmäksi matemaatikoksi ja kukoistavaksi renessanssi-ihmiseksi kasvanut fransiskaanimunkki, joka lopulta päätyi Erasmus Rotterdamilaisen Tyhmyyden ylistyksen (1509) sivuille.

Luca syntyi noin vuonna 1445 Sansepolcrossa, pienessä Italia-laiskaupungissa Tiberin laaksossa vaatimattomaan perheeseen. Varhaisen koulutuksen Luca sai häntä noin 35 vuotta vanhemman kuuluisan taiteilijan Pierro della Francescan ateljeessa ja on mahdollista, että hän havitteli jopa taiteilijan uraa. Francescan toinen intohimo maalaamisen ohella oli matematiikka ja nuori Luca sai häneltä ensimmäiset matematiikan opit.

Vuonna 1464, 19-vuotiaana, Luca sai töitä rikkaalta ja vaikutusvaltaiselta venetsialaiselta kauppiaalta Antonio Rompiansilta työnään auttaa tämän kolmen pojan koulutuksessa. Työnsä ohessa hän opiskeli itsekin matematiikkaa. Vuonna 1470 Rompiansin yritystoiminnasta saamansa kokemusten rohkaisemana Pacioli kirjoitti kauppiaan pojille omistetun ensimmäisen aritmetiikan kirjansa.

Pacioli liittyi Fransiskaanimunkkijeskuntaan 1470-luvulla. Vuonna 1477 hän sai valmiiksi teologian opinnot ja ryhtyi kiertämään Italiaa matematiikkaa opettaen ja keräten aineistoa pääteostaan varten. Hän viettikin melkoista kiertolaiselämää aina vuoteen 1494 saakka luennoiden kaikissa tärkeimmissä Italialaisyliopistoissa, mm. Perugiassa, Napolissa, Venetsiassa ja Roomassa. 1480-luvun puolivälissä hän saavutti korkeimman akateemisen arvonimen *magister*.

Paciolia voisi kuvata 2000-luvun sanoilla akateemiseksi patkätöyläiseksi. Hänen useimmat sopimuksensa olivat lyhyitä kestäen vuodesta muutama vuoteen. Italian yliopistot olivat renessanssin aikaan kansainvälisiä, rikkaita ja vaikutusvaltaisia. Ne kilpailivat hyvistä luennoitsijoista, jollainen Paciolikin epäilemättä oli. Tunnetut oppineet, jotka keräsivät pelkän maineensa avulla yliopistoon hyviä oppilaita, saivat korvauksena töistään anteliaita palkkioita. Pacioli osasi myös verkostoitua. Ympäri Italiaa vaeltaessaan hän tutustui ruhtinaihin ja kauppiaisiin sekä muihin vaikutusvaltaisiin ja rikkaisiin henkilöihin. Laajan, määrätietoisesti rakennetun suhdeverkoston sekä luontaisten lahjojensa avulla hän loi merkittävän akateemisen uran saattaen luottaa suojelijoidensa taloudelliseen ja poliittiseen tukeen. Fransiskaanimunkkina hän oli periaatteessa tehnyt köyhyyslupauksen, mutta oli saanut Paavin erityisen luvan kerätä palkkiota opetustoimestaan. Rahaa hänelle kertyikin elämän aikana huomattava määrä.

Vuonna 1494 Pacioli sai valmiiksi merkittävimmän teoksensa, 600-sivuisen italiankielisen järkäleen, *Summan*. Vaikka *Summassa* ei ollut juuri lainkaan Paciolin omia keksintöjä, ei sen merkitystä kuitenkaan sovi vähätellä, sillä juuri keksityn kirjapainotaidon avulla – *Summa* oli eräs ensimmäisistä painetuista matematiikan kirjoista – se levisi nopeasti ja laajalle ja sitä luettiin ja tutkittiin intensiivisesti koko 1500-luvun. *Summan* erikoisuus on, että se sisälsi paljon muutakin kuin vain aritmetiikan ja algebran alkeet käytäntöä ja teoriaa. Siitä löytyy taulukoita rahanvaihtoon, eri Italian kaupungeissa käytettyjä painoja ja mittoja, ensimmäinen painettu kaksinkertaisen kirjanpidon opas, mistä syystä Pacioli pidetään myös kirjanpitäjien parissa edelleen suuressa arvossa sekä Eukleideen Alkeiden tiivistelmä. Pacioli antoi kirjassaan lähdeluettelon, josta löytyvät mm. Fibonacci ja de Nemore.

Summan hyvä menestys teki Paciolista, merkittävästä luennoitsijasta, myös suosittu kirjailijan. Näillä ansioiden Pacioli sai kutsun Italian merkittävimmän tieteiden ja taiteiden suojelijan, Lodovico Sforzan hoviin Milanoon vuonna 1497. Hovissa vietetty aika olivat Paciolin uran kannalta tärkeitä. Hovissa hän saattoi kes-

⁶⁹ mm. yhtälöparin $x_1 + x_2 = 10$, $2x_1 + 3x_2 = 10$ ratkaisuna.

⁷⁰ Sessiano, The Appearance of Negative Solutions in Mediaeval Mathematics, s. 142-149

kustella toisten eri aloilta ansioituneiden tieteilijöiden ja taiteilijoiden kanssa ja työskennellä eräässä Euroopan laajimmassa kirjastossa. Hovissa hän ystävystyi mm. Leonardo da Vincin kanssa. Ystävykset tekivät yhteistyötä Paciolin opettaessa Da Vincille matematiikkaa ja da Vincin mm. kuvittaessa Paciolin *De Divina Proportione*, vuonna 1509 painetun kultaista leikkausta ja Platonin kappaleita mystisellä tavalla käsitelleen kirjan. Sforzan hovin leppoisa elämä sai ikävän lopun Ranskan hyökätessä vuonna 1499 Pohjois-Italiaan. Pacioli ja da Vinci pakenivat etelään ja asettuivat Firenzeen, jossa viettivät useimmat 1500-luvun alun vuodet. Vuonna 1509 Pacioli julkaisi Eukleiden Alkeiden latinankielisen käännöksen ja eräs hänen säännöllinen luentonsa aihe pitkän uran aikana oli geometria.

Vuonna 1508, tällöin jo yli 60-vuotiaana Luca Pacioli vieraili, viimeisen kerran, Venetsiassa. Pacioli oli suosionsa huipulla ja nautti laajasta arvostuksesta luentoja pitäessään. Erasmus Rotterdamilainen, renessanssin ajan kuuluisin humanisti, oli tutustumassa samaan aikaan Italiaan ja vierailulla kaupungissa. Hän oli järkyttynyt kaupungissa kohtaamastaan korruptiosta, ylpeydestä ja röyhkeydestä. Ilmeisesti juuri Pacioli⁷¹ on ollut Erasmus mielessä se itserakas matemaatikko, josta hän kirjoittaa: ”Tuo toinen, joka on oppinut harpin avulla piirtämään kolme viivaa, havaitsee tuota pikaa, ettei Eukleides ollut paljontaan taitavampi⁷².” Venetsiassa Pacioli kohtasi toisenkin ajan merkittävän henkilön, saksalaisen kuvanveistäjän ja taiteilija Albrecht Dürerin, jolle Pacioli opetti tätä kiehtoneiden taikaneliöiden matemaattisia ominaisuuksia ja Dürerin kuuluisimmassa teoksessa, *Melancoliassa*, hän käyttää mahdollisesti juuri Paciolilta oppimaansa taikaneliötä.

Venetsiasta Pacioli palasi kotikaupunkiinsa Sansepolcroon, jossa hänet valittiin veljeskunnan esimieheksi. Tiedemies osoittautui kuitenkin huonoksi hallintomieheksi ja sai siirron vuonna 1514 Rooman yliopistoon, jonne yliopiston heikosta tilasta huolestunut Paavi kokosi merkittäviä oppineita ympäri Italiaa. Noin 70-vuotiaan Paciolin terveys heikkeni kuitenkin melko pian ja hän joutui jättämään Rooman ja palasi taas Sansepolcroon Franciscaaniyhteisöön, jonka parissa hän menehtyi vuonna 1517.

⁷¹ Tämän arvion teki Edward Fennell.

⁷² *Tyhmyden ylistys*, Kauko Kareen suomennos, s. 84 (ks. myös s. 104).
erkki.luoma-aho@jkl.fi

1.7.8 Algebra Saksassa

Sama taloudellinen kehitys, mikä oli johtanut aritmetiikan ja algebran nousuun Italiassa tapahtui viipeellä myös muualla Euroopassa. Saksassa algebran perinne syntyi 1400-luvun loppupuolella.

Johannes Widman

Ensimmäisen algebran luennon Saksassa piti Johannes Widman (s. 1462) vuonna 1486 Leipzigin yliopistossa. Luento on säilynyt oppilaan muistiinpanojen kautta ja se käsitteli 24 erityyppisen yhtälön ratkaisemista. Hänen algebransa liittyi Italian ”cossistien” perinteseen. Saksassa algebraa kutsuttiin sanan cosa mukaan termillä *Coss*. Widman oli kirjautunut yliopistoon vuonna 1480 ja saanut maisterin arvonimen 1485 ja opetti tästä lähtien matematiikan perusteita yliopistossa. Algebraa Widman on ilmeisesti opiskellut aritmeettisten ja algebrallisten kirjoitusten kokoelmasta⁷³, joka sisälsi mm. Robert Chesteriläisen käännöksen al-Khwarizmin algebrasta ja de Nemoren *De numeris datiksen*.⁷⁴ Hän pohjasi luentonsa tähän käsi-kirjoituskokoelmaan lisäten luento-esimerkit sen marginaaliin.

Vuonna 1489 painettiin Saksassa ensimmäinen aritmetiikan kirja, Widmanin *Behend und hüpsch Rechnung uff allen Kauffmanschaften*. Kirja on algebrallisten merkintöjen kannalta merkittävä, sillä siitä löytyy ensimmäisen kerran painettuna symbolit ”+” ja ”-”⁷⁵ lukujen yhteen- ja vähennyslaskun merkityksessä. Kirja oli hyvin suosittu ja siitä otettiin lisäpainokset vuosina 1508, 1519 ja 1526.

Adam Ries



Widmanin jälkeen seuraava saksalaisten algebrikkojen ketjussa oli Adam Ries (1492-1559). Hänen tiedetään asettuneen noin 25-vuotiaana Erfurtiin, jossa tutustui rikkaan lääkärin Georg Sturtzin kotona yliopistonpiireihin. Sturtz rohkaisi häntä opiskelemaan algebraa ja hankki hänelle Widmanin käytössä olleen käsi-kirjoituskokoelman. Tämän lisäksi Ries luki Widmannin, Grammateuksen ja Köbelin kirjoituksia. Erfurtissa hän kokosi Sturtzille omistetun algebran kirjan *Coss*, joka valmistui vuonna 1523. Kirjaa ei kuitenkaan koskaan painettu. Riesin laatimat aritmetiikan kirjat sen sijaan tulivat erittäin suosituksi ja ne olivat tärkein yksittäinen teki-jä intialaisten numeromerkkien leviämisessä Saksassa. Samaan tapaan kuin suomessa on tapana todeta ”Elon laskuopin mukaan”⁷⁶ viitatessa aritmeettisen laskutoimituksen oikeaan suoritukseen on Saksassa vastaavassa merkityksessä sanonta ”nach Adam Ries”⁷⁷.

Christoff Rudolff

Rudolff, pääosin 1500-luvulla vaikuttanut cossisti sai algebran oppinsa Wienin yliopistossa 1510-luvulla. Ilmeisesti Widmanin kirjoitukset ovat olleet myös hänen käytössään. Ainoa varma tieto hänen elämästään on vuodelta 1525, jolloin hän omisti laatimansa algebran kirjan *Coss* Brixenin arkkipiispalle. *Coss* ilmestyi painettuna vasta 1892⁷⁸, mutta se kiersi laajasti käsinkirjoitetussa muodossa. *Rudolff* kiinnitti aikaisempaa enemmän huomiota symboliikkaan ja hänen kirjoituksistaan on löydetty ensimmäinen neliöjuuren merkintä $\sqrt{}$. Rudolffin *Coss* oli ensimmäinen

⁷³ Codex Dresdensis C 80

⁷⁴ Charles Karpinski: Robert of Chester's Latin Translation of the Algebra of al-Khowarizm, kappale 7, s. 50- (http://library.albany.edu/preservation/brittle_bks/khuwarizmi_robertofchester/) ja DSB, s. 325 (Widman)

⁷⁵ DSB, Cajori, s. 230-234

⁷⁶ Efraim Elo laati 1900-luvun alussa oppikoulun matematiikan kirjan *Laskuoppi*, josta otettiin kaikkiaan 31 painosta vuosina 1912-1965. Kirja oli lukuisten suomalaisten ensimmäinen matematiikan kirja ja alkeislaskutoimitusten opettaja.

⁷⁷ DSB, s. 458 (Ries)

⁷⁸ Cajori, s. 134

kattava saksankielinen kirja algebrasta ja sillä oli siten vastaava merkitys Saksalle kuin Fibonccin *Liber abacilla* oli Italialle.

Michael Stifel

Merkittävin saksalainen cossisteista oli Michael Stifel⁷⁹, jonka kaksi tärkeintä kirjaa algebran alalta ovat *Arithmetica Integra* sekä uudistettu ja kommentaarilla varustettu Rudolffin *Coss*.

Stifelin merkittävimmät lisäykset pitkään hyvin samankaltaisena säilyneeseen toisen asteen yhtälön ratkaisun traditioon oli al-Khwarizmin kolmen kanonisen toisen asteen yhtälön⁸⁰ tiivistäminen yhdeksi yhtälöksi $x^2 = bx + c$, missä kertoimet b ja c

saattoivat olla myös negatiiviset. Ratkaisut hän sai kaavalla $x = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c}$. Stifelkään ei kuitenkaan hyväksynyt negatiivista lukua yhtälön ratkaisuksi.

Toinen hänen oma keksintönsä oli Pascalin kolmio. Hän itse kertoo joutuneensa laatimaan sen suurella vaivalla, koska ei ollut onnistunut löytämään siitä kirjallista esitystä.

Kolmas tärkeä lisäys algebran perinteeseen oli samankantaisten potenssien laskusääntö. Hän havaitsi, että jos sarjoissa

−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6
1/8	1/4	1/2	1	2	4	8	16	32	64

lasketaan ylemmät luvut yhteen on se sama kuin kerrotaisiin alemmat luvut. Ylempiä lukuja hän kutsui itse kehittämällään sanalla eksponentti.⁸¹ Lisäksi hän havaitsi, että eksponenttien vähennyslasku vastaa lukujen jakolaskua, eksponentin kertominen potenssiin korotusta ja jakaminen juuren laskemista.

Rudolffin ja Stifelin merkinnät olivat vielä kaukana nykyisistä, mutta he kuitenkin ymmärsivät kiinnittää aikaisempia kirjoittajia enemmän huomiota niihin. Aiemmin mainitun neliöjuuren merkin $\sqrt{}$ lisäksi sekä Rudolff että Stifel molemmat käyttivät Widmanin käyttöönottamia merkkejä ”+” ja ”−”. Muut laskutoimitukset he kirjoittivat sanoin. Stifel merkitsi tuntemattomia kirjaimilla A, B, C, D ja F, hieman samaan tapaan kuin de Nemore, mutta hän merkitsi potenssit toistamalla samaa kirjainta, esimerkiksi muuttujan A kolmannen potenssin hän merkitsi AAA ja muuttujan F neljännen potenssin FFFF.

Stifelin saavutukset eivät jääneet huomaamatta ja hänen kirjojaan käytettiin ja siteerattiin laajasti. Niiden vaikutus kesti myös melko pitkään, *Arithmetica Integra* viimeinen painos on vuodelta 1586 ja *Cossin* vuodelta 1615.

⁷⁹ Lähteet tähän: Smith II s. 519-522; Katz s. 353-5; DSB

⁸⁰ al-Khwarizmin yhtälöt 4-6

⁸¹ ”... 5 est exponens 32 & 8 est exponens numeri 256...” Smith II, s. 521

Michael Stifel (1487-1567)

Michael Stifelin varhaisesta nuoruudesta ei ole tietoja. On tiedossa, että hän oli katolinen munkki Augustinian luostarissa Esslingenissä, jossa hänet myös vihittiin papiksi 1511. Papiston moraalinen rappio ja monet väärinkäytökset tekivät Stifelistä pian Lutherin seuraajan. Väitettyään gematriaan perustuen paavi Leo X:n olevan antikristus, annettuaan synninpäästön eli absoluution ilman rahallista korvausta ja laadittuaan laulun Lutherin kunniaksi joutui hän alueensa piispan huomion kohteeksi ja pakeni hengenvaarassa lopulta Wittenbergin linnaan, jossa Luther majoitti hänet omaan taloonsa. Luther ja Stifel ystävästyivät ja uskonpuhdistajan vaikutusvallan kautta Stifel sai paikan Annabergin seurakunnassa, jossa Luther myös vihki ystävänsä avioliittoon. Stifeliä läpi koko hänen elämänsä kiehtonut numeromystiikka sai vaarallisia piirteitä, kun hän ennusti maailmanlopun tapahtuvan 18. lokakuuta 1533 klo 8.00. Syyskuussa 1533 Luther kehotti ystävänsä pitäytyä olemaan julistamatta seurakunnalleen maailmanlopun sanomaa. Stifelin pää ei kuitenkaan kääntynyt ja hän herkesi saarnaamasta maailmanloppua vasta, kun viranomaiset pidättivät hänet virasta ja asettivat kotiarestiin.

Lutherin ja Melanchthonin myötävaikuttamana, parin vuoden kuluttua episodista, hän sai viran toisesta seurakunnasta. Täällä Stifel päätti keskittää matemaattisen tarmonsä lukumystiikkaa hyödyllisemmin suorittamalla matemaattisia opintoja Wittenbergin yliopistossa. Wittenbergin yliopiston matematiikan professorin ja rehtorin Jacob Milichin suostuttelemassa hän laati teoksen *Arithmetica Integra* (1544), joka kokosi laajasti yhteen aritmetiikan ja algebran ajantasaisen tietämyksen sekä omat keksintönsä. Seuraavana vuonna hän julkaisi teoksen *Deutsche arithmetica* (1546), jonka tarkoitus oli muuntaa arabi- ja latinalaisperäistä algebran sanastoa enemmän saksankieliseksi ja tällä tavoin voittaa enemmän maanmiehiään algebran pariin. Hän myös toimitti Rudolffin *Cossista* uuden laitoksen varustaen sen kommentaarilla, joka oli laajempi kuin varsinainen teksti. *Cossin* uusi laitos julkaistiin ensimmäisen kerran vuonna 1553⁸².

⁸² DSB, kohdasta Rudolff, s. 591

1.7.9 Algebra Englannissa

Ensimmäinen painettu englanninkielinen aritmetiikkaa käsitellyt kirja oli William Caxtonin *The Myrroure of the World* (1481). Se sisälsi kuitenkin vain yhden sivun tälle aiheelle omistettuna. Ensimmäinen pelkästään aritmetiikkaan keskittynyt kirja oli tuntemattomaksi jääneen kirjottajan *An Introduction for to Lerne to Recken with the Pen, or with the Counter*. Kirja julkaistiin vuonna 1537 ja sen oleellinen sisältö oli paikkajärjestelmä, intialaiset numeromerkit ja laskeminen niitä käyttäen⁸³.

Robert Recorde

Robert Recorde (1510-1558) voitaisiin luonnehtia englannin matemaattisen sivistyksen isäksi. Hän asetti tavoitteekseen tarjota maanmiehilleen kansankielellä matematiikan perustet. Hän julkaisikin lukuisan määrän englanninkielisiä matematiikan kirjoja: *The Ground of Artes* (1543) käsitteli kokonaisluvuilla laskemista ja muuta perusaritmetiikkaa, *The Pathway to Knowledge* (1551) geometriaa Eukleideen pohjalta ja *The Whetstone of Witte*⁸⁴ (1557) algebraa. Lisäksi hän julkaisi kolme muuta vähemmän merkityksellistä kirjaa.

The Gound of Artes oli suosituin englanninkielinen aritmetiikan kirja 1500-luvulla. Siitä tehtiin useita painoksia ja se julkaistiin monta kertaa uudistettuna. Useimmat uusintajulkaisut ja korjatut painokset julkaistiin Recorden kuoleman jälkeen, viimeisimmät 1600-luvulla⁸⁵.

Whetstone of Witte pohjautui saksalaisiin algebran kirjoihin, erityisesti Stifelin teoksiin. Se on ensimmäinen koskaan painettu algebran kirja, jossa yhtäsuuruuden merkitsemiseen käytetään samanlaista merkkiä – kahta päällekkäistä viivaa – kuin nykyisinkin.

⁸³ Richeson, s.47

⁸⁴ Whetstone merkitsee hiomakiveä ja witte älykkyyttä tai nokkeluutta.

⁸⁵ Easton, s. 515-518

1.7.10 Algebra Ranskassa

Nicolas Chuquet (kuoli 1487) julkaisi vuonna 1484 kolmiosaisen aritmetiikan ja algebran kirjan nimeltään *Triparty*. Sisällöltään se vastaa likimain Rudolffin ja Stiefelin teoksia. *Tripartyn* varsinainen algebrallinen osuus levinnyt koskaan kovin laajalle, eikä varsinkaan vaikuttanut algebran myöhempään kehitykseen⁸⁶, joten ohi-tamme sen tällä lyhyellä maininnalla. Ranska oli myöhemmässä vaiheessa, Vietan ja Descartesin aikana 1600-luvulla algebran kehityksen kannalta merkittävä maa.

1.7.11 Algebra kehittyy Italiassa: 3. asteen yhtälön ratkaisu

3.asteen yhtälö

Kolmannen asteen yhtälön ratkaisua oli etsitty pitkään. Luca Pacioli totesi Summassa, että sen ratkaisu on mahdoton tunnetuilla menetelmillä. Tähän saakka algebra olikin keskittynyt toisen asteen yhtälön ratkaisemiseen sekä korkeammista asteista niihin, jotka palautuvat toisen asteen yhtälöksi tai ratkeavat juuren ottamisella.

Yleinen 3. asteen yhtälö

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

voidaan muokata muuttujan $x' = x + \frac{a}{3}$ eli sijoituksen $x = x' - \frac{a}{3}$ avulla muotoon

$$x^3 + px + q = 0,$$

josta on siis onnistuttu eliminoidaan toisen asteen termi. Kun vaaditaan, al-Khwarizmin tapaan, että kaikki kertoimet ja ratkaisut ovat positiivisia, saadaan kolme yhtälöä:

$$(1) \quad x^3 + px = q$$

$$(2) \quad x^3 = px + q$$

$$(3) \quad x^3 + q = px.$$

Scipione del Ferro

Edellä mainituista kolmesta perustyyppistä italialainen, Bolognassa syntynyt ja Bolognan yliopistossa vuodesta 1496 kuolemaansa saakka matematiikan professorina toiminut Scipione del Ferro (1465-1526) löysi ratkaisun tyyppille (1). Papereita, kirjoja tai muita suoria todisteita keksinnöistä ei jäänyt jäljelle, mutta yhtälön $x^3 + px = q$ ratkaisun löytyminen käy ilmi Girolamo Cardanon (1501-1576) ja Niccolò Tartaglian (1499-1557) kirjoituksista. Del Ferro ei koskaan julkaissut keksintöään, vaan piti sen pienen ystäväpiirin tietona. Ainoa varma eri lähteissä mainittu dokumentti ratkaisun olemassaolosta on käsikirjoitus, jonka del Ferro luovutti tyttärensä miehelle ja entiselle oppilaalleen Annibale dalla Navelle. Dokumentti on myöhemmin kadonnut.

⁸⁶ Katz, s. 359; Flegg, Hay & Moss, s. 12-13

Tartaglia

Del Ferron keksintö tuli hänen toisenkin oppilaansa, Antonio Marie Fiorin tietoon. Kuten del Ferro ja Nave, piti hänkin keksinnön visusti salassa. Opettajansa kuoltua hän kuitenkin ryhtyi ansaitsemaan sillä osallistumalla ajalle hyvin tyypillisiin julkisiin oppineiden välisiin kilpailuihin, joiden palkintoina saattoi olla huomattava määrä rahaa. Tähän aikaan yliopistoissa ei ollut minkäänlaisia virkoja ja palkat olivat huonoja. Pitääkseen jopa vuosittain uusittavan paikkansa oppineen oli edullista omistaa jokin sellainen metodi, jota muut eivät osanneet. Osallistumalla julkisiin väittelyihin hän saattoi taloudellisen hyödyn lisäksi saavuttaa suojelijoiden ja yliopiston suosion ja siten turvata tulevaisuutensa aina vähäksi aikaa kerrallaan. Tästä syystä myös del Ferro oli pitänyt ratkaisukaavan vain pienen piirin tietona.

Vuonna 1535 Fiore haastoi Tartaglian julkiseen kilpailuun. Molemmat asettivat kilpakumppanilleen ratkaistavaksi kolmekymmentä kysymystä. Fioren munat olivat yhdessä korissa: kaikki hänen tehtävänsä olivat tyyppiä (1). Fiore oli tietenkin vakuuttunut, että opettajansa hänelle uskoma kaavaa ei ollut muiden hallussa. Kuten ei aluksi ollutkaan. Tartaglia ei ylimielisenä ajatellut valmistautua millään tavalla tulevaan kisaan pitäen vastustajaansa, ilmeisesti oikeutetustikin, häntä selvästi heikompana. Kuultuaan huhun, että Fiorin hallussa oli kaava ”asian ja kuution” ratkaisemiseksi, hän kuitenkin hätäntyi ja ryhtyi työskentelemään kuumeisesti löytääkseen ratkaisun tälle yhtälölle. Hän kertoo itse, että helmikuun 13. päivän vastaisena yönä, vain hieman ennen kilpailun sovittua alkamisaikaa, hän inspiraation vallassa löysi ratkaisun. Itse kilpailussa Tartaglia onnistui ratkaisemaan parissa tunnissa kaikki Fioren asettamat kysymykset ja väittely päättyi Tartaglian murskavoittoon, sillä Fiore ei onnistunut ratkaisemaan yhtään Cardanon asettamaa tehtävää⁸⁷.

Niccolò Tartaglia (1499-1557)

Tartaglian isä oli Brescialainen postinkantaja, rehellinen, mutta ei kovin varakas. Tämän kuoltua Tartaglian ollessa vasta 7-vuotias jäi Tartaglia äitinsä Michelen kanssa todelliseen köyhyyteen. Tartaglia sai kokea 12-vuotiaana lisää elämän karua kohtaloa. Ranskalaiset valloittivat 1415 Brescian murhaten suuren osan kaupungin väestöstä. Myös Tartaglia sai osansa ranskalaisten vihasta useiden kasvoihin osuneiden miekaniskujen muodossa. Tartaglia hädin tuskin säilyi hengissä ja hänen kitalakensa ja leukansa vioittuivat pahasti. Ruhjeista johtuen Tartaglia kärsi koko loppuelämänsä puheviasta ja kasvojensa arvista, joiden peitoksi hän kasvatti myöhemmin parran. Jopa hänen nimensä Tartaglia (änkyttäjä) on pilkkanimi, jonka hän kuitenkin itsekin omaksui ja käytti sitä kirjoituksissaan.

14-vuotiaana äiti lähetti poikansa kouluun, mutta kirjaimen K kohdalla lesken rahat loppuivat ja Tartaglia joutui jättämään koulun kesken ”ennen kuin osasin kirjoittaa oman nimeni”, kuten Tartaglia itse asian kuvasi. Tartaglia ei kuitenkaan lopettanut opiskelua, vaan hankki salaa opettajan muistiinpanot ja opetteli lukemaan omatoimisesti.

Hän ryhtyi opiskelemaan itseksensä myös matematiikkaa. Lahjakkaana ja määrätietoisena hän edistyi nopeasti. Hän on matematiikan osalta ilmeisesti täysin itseoppinut. Noin 18-vuotiaana Tartaglia muutti Veronaan matematiikan opettajaksi ja perusti siellä myös perheen. Vuonna 1534 Tartaglia muutti Venetsiaan matematiikan professoriksi.

Tartaglia ei koskaan saavuttanut suurta mainetta. Hän kuitenkin kirjoitti useita kirjoja, joista merkittävin lienee tykin ballistiikkaa käsitellyt *Nova Scientia* (1537), joka oli ensimmäinen yritys esittää putoavan kappaleet liikkeen lait, joita Tartaglian maanmies Galileo Galilei tutki noin 50 vuotta myöhemmin kuuluisassa Pisan tornissa suorittamassaan kokeessa. Tartaglia myös käänsi ja julkaisi Eukleideen ja Arkhimedeksen kirjoituksia. Parhaiten Tartaglia tunnetaan kuitenkin kolmannen asteen yhtälön erikoistapauksen ratkaisusta, vaikka ei tästä aiheesta julkaissut koskaan minkäänlaista kirjoitusta.

⁸⁷ Derbyshire, s. 76
erkki.luoma-aho@jkl.fi

Cardano ja Tartaglia

Girolamo Cardano, joka kirjoitti parasta aikaa Paciolin *Summan* tapaista aritmetiikan ja algebran kirjaa, kuuli Fioren ja Tartaglian kilpailusta ja kiinnostui Tartaglian keksinnöstä. Cardano lähestyi Tartagliaa kirjeen välityksellä, jossa pyysi Tartagliaa kertomaan hänelle kaavan, jotta voisi julkaista sen kirjassaan, luvaten tietenkin antaa kunnian keksinnöstä Tartaglialle. Tartaglia luonnollisesti kieltäytyi.

Cardano oli kuitenkin päättänyt saada kalan koukkuun, eikä luovuttanut. Syötti, jota Cardano päätti käyttää Tartaglian houkuttelemiseksi luokseen oli vastustamaton. Hän lähetti Tartaglialle uuden kirjeen jossa antoi ymmärtää, että oli esitellyt ystävälleen ja suojelijalleen, asevoimien päällikölle Alfonso d'Avalosille, Tartaglian juuri ilmestyneen *Nova Scientian* ja järjestäneen Tartaglialle tapaamisen tämän kanssa, jotta hän voisi esitellä uusia ajatuksiaan ballistiikasta. Tartaglia huomasi olevansa puun ja kuoren välissä: kieltäytyminen tapaamasta sotilaskomentajaa voisi olla tuhoisaa hänen toiveilleen saada rahakas virka aseteknologian uudistajana, mutta samalla hän pelkäsi joutuvansa paljastamaan vastapalveluksena ratkaisukaavan Cardanolle. Hänen ei kuitenkaan auttanut kuitenkaan muu kuin matkata Cardanon luokse Milanoon. Pahaksi onneksi Tartaglian saavuttua kaupunkiin oli d'Avalos sieltä poissa viettäen aikaa Vigevanossa omassa linnassaan. Tartaglia joutui odottamaan kolme kokonaista päivää hänen paluutaan Cardanon suojissa ja kävi juuri niin kuin Tartaglia oli pelännyt: 25. maaliskuuta 1539 hän lopulta antoi periksi Cardanon lukuisten anomusten ja pyyntöjen edessä ja luovutti tarkoin varjellun salaisuutensa, vaatien kuitenkin Cardanoa vannomaan, että pitää keksinnön omana tietonaan. Cardano vannoi seuraavasti:

"Vannon sinulle Pyhän Evankeliumin ja herrasmiehen uskoni kautta, että en ainoastaan ole koskaan julkaisematta sinun minulle luovuttamia keksintöjä, vaan lisäksi lupaan ja vakuutan Kristillisessä uskossa, että kirjoitan ne muistiin sellaisella salakoodilla, että kuolemani jälkeen kukaan ei ole kykenevä ymmärtämään niitä."

Pian tämän jälkeen ryhtyi Tartaglia kuitenkin katumaan höltymistään, harmistui ja ilmaisi Cardanolle halunsa lähteä välittömästi kohti Vigevanoa. Cardano kirjoitti Tartaglian mukaan suosituksen d'Avalosille annettavaksi. Petetyksi itsensä tuntenut Tartaglia kuitenkin suuntasi ratsunsa suorinta tietä kotiin tapaamatta koskaan d'Avalosia. Tartaglia myös katkaisi välit Cardanon kanssa, eikä suostunut enää olemaan edes kirjeenvaihdossa hänen kanssaan, Cardanon useista ystävällisistä yhteydenotoista huolimatta.

Tartaglian epäilystä huolimatta Cardano piti valansa, eikä julkaissut keksintöä pian tapahtuman jälkeen ilmestyneessä aritmetiikan ja algebran kirjassaan. Cardano, joka oli itsekin lahjakas ja tuottelias matemaatikko paneutui tutkimaan käsiinsä saamaa kaavaa ja onnistui ratkaisemaan sekä Tartaglian tavoittamattomissa olleet tapaukset (2) ja (3) että löytämään muunnoksen yleisestä muodosta toisen asteen termin osalta vajaaseen muotoon. Lisäksi hänen apunaan työskennellyt oppipoika Ludovico Ferrari (1522-1565), lahjakas matemaatikko hänkin, löysi ratkaisun yhtälölle $x^4 + ax^2 + b = cx$. Cardano oli nyt tietojensa kanssa vaikeassa tilanteessa. Toisaalta häntä sitoi vala, jota hän ei millään muotoa halunnut rikkoa, mutta toisaalta hän tiesi omistavansa sensaatiomaisen matemaattisen tuloksen, jonka julkaiseminen toisi hänelle kuuluisuutta ja rikkauksia. Aika kului, eikä kumpikaan osapuolista julkaissut hallussaan ollutta keksintöä. Vuonna 1543, neljä vuotta tapaamisen jälkeen, Cardano kuuli huhuja, että jo ennen Tartagliaa eräs del Ferro olisi ratkaissut yhtälön. Hän matkusti saman tien yhdessä Ferrarin kanssa Bolognaan ottamaan selvää huhujen todenperäisyydestä. Del Ferron jälkeensä jättämistä papereista löytyikin ratkaisu hyvin dokumentoituna. Tässä uudessa tilanteessa Cardano koki olevansa vapaa valastaan, sillä kirjaimellisesti ajateltuna hän ei julkaisi Tartaglian, vaan jo edesmenneen del Ferron menetelmän. Vuonna 1545 ilmestyikin sensaatiomainen algebran kirja *Artis magnae sive De regulis algebraicis liber unus* tai lyhyesti *Ars Magna* (Suuri taito), jonka oleellinen sisältö

esti *Ars Magna* (Suuri taito), jonka oleellinen sisältö oli kolmannen asteen yhtälön yleinen ratkaisu.

Kiista

Kirjan ilmestyminen sai Tartaglian luonnollisesti silmittömän raivon valtaan. Hän piti Cardanoa valapattona ja varkaana ja ryhtyi syyttelemään ja pilkkaamaan Cardanoa julkisesti. Mikään ei kuitenkaan saanut tehtyä tekemättömäksi ja yhä edelleenkin ratkaisukaavat tunnetaan Cardanon kaavojen nimellä. Cardanon puolustuksesi on todettava kuitenkin, että hän ilmaisee aivan avoimesti sekä *Ars Magnan* johdantokappaleessa että varsinaisten kaavojen yhteydessä mitkä niistä ovat del Ferron, Tartaglian ja Ferrarin keksintöjä ja mitkä hänen omiaan. Tartaglian kiistakirjoitukset sekä Cardanon viehtymys ennustuksia ja horoskooppeja kohtaan kuitenkin turmeli vuosisadoiksi hänen maineensa ja vasta viimeisen sadan vuoden aikana on osattu nähdä myös hänen ansionsa särmikkään persoonan takaa.

Kiistassa voi nähdä myös syvälle tiedemaailmaan perusrakenteisin asti ulottuvan ajattelutavan muutoksen keskiaikaisesta ”mestarien” salaisuuksien varjelemisen kulttuurista nykyiseen tieteen tekemisen kulttuuriin, johon kuuluu oleellisena avoin ja mahdollisimman nopea uusien keksintöjen ja ideoiden julkaiseminen. Muutoksen osaltaan aiheutti kirjapainotaito, joka mahdollisti tekstien nopean leviämisen. Oman uran ja menestyksen kannalta olikin edullisempaa levittää uudet keksinnöt omissa nimissä mahdollisimman laajalle kuin pitää ne entiseen tapaan omana tietonaan. Cardano oli ajan hermolla pitäen julkaisukynnyksen matalana ja julkaisutahdin nopeana.

Girolamo Cardano (1501-1576)



Girolamo Cardanon elämää voi oikeutetusti kuvata sanalla värikäs. Tällöinkin tosin vähätellään koko elämänsä ajan uhkapelejä harrastanutta, aikanaan Euroopan kuuluisinta lääkäriä, jonka vastaanotolle kuninkaalliset jonottivat ja joka kärsi inkvisiton langettaman useiden kuukausien vankeustuomio julkaistuaan Kristuksen horoskoopin. Elämänsä viimeisen vuoden Girolamo käytti kirjoittaen suoruuksellaan lukijansa edelleen hätkähdyttävän omaelämäkerran *De Vita Propria Liber* (1575), joka peittoaa sisältämiensä intiimien yksityiskohtien määrällä jopa 2000-luvun julkkishaastattelut. Cardano kertoo häkellyttävän avoimesti mm., että hän syntyi normaalisti useista abortointiyrityksistä huolimatta, että hän oli nuorena impotenssi, että hänellä on pienet jalat joihin on vaikea löytää sopivia kenkiä ja että hän puhuu niin karhealla ja kovalla äänellä, josta on vaikea saada selvää miltään etäisyydeltä. Hän kuvailee myös suurella tarkkuudella ruumiinsa toimintahäiriöitä alkaen isorokosta, munuaisviasta ja kihdistä päätyn erilaisiin epämiellyttäviin tulehduksiin. Moni kirjan lukenut, kuten myös sen vuonna 1643 ranskaksi kääntänyt ja julkaissut Gabriel Naudé, on ollut vakuuttunut Girolamo Cardanon olleen mieleltään häiriintynyt. Onpa häntä pidetty riivattunakin.

Cardano ei saanut elämälleen parasta mahdollista alkua, Girolamo syntyi avioliiton ulkopuolelta. Hänen äitinsä Chiara Micheri oli nuori leski ja isä Fazio Cardano Chiaraa huomattavasti vanhempi matematiikkaa, lääketiedettä ja okkultismia ja harrastanut lakimies, joka oli ansioituneempi matematiikassa – jopa Leonardo da Vinci kääntyi tämän puoleen geometriaa koskeneissa kysymyksissä – kuin ammattinsa harjoittamisessa. Fazio ei suostunut menemään yksin köyhän lesken kanssa ennen kuin Girolamo oli seitsenvuotias, jolloin he muuttivat Fazion vuokraamaan asuntoon. Fazio ja Chiara luultavasti myös avioituivat hieman ennen Fazion kuolemaa.

Nuorutensa Girolamo vietti kotona ja Fazio päästi hänet opiskelemaan lääketiedettä Paduan yliopistoon vasta 19-vuotiaana, äitinsä suurten ponnisteluja ja muhkean perheriidan saattelemana. Opinnoissa hän osoitti nopeasti älylliset kykynsä ja menestyi niissä hyvin.

Cardano oli luonteeltaan vaikea ja käytökseltään karkea ja jopa töykeä. Hän oli taipuvainen omahyväisyyteen ja omien saavutustensa esille nostamiseen. Tällaisella käytöksellä hän onnistui hankkimaan itselleen vihamiehiä koko elämänsä läpi. Lääkäriksi valmistuttuaan hän ei onnistunut, useista sitkeistä pyrkimyksistä huolimatta, saavuttamaan lääkärien killan jäsenyyttä voidakseen harjoittaa ammattia laillisesti Milanossa. Varsinaiseksi syyksi ilmoitettiin epäryys, mutta taustalla lienee ollut myös henkilökohtaisia kaunoja.

Taloudellisista syistä Cardano oli pakotettu muuttamaan 26-vuotiaana pois kotikaupungistaan maalaislääkäriksi pieneen Saccon kaupunkiin Paduan lähistölle. Poikamiesaikaansa siellä hän kuvailee iloiseksi ja onnelliseksi "vapaana kaikista huolista". Saccossa hän myös avioitui. Vaimoonsa hän tutustui eräänlaisen enneunen kautta, jossa hän näki tulevan puolisonsa. Enneunien näkeminen sekä erilaisten ennustusten ja horoskooppien laatiminen sekä niistä kirjoittaminen oli koko Cardanon elämän läpi jatkunut tapa ja myös tärkeä tulonlähde.

Perheen perustettuaan Cardano ei pystynyt elättämään vaimoaan maalaislääkärin palkallaan, joten hän päätti palata takaisin Milanoon. Siellä, varattomana ja kodittomana, hän päätyi perheineen köyhäintaloon. Tätä aikaa elämässään Cardano itse kuvailee kaikkein nöyryyttävimmäksi ja alhaisimmaksi. Kotikaupungissaan hänen kuitenkin onnistui, laittomasti lääkärintointa harjoittamalla, parantamaan kuin ihmeen kautta joitain erittäin vaikutusvaltaisia Milanolaisia. Uusien suojelijoiden painostuksesta lääkärien kiltä lopulta suostui hyväksymään Cardanon jäsenekseen.

Cardano osoittautui lääkärin toimensa lisäksi menestyksekkääksi kirjailijana. Hän laati kaksi hyvin suosituksi noussutta aritmetiikan kirjaa, jolloin eräs saksalainen kirjapainaja lupasi julkaista kaikki käsikirjoitukset jotka hän vain pystyi tuottamaan. Cardano olikin tuottelias ja laati elämänsä aikana 131 painettua kirjaa sekä 170 käsikirjoitusta, jotka hän poltti heikkolaatuisina sekä 111 käsikirjoitusta, joita ei ehditty painaa. Kirjoillaan, jotka käsittelivät likimain kaikkea matematiikan ja runouden sekä tieteen ja ennustamisen väliltä hän saavutti suuren maineen niin tavallisen kansan kuin ylhäistenkin keskuudessa. Niinpä noin viisikymmenvuotiaana Cardano oli kautta koko Euroopan tunnettu lääkäri, jonka palveluksista Paavi ja kuninkaalliset kilpailivat. Esimerkiksi Tanskan kuningas tarjosi huomattavaa rahasummaa, jotta tämä olisi suostunut hänen hovilääkäriksensä. Cardano hylkäsi useimmat tarjoukset haluten pysytellä Milanossa, mutta Skotlannin kuningas huolissaan arkkipiispansa terveydestä teki Cardanolle niin avokätisen tarjouksen, ettei hän voinut enää kieltäytyä. Cardano matkusti Skotlantiin, jossa onnistuikin lieventämään arkkipiispan pahaa allergiaa ja astmakohtauksia hyvin modernein menetelmin: Cardano heitti höyhentyynyt pois, vaihtoi tyynyliinat silkkiin ja vuodevaatteet pellavaisiin kankaisiin sekä kehotti arkkipiispaa huolehtimaan paremmin henkilökohtaisesta hygieniasta ja puhtaudesta. Paluumatkalla tapahtui kuitenkin eräs hänen elämänsä surkeimmista epäonnistumisista. Nuori, vasta 16-vuotias Englannin kuningas oli sairastunut tuberkuloosiin ja huolestuneet hoviherrat pyysivät Cardanoa laatimaan tälle horoskoopin. Horoskoopissa Cardano lupasi kuninkaalle pitkän elämän. Kun kuningas kuoli pian horoskoopin ilmestyttyä joutui ennustuksen laatija selittelemään pitkään karkeaa epäonnistumistaan.

Cardanon avioliitto osoittautui pian epäonnistuneeksi, mutta hänen "lohtunaan" olivat siitä syntyneet kolme lasta. Jos isä-Cardanon elämä oli vuoristorataa, niin lasten elämä oli syöksykierrettä. Vanhin poika tuomittiin kuolemaan vaimonsa ja tämän sukulaisten myrkyttämisestä syytettynä 26-vuotiaana. Perheriidan päätteeksi tämä oli syöttänyt uhreille arsenikilla maustetun kakun. Girolamo ei koskaan toipunut esikoisensa kuolemasta. Toipumista ei auttanut murhe keskimmäisen lapsen, ainoan tyttären hedelmättömyydestä eikä nuorimman pojan moraalittomasta, tuhlailevasta ja villistä elämästä. Nuorimman pojan rikolliset toimet huipentuivat siihen, että hän ryösti oman isänsä. Tällöin monta kertaa poikansa vaikeuksista ulos maksanut isä ei voinut enää muuta kuin kääntyä viranomaisten puoleen ja hankkia poikansa oikeuden eteen. Cardano kuoli rauhallisesti omassa sängyssään 20.9. 1576, täsmälleen sinä päivänä, jona hän oli omassa horoskoopissaan ennustanut. Eräiden lähteiden mukaan hän näännytti itsensä nälkään tai jopa myrkytti itsensä saadakseen ennustuksensa toteutumaan⁸⁸.

⁸⁸ Derbyshire, s.74

Cardano eli hyvin erikoisen, suorastaan poikkeuksellisen elämän. Niin laaja vaikutus hänellä aikanaan oli, että useat Shakespearen asiantuntijat pitivät erästä hänen kirjaansa inspiraation lähteenä useille Hamletin ajatuksille kuolemasta ja mm. repliikille ”To be or not to be...”. Lepniz luonnehti Cardanoa sanoilla:

”Cardano oli vikoineen kaikkineen suuri mies; ilman niitä hän olisi ollut vertaansa vailla.”⁸⁹

Ars Magna

Vaikka Cardano itse piti itseään ennen kaikkea lääkärinä ja matematiikka oli hänelle lähinnä huvittelua, niin *Ars Magna* on monella tavalla hyvin merkittävä kirja ja eittämättä Cardanon matemaattinen pääteos. Tutustutaan seuraavaksi tarkemmin yhtälön $x^3 + px = q$ ratkaisuun, jonka Cardano esittää seuraavalla sanallisella tavalla:

”Korota x :n kertoimen kolmasosa kuutioon; lisää se vakion puolikkaan neliöön; ja ota summasta neliöjuuri. Kaksinkertaistat tämän ja toiseen kahdesta lisäät puolet vakiosta ja toisesta vähennät puolet samasta luvusta. Saat tällöin *binomiumin* ja *apotomen*. Sitten vähentämällä *apotomen* kuutiojuuren *binomiumin* kuutiojuuresta jäljelle jäävä erotus on luvun x arvo.”⁹⁰

Modernein merkinnöin sääntö on
$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2} + \frac{q}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2} - \frac{q}{2}}.$$

Perustelujen löytäminen tälle kaavalle – Cardano sai Tartaglialta käsiinsä vain yllä olevan säännön runomuodossa – oli Cardanon omien sanojen mukaan ”hyvin vaikeaa” ja hän työskenteli kirjan käsikirjoituksen parissa viisi vuotta, tämä käy ilmi kirjan päätössanoista:

”KIRJOITETTU VIIDESSÄ VUODESSA, SÄILYKÖÖT YHTÄ MONTA TUHATTA”.

Cardanon perustelut olivat geometriset ja hyvin vaikeat ymmärtää, sillä hänellä ei ollut käytössään meille tuttua symbolista algebraa vaan hän joutui nojaamaan mm. Eukleidekseen. Perustelujen oleellinen ajatus voidaan havainnollistaa algebrallisen sijoituksen $x = u - v$ kautta, jolloin yhtälö tulee muotoon

$$x^3 + px = u^3 - v^3 - 3uv(u - v) + p(u - v) = q.$$

Tämä yhtälö toteutuu jos ja vain jos $u^3 - v^3 = q$ ja $3uv = p$. Siten muodostuu kuutioiden erotuksen ja kuutioiden tulon yhtälöpari

$$\begin{cases} u^3 - v^3 = q \\ u^3 v^3 = \left(\frac{p}{3}\right)^3 \end{cases}.$$

Tämä palautuu toisen asteen yhtälöksi, josta voidaan ratkaista u^3 ja v^3 ja tämän jälkeen myös u ja v .⁹¹

Yhtälöissä (2) ja (3) Cardano saattoi soveltaa suurella vaivalla löytämänsä menetelmää pienellä muutoksella, sijoittamalla $x = u + v$. Tapauksessa (2) saadaan:

$$x^3 = px + q$$

$$u^3 + v^3 + 3uv(u + v) = p(u + v) + q$$

Tästä saadaan ehdot $u^3 + v^3 = q$ ja $u^3 v^3 = \left(\frac{p}{3}\right)^3$ ja lopulta ratkaisu

⁸⁹ Ore, s. 52

⁹⁰ Cardano, s. 98-99

⁹¹ Ratkaisumenetelmä: Cardano, s.96-101; Struik Sourcebook, s. 62-69; van der Waerden s. 52-54
erkki.luoma-aho@jkl.fi

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

Lukualueesta

Ratkaisuissa oli yksi ongelma, tietyissä tilanteissa neliöjuuren sisälle ilmestyvä negatiivinen luku. Cardano pyrki välttämään tätä tilannetta ja antoi ehdot, milloin yleinen kaava on voimassa. Erityisesti tapauksen *casus irreducibilis* eli tilanteen, jossa ratkaisukaava antaa reaalisen juuren kahden imaginaarisen luvun kuutiojuuren summana, ymmärtäminen tuotti vaikeuksia. Vasta Rafael Bombelli pystyi osoittamaan, että kaavan antama luku ja kokeilemalla löydetty reaalijuuri ovat tosiasiassa saman luvun eri esitysmuodot.

Negatiivisia lukuja ei oltu tähän saakka hyväksytty yhtälöiden ”oikeina” ratkaisuna eikä Cardanokaan pidä niitä positiivisten lukujen kanssa tasavertaisena. Pääasiassa hän vältteli yhtälöitä, jotka olisivat antaneet negatiivisia juuria.

Cardano on kuitenkin selvästi pohtinut sekä negatiivisten lukujen että negatiivisten lukujen neliöjuurten olemassaoloa ja mystistä luonnetta. Avomielisyys näitä lukuja kohtaan ei yllätä, sillä Cardano oli kiinnostunut kaikesta yliluonnollisesta. Onkin sopivaa, että juuri Cardano on ensimmäinen matemaatikko, joka suoritti laskutoimituksia kompleksiluvuilla. Hänellä on kirjassa jopa oma kappale, jossa hän antaa esimerkkejä sekä negatiivisista luvuista että kompleksiluvuista yhtälön ratkaisuna. Kappaleesta löytyy esimerkiksi seuraava tehtävä:

”Jaa luku 10 kahteen osaan niin, että osien tulo on 40.”

Ratkaisuna Cardano antaa luvut $5 + \sqrt{-15}$ ja $5 - \sqrt{-15}$. Ratkaisulle antamissaan perusteluissa hän toteaa:

”Laita sivuun laskuun sisältyvä henkinen kidutus ja kerro luku $5 + \sqrt{-15}$ luvulla $5 - \sqrt{-15}$, jolloin saat $25 - (-15)$, mikä on $+ 15$. Siis tulo on 40. Silti lukujen luonne ei ole sama kuin luvulla 40. ... Tämä on todella hienostunutta⁹² ... ”

Hän kuitenkin tosiasiaa hyväksy löytämänsä ratkaisua, vaan toteaa sen hyödyttömäksi. Tämä oli silti merkittävä päänavaus kompleksilukujen käsittelyssä.

Merkintöjen osalta Cardano seurasi tyypillistä italialaista (mm. Pacioli) retorista tapaa eli varsinaisia symboleja ei ollut, mutta joitain laskutoimituksia hän lyhensi yhdellä kirjaimella. Kirjaimet p (tai $\tilde{p}$) ja m (tai $\tilde{m}$) merkitsivät yhteen- ja vähennyslaskua ja R neliöjuurta. Korkeammille potensseille hänellä oli lyhennysmerkinä, mutta muuten algebra oli sanallista. Esimerkiksi edellä mainitun negatiivisten lukujen neliöjuurten kertolaskun hän kirjoitti näin (2. painos)⁹³:

”5. $\tilde{p}$. R . $\tilde{m}$. 15

5. $\tilde{m}$. R . m . 15

25. m . m . 15. *quad. est* 40.”

Vuoden 1570 painokseen Cardano lisäsi kappaleen, jossa hän käsitteli tarkemmin negatiivisten lukujen neliöjuuria. Sieltä löytyy mm. seuraava huomautus:

” R p : *est* p : R m : *quadrata nulla est iuxta usum communem*⁹⁴” eli ”positiivisen luvun neliöjuuri on positiivinen; negatiivisen luvun neliöjuuri ei ole yleisen hyväksynnän mukaan sovelias”.

⁹² ”...uere est sophistica.” Smith Sourcebook, s. 202

⁹³ Cajori, s. 118

⁹⁴ Cajori, s. 118

2.7.12 Rafael Bombelli ja kompleksiluvut

Rafael Bombelli

L'ALGEBRA
OPERADi RAFAEL BOMBELLI da Bologna
Divisa in tre Libri.Con la quale ciascuno da se potrà venire in perfetta
cognitione della teoria dell' Arithmetica.Con vna Tavola copiosa delle materie, che
in ella si contengono.Poffa hora in luce à beneficio della Studioli di
della profittione.IN BOLOGNA,
Per Giovanni Rossi. MDLXXIX.
Con licenza de' Superiori

Rafael Bombelli (1526-1572), viimeinen merkittävä renessanssiajan italialainen algebranharrastaja, oli 19-vuotias nuorukainen Cardanon *Ars Magna* ilmestyessä. Niin suuren vaikutuksen kirja häneen teki, että hän on todennut

”Tosiasiaa kukaan ei ole selvittänyt algebran salaisuuksia, paitsi Cardano Milanosta. *Ars Magnassa* hän käsitteli aihetta pitkästi, mutta ei ollut esitystavassaan selkeä.”⁹⁵

Bombelli ottikin tavoitteekseen kirjoittaa perusteellisen algebran kirjan, joka olisi niin helpopolukuinen, että kuka tahansa voisi sitä lukea, mutta niin kattava, että pelkästään sen avulla, ilman muiden kirjojen apua, voisi oppia hallitsemaan algebran.

Lopulta vasta pari kuukautta ennen Bombelin kuolemaa ilmestynyt *L'algebra parte maggiore dell'arithmetica* jakaantui kolmeen osaan, joista ensimmäisessä hän käsitteli pääasiassa aritmetiikkaa sisältäen mm. juurten ja potenssien määritelmät sekä laskutoimitusten suorittamisen niillä. Toisessa kirjassa hän käsitteli algebraa alkaen tuntemattoman ja sen eri potenssien määritelmästä päättyen neljännen asteen yhtälön käsittelyyn. Kolmannessa kirjassa oli lähes kolmesataa algebran sovellusta, jotka aiemmasta perinteestä poiketen eivät olleet käytännöllisiä. Syyksi tähän Bombelli ilmaisee kirjassaan, että hänen nimenomaisena tarkoituksenaan on ollut opettaa ”korkeampaa aritmetiikkaa”⁹⁶ vastakohtana aiempaan käytännölliseen soveltamiseen (ostaminen, myyminen, varastojen laskeminen jne.) tähtäävälle abacistiperinteen mukaiselle aritmetiikalle.

Vuonna 1923 löydettiin unohduksissa ollut kirjan varhainen käsikirjoitus, joka poikkeaa joiltain osin painetusta kirjasta. Tässä versiossa ei ole mm. mitään viitteitä korkeammasta aritmetiikasta, vaan kirjan kolmas osa on täynnä käytännön sovelluksia. Selitys kolmannen osan täydelliselle uudistukselle on Bombelli tekemä matka Roomaan, jonka aikana hän tutustui Vatikaanin kirjastossa Diofantoksen *Aritmeticaan*. Tämä muutti Bombellin suhtautumisen algebraan täysin ja hän päätti antiikin mestaria jäljitellen muokata kirjan kolmannen osan teoreettisemmaksi. Likimain puolet uusista probleemoista oli lainattu Diofantokselta ja loputkin olivat luonteeltaan abstrakteja.

Bombellin *l'Algebran* käsikirjoitusta kirjoittaessaan läpikäymä prosessi on matematiikan historian kannalta merkittävä. Bombelli päätti irrottautua tietoisesti käytännön soveltamisesta ja ryhtyä luomaan uutta teoreettista algebraa.

Bombellin merkinnät

Bombelli poikkeaa aiemmasta italialaisen algebran perinteestä myös edistyksellisten merkintöjensä osalta. Hän käyttää tuntemattoman potensseille kaaren sisällä olevaa numeroa: <tähän kuva⁹⁷>Julkaisematta jääneessä käsikirjoituksessa hän käyttää jopa vakiolle potenssia 0. Juuret hän merkitsi tyylylityllä R kirjaimella kuten ennenkin, mutta juuretavan olevan lausekkeen hän rajaa hakasilla $[]$. Hän kirjoitti mm. lausekkeen $\sqrt{7 + \sqrt{14}}$ muodossa ” $R [7 p. R 14]$ ” ja lausekkeen $\sqrt[3]{\sqrt{68} + 2} - \sqrt[3]{\sqrt{68} - 2}$ muodossa ” $Rq [Rc [Rq 68 p. 2] m Rc [Rq 68 m 2]]$ ”.

Kompleksiluvut

Kompleksilukujen käsittelyssä hän edistyi esikuvastaan Cardanosta ja hän suorittaa niillä laskutoimituksia Cardanoa vapaammin. Varmistaakseen, että lukija ymmärsi

⁹⁵ ”ma in vero alcuno non e stato, che nel secreto della cosa sia penetrato, oltre che il Cardano Melanese nella sua arte magna, ove di questa scientia assai disse, ma nel dire fut oscuro.” (Jayawardene, s. 513)

⁹⁶ Jayawarden, s.511

⁹⁷ Esim. Cajori, s. 125, DSB kohdasta Bombelli s. 281, Katz, s. 365.

niiden erikoisen luonteen hän esitti säännöt kuinka niiden kanssa tuli operoida. Koska kyseiset luvut eivät ole positiivisia (*più*) eivätkä negatiivisia (*meno*) hän kutsui lukua $+i$ nimellä *più di meno* (positiivinen negatiivisesta) ja lukua $-i$ nimellä *meno di meno* (negatiivinen negatiivisesta). Näin esimerkiksi luvun $2 + 3i$ Bombelli kirjoitti ”2 *p di m* 3” ja luvun $2 - 3i$ ”2 *m di m* 3”. Bombelli esitteli uusille luvuille kertolaskusäännöt:

<i>più di meno via più di meno fa meno</i>	$i \cdot i = -1$
<i>più di meno via meno di meno fa più</i>	$i \cdot (-i) = +1$
<i>meno di meno via più di meno fa più</i>	$-i \cdot i = +1$
<i>meno di meno via meno di meno fa meno</i> ⁹⁸	$-i \cdot (-i) = -1$

Bombelli osoitti osaavansa käsitellä kompleksilukuja ja mm. erotti reaali- ja imaginaariosat kertolaskussa toisistaan. Syy miksi Bombelli ryhtyi laajentamaan lukukäsitettä oli Cardanon kaavojen tapaus *casus irreducibilis*. Esimerkiksi yhtälön

$x^3 = 15x + 4$ ratkaisuksi kaava antaa juuren $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$, vaikka yhtälön ilmiselvä ratkaisu on 4. Bombelli osoitti tarkkojen laskujen avulla, että kaavan antama ”hienostunut”⁹⁹ juuri on sievennettynä $(2 + \sqrt{-1}) + (2 - \sqrt{-1})$ eli $x = 4$. Bombelli toteaa tästä, että

”aluksi asia näytti perustuvan enemmän virheellisiin kuin oikeisiin päätelmiin, mutta jatkoin etsimistä kunnes löysin todistuksen.”¹⁰⁰

Reaalilukuratkaisun lisäksi Bombelli käytti vanhaa toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaa tilanteessa, jossa ratkaisuna oli pelkkä kompleksiluku. Esimerkiksi yhtälön $x^2 + 20 = 8x$ ratkaisuksi Bombelli ilmoittaa luvut $x = 4 + 2i$ ja $x = 4 - 2i$.

l'Algebran merkitys

Bombellin teoksella oli selvä vaikutus mm. hollantilaisten matemaatikkojen Simon Stevinin ja Adrien Romainin tuotantoon ja merkintöihin. Myös differentiaalilaskennan keksijänä tunnettu Leibniz opiskeli kolmannen asteen yhtälön ratkaisun Bombellin kirjasta.

⁹⁸ Derbyshire, s. 84

⁹⁹ Bombelli seuraa tässä Cardanon nimitystä, ks. alaviite Cardanon kohdalta.

¹⁰⁰ van der Waerden, s.61

1.7.12 Algebran uusi alku

1500-luvun lopulle tultaessa algebran alalla oli tehty kiistämättömiä uusia löytöjä, joiden tekemisessä olivat kunnostautuneet etenkin italialaiset. Kuitenkin algebran perusolemus, ”säkillinen temppuja”, oli säilynyt al-Kwharizmin ajasta alkaen samana. Toisen asteen yhtälön ratkaiseminen ei merkinnyt yhtälön $ax^2 + bx + c = 0$ ratkaisemista, vaan kuuden kanonisen erillisen yhtälön ratkaisemista kuhunkin tilanteen soveltuvalla erillisellä sanallisesti kuvatulla menetelmällä. Muutos oli kuitenkin tulossa.

Arithmetica

Eukleides Aleksandrialainen (n. 300 eKr), puupiirros vuodelta 1584

Regiomontanus (1436–1476) löysi matkallaan Venetsiaan 1462 siihen saakka kadoksissa olleen Diofantoksen *Aritmetican*¹⁰¹, joka siten tuli tietoon Euroopassa. Diofantos innosti aiemmin jo Bombellia, mutta vaikutus oli vasta puolittainen, sillä Bombelli ei ollut ilmeisesti ymmärtänyt Diofantoksen algebran ja koko kreikkalaisen matematiikan luonnetta.

Pappus Aleksandrialaisen (n. 290 – 350) *Synagoge* eli ”Kokoelma”, kreikkalaisen matematiikan kolmetoistaosainen ensyklopedia ja kommentaari, eräs viimeisimmistä kreikkalaisen matematiikan suurteoksista, tuli eurooppalaisten tietoon vuonna 1588, kun Federico Commandinin latinankielinen käännös julkaistiin Italiassa¹⁰². 1500-luvun loppuun mennessä käytännössä kaikki tärkeimmät Kreikan ”matemaattisen kaanoniin” kuuluvat kirjat oli käännetty latinaksi. Eurooppalaismatematikot havaitsivat, että kaikki kreikkalaisten matemaattiset tekstit etenivät samalla mestarillisella tavalla muutamasta yksinkertaisesta aksioomasta äärimmäisen monimutkaisiin tuloksiin. Kirjoitukset huolella opiskelleiden Eurooppalaisten mielessä alkoi kummitella ihailun lisäksi kysymyksiä. Miten ihmeessä muinoin eläneet kreikkalaiset olivat onnistuneet tässä kaikessa? Miten kreikkalaiset olivat osanneet rakentaa mestarilliset järjestelmänsä? Miten he olivat keksineet lauseensa? Eukleideen, Apolloniuksen ym. kirjoitukset itsessään eivät vastanneet näihin kysymyksiin. Ne eivät itse asiassa yleensä antaneet pienintäkään vihjettä kuinka tuloksiin oli aikoinaan päädytty. Likimain ainoa kreikkalaisten itsensä laatima teksti, joka vastaa laajasti näihin oleellisiin kysymyksiin on *Synagogen* kirja VII, jossa Pappos esittelee ja määrittelee kreikkalaisten matemaattiseen päättelyyn oleellisesti kuuluneet *analyysin* ja *synteesiin*. Niinpä 1500-luvun lopulta alkaen, Pappoksen avustamana, saatettiin oppia ymmärtämään kreikkalaisten mestarien itsensä huolella viimeistelemiä lopputuloksia edeltäneitä vaiheita. Tämän löydön innoittamana useat matemaatikot ryhtyivät pohdiskelemaan universaalin kaikkiin kysymyksiin vastauksen antavan tieteen perustamisen mahdollisuutta.

¹⁰¹ Regiomontanuksen löytämä käsikirjoitus oli puutteellinen, eikä vieläkään ole löydetty täydellistä kaikkia 13 kirjaa sisältävää käsikirjoitusta. Nykyisin tunnetaan kaikkiaan 10 kirjaa, joista kirjat 4–6 on löydetty arabiankielisenä käännöksenä.

¹⁰² Encyclopedia Britannica, Pappus of Alexandria
erkki.luoma-aho@jkl.fi

François Viète



Figure 1. Portrait of François Viète (1540–1603). Oil on wood, anonymous, undated. Musée de la Ville de Paris, Paris. (Reproduced with the permission of Conservation Départementale de Musée de la Ville de Paris.)

François Viète oli ensimmäinen eurooppalainen, joka laajan humanistisen koulutuksensa ja syvällisen matemaattisen näkemyksensä avulla saattoi havaita harjoitetun algebran perustavaa laatua olevan vajavuuden kreikkalaisten matemaatikkojen aksiomaattiseen lähestymistapaan verrattuna. Hän ymmärsi kuinka Diofantos oli soveltanut algebraansa analyysin ja synteesin.

Jo ennen Pappoksen *Synagogen* tulemista yleiseen tietoisuuteen Eukleideen *Alkeiden* muinaisessa, Theon Aleksandrialaisen laatimana pidetyssä kommentaarissa, kirjan XIII lauseiden 1-5 kohdalta, löytyy analyysin ja synteesin suppea määritelmä.¹⁰³ Tämä vähäinen katkelma oli Vièten osalta merkittävää, sillä sen kautta hän tuli ensi kerran kosketuksiin analyysin käsitteen kanssa.¹⁰⁴

Pappoksen määritelmä on Theonin kommentti laajempi ja kuuluu näin:

”Analyysi ottaa etsityn ikään kuin annettuna ja etenee tästä peräkkäisten seuraamusten kautta johonkin, joka myönnetään synteesin tuloksiksi: sillä analyysissä me edellytämme sen mitä etsitään ja tutkimme mikä on tästä tuloksena, ja uudelleen, mikä on tätä edeltävä syy ja niin edelleen kunnes näin jälkiä taaksepäin palaten saavutamme jotakin, joka kuuluu ensimmäisiin perusoletuksiin ja tätä menetelmää kutsumme analyysiksi, sillä se on ratkaisu käänteisesti.

Mutta synteesissä, prosessin kääntäen, me pidämme jo saavutettuna sitä mikä oli analyysin lopputulema, ja järjestäen uudelleen syyn ja seurauksen luontaisen järjestyksen yhdistäen ne toinen toistaan seuraaviksi me lopulta saavumme etsittyyn rakennelmaan; ja tätä me kutsumme synteesiksi.”¹⁰⁵

Pappoksen mukaan analyysi eli menetelmä lauseen todistamiseksi tai ongelman ratkaisemiseksi on siis seuraava: oletetaan todeksi se mitä halutaan osoittaa ja edetään tästä päätelmien avulla siihen mitä edeltä käsin pidetään annettuna. Kun analyysin avulla on löydetty riittävä päättelyjen ketju, käännetään koko päättelyn suunta, jolloin tuloksena on synteettinen todistus. Jos siis on todistettava, että lause A on tosi, niin tehdään oletus: A on totta ja edetään tästä päätelemällä: Jos A on totta, niin tästä seuraa B; B:stä seuraa C; C:stä seuraa D; näin jatketaan, kunnes päädytään lopulta edeltä käsin oletuksena pidettyyn väitteeseen K. Nyt vaihdetaan päättelyn suunta: $K \Rightarrow \dots \Rightarrow A$ ja syntyi synteettinen todistus, joista kreikan matematiikka koostui.¹⁰⁶

Päättelyn suunta ei tietenkään käänny aina, mutta mm. kaikki Eukleideen ja Apolloniuksen tärkeimmät lauseet ovat ainakin osittain käännettävissä¹⁰⁷. Niiltä osin, kuin kääntäminen ei suoraan onnistu voidaan silti havaita ehdot, joiden vallitessa päättelyn suunta voidaan vaihtaa. Sen lisäksi, että Pappos toi julkiseksi kreikkalaisten käyttämät päättelyn välineet hän myös antoi esimerkkejä analyysin soveltamisesta. Ikäväksemme kolme kirjaa kolmestatoista ja näiden myötä monia hänen niissä esittelemiä analyysin sovelluksia on edelleen kadoksissa.

Analyysi algebrassa

Viète pyrki uudistamaan algebran kreikkalaisen analyysin keinoin. Hänen ”ohjelmajulistuksensa” oli hyvin yksinkertainen: kreikan viisailta opettajilta lähtöisin oleva algebra¹⁰⁸ tulee puhdistaa turmeltuneesta muodostaan. Viète kirjoittaa teoksensa *In Artem Analyticem Isagoge (Johdanto analyysin taitoon)* saatekirjeessä näin:

¹⁰³ Struik, A Source book..., s. 74

¹⁰⁴ Struik, Source, s. 74

¹⁰⁵ Heath, Euclid, Book I, Dover s. 138

¹⁰⁶ Heath, Euclid, ... I, s. 138

¹⁰⁷ Katz, s.185

¹⁰⁸ Viète piti Diofantosta virheellisesti algebran alkuperäisenä kehittäjänä.

”Katso, taito, jonka nyt esittelen on uusi, mutta tosiasiaa niin vanha, barbaarien¹⁰⁹ niin turmelema ja tarvelema, että katsoin välttämättömäksi, antaakseni sille täydellisesti uuden muodon, luoda ja julkaista uuden sanaston, päästäksemme eroon kaikista puoli-teknisistä sanoista, jottei se pitäytyisi saastassaan ja jatkaisi haisemistaan kuten ennenkin, mutta koska tähän saakka korvamme ovat tottumattomat niiden käyttöön on tuskin vältettävissä, että monet tulevat olemaan loukattuja ja säikähtäneitä jo alussa. Ja silti Algebran tai Almucabalan, jota he kiittelevät ja kutsuvat 'suureksi taidoksi', alla kaikki matemaatikot myöntävät piilottelevan verrattomasti kultaa, vaikka he ovatkin tottuneet löytämään sitä vain vähän.¹¹⁰”

Viètelle analyysin taito oli muinaisten kreikkalaisten unohtuneiden matemaattisten menetelmien uudelleen löytäminen. Tämä uusi analyysi johtaisi lopulta tosi-matematiikkaan syntyyn, joka toimisi pohjana universaalille tieteelle¹¹¹. Pontta hänen ja myöhemmin myös Descartesin ja Leibnizin etsinnöille antoi mm. Proclus, joka kirjoitti joskus kehitettävästä ”yhdestä tieteestä”, joka kokoaisi kaiken matemaattisen tiedon yhteen¹¹².

Pappoksen määritelmässä analyysijä oli kahdenlaisia. *Teoreettinen* eli *zeteettinen*, totuuteen pyrkivä analyysi¹¹³ tähtäsi lauseen todistuksen keksimiseen ja *problemaattinen* eli *poristinen*¹¹⁴ analyysi tähtäsi ongelman ratkaisuun. Viète otti nämä käyttöön muuttaen hieman niiden merkitystä ja lisäsi joukkoon vielä kolmannen, *retorisen* eli *eksegeettisen* analyysin. Aivan *Isagogen* alussa, kappaleen I ensimmäisissä virkkeissä, Viète esittelee algebran uutta muotoa, analyysiä:

”Matematiikassa on tietty tie totuuden etsimiseen, tie, jonka Platon kerrotaan ensimmäisenä löytäneen ja jota Theo kutsui 'analyysiksi' ja määritteli 'etsityn ottamisena annettuna ja tästä sopivin keinoin edeten kiistattomaan totuuteen'; toisaalta, 'synteesi' on ”otteen annetun asian ja tästä sopivin keinoin edeten loppupäätelmään ja ymmärrykseen etsitystä asiasta. Ja vaikka muinaiset asettivat kaksijakoisen analyysin, zeteekkisen ja poristisen, joihin Theon määritelmä erityisesti viittaa, on tästä huolimatta soveliaista, että asetetaan vielä kolmaskin, jota voidaan kutsua retoriseksi tai eksegeettiseksi, niin, että on **zeteettinen** taito, jolla perustetaan yhtälö tai verranto etsittyjen ja annettujen suureiden välille, **poristinen** taito, jolla tutkitaan asetetun yhtälön tai verrannon totuudellisuus ja **eksegeettinen** taito, jolla perustetusta yhtälöstä tai verrannosta saadaan aikaan etsitty arvo. Koko kolmijakoinen analyysin taito voidaan määritellä tieteeksi, jolla etsitään totuutta matematiikassa.”¹¹⁵

Vaikka Viète nojaa vahvasti ”muinaisiin”, niin hän kuitenkin antoi kreikkalaisten analyysille uuden sisällön. Viètan ajattelussa problemaattinen eli zeteettinen analyysi merkitsee menetelmää, jolla ongelma muokataan yhtälöksi eli joka yhdistää annetut tiedot yhdessä tuntemattomien kanssa; teoreettinen eli poristinen analyysi menetelmää, jolla lauseen totuutta tarkastellaan kirjainmanipulaatioiden kautta ja eksegeesi zeteettisellä analyysillä laaditun yhtälön ratkaisemista.

Viète antoi kolmijakoisella analyysillään algebralle aivan uuden teoreettisen perusteen. Itse asiassa Viète ehdotti, että sanasta algebra luovuttaisiin kokonaan ja ryhdyttäisiin käyttämään sanaa analyysi. Tältä osin Vièten ehdotus ei saanut vastakaikua. Termi analyysi jäi kuitenkin elämään matematiikan sanastoon, joskin eri merkityksessä kuin mitä Viète alun perin esitti.

¹⁰⁹ Tällä Viète viitanee arabeihin. Islamilaista Pohjois-Afrikkaa ja Maurien hallitsemaa Espanjaa kutsuttiin ”Barbariaksi” tai ”Barbaarimaiksi” 1800-luvulle saakka. (Oxford American Dictionares; Encyclopedia Brit.)

¹¹⁰ Viète kirjansa *In Artem Analyticem Isagoge* saatekirjeessä (Klein, s. 318-319)

¹¹¹ Struik, A Source Book..., s. 74

¹¹² Klein, s. 159

¹¹³ ζητητικ (Klein, s. 320)

¹¹⁴ ποριστικ (Klein, s. 320)

¹¹⁵ Klein, s. 320-321; Viète, s. 11-12; Struik, s. 75

Analyysin käyttäminen Vièten esittämällä tavalla vaati aivan uuden lähestymistavan yhtälöihin, tästä Viète kirjoittaa näin:

"Numeroilla laskeminen (*logistice numerosa*) tapahtuu numeroita käyttäen; lajeilla laskeminen (*logistice speciosa*) tapahtuu käyttäen asioiden lajeja tai muotoja, kuten esimerkiksi aakkosten kirjaimia."¹¹⁶

Viète siis ymmärsi hyvin, että siinä missä geometrikon piirtämä kolmio edustaa kaikkia kolmioita tulisi algebrassa olla mahdollista toimia samoin. Hänen tarjoamansa ratkaisu oli operoiminen, ei esimerkkiluvuilla ja sanallisilla säännöillä, kuten tähän saakka oli ollut tapa, vaan lajeilla ja muodoilla, joita edustivat kirjaimet. Tämän myötä matematiikassa siirryttiin ensimmäisen kerran käyttämään symboliikkaa. Samalla matematiikassa havaittiin ensi kerran tuntemattoman, etsittävän suureen ja tunnetuksia ajatellun parametrin välinen ero. Viète erotti nämä toisistaan siten, että vokaalit kuvasivat tuntemattomia ja konsonantit tunnettuja suureita eli parametreja:

"...annetut suuret erotettakoon tuntemattomista pysyvällä, ikuisella ja hyvin selvällä symbolilla, kuten esimerkiksi merkitsemällä tuntemattomia suureita kirjainta A ja jotain muuta vokaalia E, I, O, U tai Y käyttäen ja annettuja suureita kirjaimia B, C ja D tai muita konsonantteja käyttäen."¹¹⁷

Vièten uudistuksen merkitystä ei voi korostaa liikaa. Hänen syvälliset ajatuksensa loivat perustan kaikelle nykyaikaiselle matematiikalle ja luonnontieteille. Nyt oli mahdollista ryhtyä käsittelemään kaavoja sanallisten sääntöjen sijaan.

Lukukäsitys

Viète ei kuitenkaan vapautunut kaikista "menneisyyden kahleista". Hänen lukukäsityksensä oli edelleen rajoittunut. Hänen työstään ei löydy samaa vapautta negatiivisten lukujen ja kompleksilukujen käsittelyssä kuin vaikkapa Bombellilla. Hänen muu symboliikkansa oli vielä kömpelöä muuttujan käytöstä huolimatta. Itse asiassa ainoat Vièten käyttämät symbolit kirjainten lisäksi olivat saksalaistyyppiset yhteen- ja vähennyslaskun merkit "+" ja "-". Vièten esimerkin mukaisesti kyseiset symbolit tulivat hyväksytyksi Ranskassa ja tämä käytännössä sinetöi niiden läpimurron lopulta ainoiksi käytetyiksi¹¹⁸. Joka tapauksessa Viète ymmärsi luoneensa jotain ennen näkemätöntä ja näki analyysinsä mahdollisuudet rajattomina. Hän ilmeisesti todella ajatteli keksineensä yleisen, kaikki ongelmat ratkaisevat universaalin symbolisen analyysin, jota uusi algebra ei tietenkään ollut. Viète kuitenkin perusti kirjainalgebran sen syvimmissä mielessä.

Viète lopettaa kirjansa *Johdanto analyysin taitoon* sanoilla, jotka ilmentävät hänen näkemystään analyysinsä mahdollisuuksista:

"Lopulta, analyysin taito ... pidättää itselleen oikeuden mahtavimpaan ongelmaan, joka on ÄLÄ JÄTÄ YHTÄKÄÄN ONGELMAA RATKAISEMATTA"¹¹⁹.

Isagoge on melko lyhyt kirja, pikemminkin kirjanen. Viète kirjoitti sapattivapaansa useita muitakin kirjoja, joista osa julkaistiin vasta hänen kuolemansa jälkeen. Näissä hän esittelee tarkemmin luomansa uuden algebran, josta hän käytti nimitystä *ars analytical*, analyysin taito, käyttöä. Näistä erään zeteettistä analyysiä esittelevän kirjan¹²⁰ ensimmäinen esimerkki havainnollistaa mainiolla tavalla sekä Vièten taitoja että hänen menetelmänsä vahvuutta. Esimerkin tehtävä on:

¹¹⁶ Klein, s. 328; Viète, s. 17

¹¹⁷ Klein, s. 340; Viète, s. 24

¹¹⁸ Cajori, s. 234

¹¹⁹ Kapiteelit ovat Vièten oma korostus (NULLUM NON PROBLEMA SOLVERE), Kline 353 ja 185; Viète s. 32; Struik s. 81

¹²⁰ *Zeticorum Libri Quinque* (1591)

"Olkoon annettuna kahden juuren erotus ja summa. Määritettävä juuret."

Ratkaisunsa aluksi Viète esittelee muuttujat, jotka ovat: A on pienempi juuri, E suurempi juuri, B juurten erotus ja D juurten summa. Näiden avulla hän ryhtyy laskemaan seuraavalla tavalla:

Suurempi juuri on $A + B$, joten juurten summa on $2A + B$. Syntyy yhtälö:

$2A + B = D$, joten $2A = D - B$, joten $A = \frac{1}{2}D - \frac{1}{2}B$. Vastaavasti pienempi juuri on $E - B$, joten juurten summa on $2E - B$. Syntyy yhtälö: $2E - B = D$, joten $2E = D + B$, joten $E = \frac{1}{2}D + \frac{1}{2}B$.¹²¹

Näin Viète ratkaisi lähes kaikkien algebrikkojen jossain muodossa esimerkkinään käyttäneen yhtälötyypin "lukujen summa ja erotus on tunnettu" ensimmäistä kertaa aidosti yleisessä muodossa antaen vasta yleisen ratkaisun jälkeen numeerisen esimerkin: Olkoon $B = 40$ ja $D = 100$. Tällöin $A = 30$ ja $E = 70$.

Vasta Vièten kuoleman jälkeen ilmestyneessä *De Aequationum Recognitione et Emendatione Tractatus Duo* (1615) Viète esittelee kuinka eri muodoissa olevat toisen ja kolmannen asteen yhtälöt voidaan kirjoittaa kanonisiin ratkaistaviin muotoihin. Erityisesti kaikille 13 tähän saakka erillisille kolmannen asteen yhtälön eri muodoille hän esittelee kuinka ne voidaan muokata ratkeavaan, ei toisen asteen termiä sisältävään, muotoon. Esimerkiksi yhtälön $A^3 + 3BA^2 + DA = Z$ Viète muokkaa sijoituksella $E = A + B$ muotoon $A^3 + E(D - 3B^2) = Z + DB - 2B^3$, josta hän toteaa:

"...uusi yhtälö on selvästi vapaa neliöllisestä vaikutuksesta, mikä rasitti alkuperäistä. Kun E tulee tunnetuksi ei myöskään A ole enää tuntematon..."¹²²

Viète esittelee useita kymmeniä vastaavia sopivalla sijoituksella aikaansaatuja muunnoksia. Eräs¹²³ näistä on yhtälölle $A^3 + 3BA = 2Z$ ehdon $E^2 + AE = B$ täyttävällä muuttujalla E eli sijoituksella $A = (B - E^2)/E$ johtama ratkaisu

$$\sqrt[3]{\sqrt{B^3 + Z^2} + Z} - \sqrt[3]{\sqrt{B^3 + Z^2} - Z}.$$

Pierre Hérigone

Vièten ajatukset saivat välittömästi kannatusta. Esimerkiksi hänen maanmiehensä, Descartesin aikalainen ranskalainen Pierre Hérigone (1580–1643) myötäilee Vièten näkemyksiä algebran olemuksesta teoksessaan *Cursus mathematicus* (1634):

"Analyttinen oppi tai algebra, Italiassa 'cosaksi' kutsuttu, on tuntemattoman suureen löytämisen taito, ottamalla se ikään kuin tunnettuna ja perustamalla yhtälö tämän ja annettujen suureiden välille."¹²⁴

Hérigone hyväksyy myös Vièten ajatuksen, että analyysin taidon eli algebran kirjaimia voidaan käyttää esittämään sekä numeroita että yleisemmin minkä tahansa abstraktin suureen arvoa:

"Voidaan erottaa toisistaan vulgaari eli numeerinen ja Vièten eli lajien algebra. Vulgaari eli numeerinen algebra on se mitä harjoitetaan numeroiden avulla. Lajien algebra on se joka toteuttaa logiikkaansa 'lajien' tai asioiden muotojen, joita kuvaavat aakkosten kirjaimet, välityksellä. Vulgaari algebra palvelee ainoastaan ratkaisun löytämistä aritmeetti-

¹²¹ Viète, s. 83-84, hieman lyhennettynä

¹²² Viète, s. 239

¹²³ Viète, s. 287-288

¹²⁴ Esteve, *Symbolic...*, s. 288

seen ongelmaan ilman todistusta¹²⁵. Mutta lajien algebra ei ole rajoittunut minkään tyyppiseen ongelmaan sinänsä, vaan se on käytännöllinen kaikenlaisten teoreemojen, kuten myös ratkaisujen ja todistustenkin etsimiseen.”¹²⁶

Hérigone jopa menee niin pitkälle, että väittää, että jos analyysiä eli algebraa harjoitetaan ilman ”lajeja” se ei ole tiedettä¹²⁷, vaan yksinkertainen harjoittelemalla saavutettu taito.¹²⁸

¹²⁵ *absque demonstrationibus*

¹²⁶ Esteve, *Symbolic...*, s. 288

¹²⁷ Hérigone käyttää ranskan kielen sanaa ”art”, mutta suomen kielen sanaa ”taide” on vaikea sovittaa tähän yhteyteen.

¹²⁸ Esteve, *Symbolic...*, s. 288

François Viète (1540 - 1603)

François Viète, latinalaiselta nimeltä Franciscus Vieta, syntyi Ranskan läntisessä keskiosassa Fontenay-le-Comten kaupungissa. Nuorukaisena François kävi luostarikoulua Fontenayssa. Françoisin isä oli lakimies ja myös François suuntasi lakia lukemaan 18-vuotiaana, saavuttaen vuonna 1560 kandidaatin tutkinnon Poitiersin yliopistosta. Tutkinnon saatuaan hän palasi Fontenayhin ja hän menestyikin toimesaan hyvin.

Vuonna 1564 Viète pääsi vaikutusvaltaisen Soubisen perheen asianajajaksi sekä perheen tähtitieteestä ja astrologiasta kiinnostuneen 11-vuotiaan tyttären Catherine de Parthenayn opettajaksi. Työ perheen asioiden hoitaja ei ollut kovin vaativaa ja Viètelle jäi paljon vapaa-aikaa, jonka hän käytti pääasiassa matematiikan parissa. Hänellä ei tiedetty olleen muodollisia matematiikan opintoja, vaan Viète oli itseoppinut harrastaja, joskin hämmästyttävän lahjakas. Leppoisa elämää kesti aina vuoteen 1571 saakka. Tähän mennessä hän laati kaikkiaan neljä kirjaa. Näistä kaksi, taso- ja pallotrigonometriaa käsittelevät kirjat, julkaistiin otsikon *Canon mathematicus, seu ad triangula um appendicibus* alla vuonna 1579, mutta loput kaksi astronomian kirjaa ovat vieläkin julkaisematta.

Vuonna 1568 viisitoistavuotias Catherine solmi avioliiton, joka päättyi pian Catherinen äidin ja aviopuolison välille kehkeytyneeseen riitaan, jonka seurauksena koko suku, Viète mukaan lukien, muutti La Rochelleen. La Rochellessa Viète tutustui joihinkin Ranskan kuningasperheen sukulaisiin ja pian, vuonna 1571 Viète muuttikin jo Pariisiin, jossa kuningas Kaarle IX nimitti hänet parlamentin lakiasioiden neuvonantajaksi.

Vuonna 1574 kuningas Kaarle IX kuoli ja hänen veljensä Henrik III nousi kuninkaanistuimelle. Viète oli osoittautunut kyvykkääksi toimissaan ja mm. hugenottijohtaja Henrik Navarralainen, Ranskan tuleva kuningas suositteli häntä Henrik III:lle. Kuningas valitsikin Vièten neuvonantajakeen sekä hoitamaan luottamuksellisia ja salaisia tehtäviä. Näitä hän suoritti vuoteen 1584 saakka, jolloin kuningas joutui erottamaan hänet erään Viètelle loukkaantuneen suvun painostuksesta. Nyt Viètelle avautui mahdollisuus omistautua täysin matemaattisille harrastuksilleen. Aika vuodesta 1584 aina vuoteen 1589 saakka, jolloin Henrik III kutsui hänet takaisin palvelukseensa, oli Vièten tuotteliainta aikaa ja pääasiassa tällöin hän laati algebran alan kirjoituksensa.

Lutherin ja Calvinin aloittamana Keski- ja Pohjois-Euroopassa oli 1500-luvulla käynnissä uskonpuhdistus. Reformaatio sai Ranskassa kalvinistisen muodon hugenoteiksi¹²⁹ kutsuttujen protestanttien kautta. Ranskan kuningas Henrik III oli katolinen, joka kuitenkin, säilyttääkseen valtakunnan yhtenäisenä, tarjosi joitain vapauksia protestanteille. Myönnytykset suututtivat katoliset, jotka perustivat Katolisen liigan vastustamaan protestantteja ja lopulta kuningastakin. Katolisen liigan suorittamien veristen vainojen ja joukkomurhien johdosta protestantit nousivat vastarintaan puolustamaan itseään. Vainojen epämiellyttävässä huipentumassa pöytäkirjojen verilöylyssä murhattiin varovaistenkin arvioiden mukaan tuhansia, mahdollisesti jopa kymmeniä tuhansia protestantteja, mukana lapsia ja naisia. Tuloksena oli 1590-luvulle kestänyt sotatila, johon otti osaa Katolisen liigan puolella Espanja. Säilyttääkseen valtansa Henrik III:lla ei ollut muuta vaihtoehtoa kuin liittoutua hugenottien kanssa. Vuonna 1589, vain muutamia kuukausia sen jälkeen kun Viète oli palannut hänen palvelukseensa, katolinen fanaatikko puukotti kuninkaan ja valtaistuimelle nousi ensimmäinen eikatolinen kuningas Henrik IV (ent. Navarralainen). Viète jatkoi kuitenkin mielihyvin uudenkin kuninkaan palveluksessa, sillä hän vähintäänkin myötäili protestantismia.

Kun Henrik III kutsui Viètan takaisin palvelukseensa 1589 tehtävät liittyivät tällä kertaa aiempaa enemmän hänen matemaattisiin kykyihinsä ja hän sai ratkottavakseen vihollisten salasanomia. Ratkaiseva tapahtuma salakoodin murtamisen kannalta oli, kun ranskalaiset nappasivat espanjalaisen yhdysupseerilta 28.10.1589 päivätyn Espanjan kuninkaan Filip II:n lähettämän kirjeen, joka oli koodattu aiemmasta poikkeavalla paremmalla menetelmällä. Henrik IV tiesi Vièten matemaattiset kyvyt ja antoi kirjeen hänen ratkaistavakseen.

¹²⁹ Nimitys hugenotti juontuu ilmeisesti liikkeen varhaisen johtajan Besançon Hugues (k. 1532) nimestä. erkki.luoma-aho@jkl.fi

Viète työskenteli intensiivisesti aina seuraavan vuoden maaliskuun puoliväliin saakka kirjeen parissa, kunnes saattoi lopulta 15.3. lähettää sen Henrik IV:lle avattuna. Vuosien 1589 ja 1594 välillä Viète mursi useita vihollisten salasanomia auttaen huomattavalla tavalla kuningasta Henrik IV taistelussa sekä Katolista liigaa että Espanjaa vastaan. Akuuttien kriisien aikana kuninkaan kuriirit saattoivat yöpyä useita päiviä huoneeseensa sulkeutuneen Vièten oven takana odottaen salasanoman purkamista. Viète osasi purkaa Filip II:n murtamattomana pitämällä koodilla salattuja sanomia niin taitavasti, että kuningas valitti Paaville Henrik IV:n käyttävän mustaa magiaa hänen maataan kohtaan, sillä vaikutti siltä että Henrik IV tiesi aina ennalta kaikki hänen suunnitelmansa.

Ilmeisesti aiempi menestys algebrallisissa tutkimuksissa rohkaisi Viètea julistamaan, että hän on luonut ”erehtymättömällä menetelmän” salasanomien koodien murtamiseksi. Menetelmä muistutti hänen luomaansa algebrallista järjestelmää, sillä siinä vokaalit olivat avain salakoodin murtamiseen. Ne olivat ikään kuin tuntemattomia, joiden ratkettua koko espanjalaisten salakoodi murtui. Ehkä jo aiempi kokemus salakoodien ratkaisijana johti Vièten valitsemaan myös algebrassaan juuri vokaalit kuvaamaan tuntemattomia ja konsonantit tunnettuja suureita.¹³⁰

Viète palveli kuningasta vuoteen 1602 saakka, jolloin hänen terveytensä heikkeni ja Henrik IV vapautti hänet palveluksista. Viimeiseksi elinvuodeksi Viète palasi kotikyläänsä. Vielä kuolinvuoteellaan Viète teki viimeisen palveluksen syvästi kunnioittamalle kuninkaalleen laatimalla muistion tiedoistaan salakoodien murtamiseksi.¹³¹

¹³⁰ Pesic, s. 685

¹³¹ Lähteet: DSB, Viète, s. 1-10; Waerden, s. 63; Pesic; Derbyshire 85-91

1.7.13 Desimaaliluvun käsite

Simon Stevin, flaamilainen insinööri ja matemaatikko teki 1500-luvulla kaksi merkittävää lukukäsitteeseen liittyvää matemaattista uudistusta: tarkkaan harkitun desimaalisten murtolukujen esityksen ja lähes modernin muotoilun numerolle.

Luvun käsite

Stevin oli omaksunut 1500-luvun myytin muinaisten ihmisten kehittämän tiedon ja tieteen rappiotilasta ja uudesta syntymästä¹³². Stevin esitti myytin sellaisessa muodossa, että muinaisuudessa oli ollut matematiikan kehityksen kultainen aika, viisauden vuosisata¹³³, jolla hän ei viitannut Kreikan matematiikan kehitykseen vaan johonkin tätäkin aikaisempaan aikaan. Tällöin

”ihmisillä oli ihmeellinen tietämys tieteistä ... vaikkakaan emme voi tietää keitä he olivat tai missä ja milloin he elivät.”¹³⁴

Viетен tapaan myös Stevin otti tehtäväkseen palauttaa tämän viisauden ajan tietämyksen.¹³⁵ Hänen ei siten tarvinnut kunnioittaa kreikkalaisten matemaatikkojen kaikkia näkemyksiä alkuperäisinä. Stevin piti intialais-arabialaista paikkajärjestelmää viisauden ajan tuotteena ja koska se oli hänen näkemyksenä mukaan ylivoimainen kreikkalaisten käyttämään aakkosnumerojärjestelmään ei hänellä ollut vaikeuksia hylätä myös kreikkalaisten lukukäsitystä. Kreikkalaisessa matematiikassa oli ollut tapana erottaa luku ja geometrinen suure. Edellinen oli jakamattomien yksiköiden kokoelma, luonnollisten lukujen joukko, ja siten luonteeltaan epäjatkuva. Jälkimmäinen oli luonteeltaan jatkuva, mutta sitä rasitti oppi yhteismitattomista suureista. Stevin hyökkäsi vahvasti tätä matematiikan kehitystä tähän saakka jarrutanutta lukukäsitystä vastaan. Ensiksi hän kumosi käsityksen yksikön jakamattomuudesta ja ajatuksen, että yksi ei ole varsinainen luku. Stevin ilmaisee yksiselitteisesti:

”Yksikkö on luku”¹³⁶.

Tätä hän perustelee vertauksella leipään: aivan kuin jokainen pala leivästä on osa leipää, samaa olemusta sen kanssa, niin yksikkö on samaa olemusta paljouden kanssa. Myös lukua yksi pienemmät osat ovat Stevinin mukaan lukuja siinä missä yhtä suuremmatkin luvut.¹³⁷ Toiseksi Stevin määrittelee:

”Luku on se, joka kertoo jokaisen asian määrän”¹³⁸.

Luku voi siis ilmaista minkä tahansa asian, geometrinen tai ei-geometrinen, määrän. Stevinille kaikki numerot olivat luonteeltaan jatkuvia ja samanlaisia.¹³⁹

Uuden lukukäsityksensä kanssa Stevin saattoi rikkoa lisää raja-aitoja. Hän ilmaisee selvästi, että

”Ei ole olemassa absurdeja, irrationaalisia tai selittämättömiä lukuja”¹⁴⁰.

Stevin siis hylkäsi ajatuksen irrationaalilukujen erilaisuudesta positiivisiin kokonaislukuihin verrattuna:

¹³² Malet, s. 80

¹³³ siècle saga (Klein, s. 186)

¹³⁴ Klein s. 187; *Geographie* II (Girard 1634) s. 106

¹³⁵ Klein, s. 189

¹³⁶ ”que l’unité est nombre”, Kline, s. 183

¹³⁷ Kline, s. 195

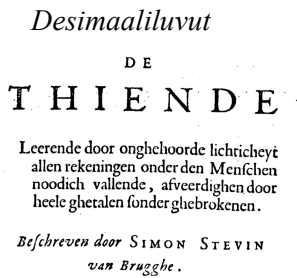
¹³⁸ ”Nombre est cela par lequel s’explique la quantite de chacune chose”, Kline s. 191

¹³⁹ Kline, s. 194

¹⁴⁰ ”qu’il n’y a aucuns nombres absurdes, irrationnels, irreguliers, inexplicables, ou sourd” Kline, s. 196

”Yhteismitattomuudesta ei seuraa yhteismitattomien termien järjettömyyttä¹⁴¹”.

Stevin siis esitti, että luku $\sqrt{8}$ on luonnoltaan sama kuin 8, molemmat ovat *lukui-*na samanlaisia. Perusteluina Stevin käytti seuraavaa ajatusta: Osa on aina samaa ainetta kuin kokonainen. Luvun 8 juuri on osa sen neliötä eli lukua 8 ja siten luonnoltaan samaa. Moni matemaatikko vuosisatojen kuluessa oli käytännössä ajatellut irrationaaliluvuista samalla tavalla kuin Stevin, operoimalla niillä aivan samojen sääntöjen mukaan kuin kokonaisluvuillakin, mutta Stevin oli ensimmäinen, joka rohkeni ilmaista ajatukset näin selvällä ja kreikkalaisesta perinteestä poikkeavalla tavalla.



Määriteltään edellä mainitulla tavalla luvut, pääasiassa teoksessa *l'Arithmétique* (1585), Stevin esitti toisessa, samaan aikaan ilmestyneessä, kirjassaan *De Thiende* ("Kymmenesosa") kuinka desimaalilukuja tulisi merkitä ja kuinka näillä tulisi laskea. Ennen tätä desimaalisia murtolukuja ei oltu juurikaan käytetty.

1500-luvulla intialais-arabilaiset numeromerkit ja paikkajärjestelmä oli laajasti hyväksytty ja käytössä. Jopa numeromerkkien 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ja 9 ulkomuoto oli vakiintunut kutakuinkin nykyisin käytettyyn muotoon. Algorismi eli numeromerkeillä laskeminen tarkoitti kuitenkin vain kokonaisluvuilla laskemista. Murtoluvut olivat toki tunnettuja. Jo Fibonacci oli esitellyt 1100-luvulla niin tavalliset kuin myös egyptiläistyyppiset yksikkömurtoluvut eli murtoluvut, joiden osoittaja on yksi, ja babylonialaisperäiset kuusikymmenjärjestelmän murtoluvut. Fibonacci jopa käytti edelleen käytössä olevaa murtoviivaa murtolukujen esittämiseen. Murtolukuja kuitenkin pyrittiin välttämään, jos mahdollista, ja aivan samasta syystä kuin tänäänkin: laskutoimitukset niillä olivat vaikeita. Käytännössä murtolukujen välttely tarkoitti sitä, että mittajärjestelmät pyrittiin muovaamaan sellaisiksi, että aivan pienimmätkin yksiköt olivat kokonaislukuja.

Ennen Steviniä mm. jo 1300-luvulla oli tehty joitain hajanaisia huomautuksia mahdollisuudesta käyttää desimaalisia murtolukuja. 1400-luvun alussa arabimatematiikko Al-Kashi käytti niitä yhdessä kuusikymmenjärjestelmän lukujen kanssa. 1500-luvun alkupuolella saksalainen Rudolff ja Stevinin aikainen ranskalainen Viète olivat tehneet tahoillaan ehdotukset kymmenjärjestelmän murtolukujen laajemmasta käytöstä, mutta kumpikaan ei ollut laatinut aiheesta selvää, kansankielistä esitystä, joten muut eivät olleet voineet seurata heidän ehdotustaan.

De Thienden esipuheessa Stevin osoittaa kirjansa mm. astronomeille, maanmittaajille, tapetinmittaajille ja kaikille merkanteille. Stevin siis lähestyy kansankielisellä kirjassaan kaikkia niitä, jotka olivat käytännössä kosketuksissa laskemisen ja numeroiden kanssa. Hänen päämääränään oli muuttaa laskemisen käytäntö helpommaksi niin kotimaassaan kuin laajemminkin. Kirjassaan Stevin lupaa opettaa helpon tavan laskea ilman murtolukuja, niin että neljä aritmeettista laskutoimitusta voidaan suorittaa murtoluvuille aivan samoin kuin kokonaisluvuille¹⁴². Lupaus merkitsi tähän aikaan paljon.

Lupauksensa täyttääkseen Stevin esitteli uuden tavan merkitä kymmenjärjestelmän murtoluvut: kokonaisosia hän kutsui nimellä "alku" ja kirjoitti kokonaisosien perään ympyrän sisään luvun 0, esimerkiksi kokonaislukua 364 merkittiin Stevinin systeemissä "364①". Kymmenesosaa Stevin kutsui nimellä "ensimmäinen" ja kirjoitti sellaisen perään merkin ①. Sadasosaa hän kutsui nimellä "toinen" ja kirjoitti sadasosien perään merkin ② jne. Esimerkiksi luvun 27,847 Stevin kirjoitti muodossa "27①8①4②7③" ja luvun 875,782 muodossa "875①7①8②2③". Stevin oli opiskellut tarkasti Bombellin *l'Algebran* ja hänen merkintätapansa on täsmälleen

¹⁴¹ "l'incommensurancie ne cause pas absurdité des termes incommensurables" Kline s. 196

¹⁴² Struik *The Principal...*, s. 389, 397

sama kuin Bombellin käyttämä, vaikkakin hieman eri merkityksessä. Siinä missä Bombelli ilmaisi ympyrän sisällä olevilla luvuilla luvun x positiivisia potensseja niin Stevin ilmaisi merkinnällä luvun kymmenen negatiivisia potensseja. Luku $27\textcircled{0}8\textcircled{1}4\textcircled{2}7\textcircled{3}$ tarkoitti summaa $27 \cdot 10^0 + 8 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2} + 7 \cdot 10^{-3}$. Stevin ei ollut kovin tarkka merkinnästään ja hänen myöhemmissä kirjoissaan hän saattoi merkitä

ympyrät lukujen päälle: $\begin{smallmatrix} \textcircled{0} & \textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{3} \\ 5 & 7 & 8 & 9 \end{smallmatrix}$, luvulle 5,789 tai yksinkertaisesti lyhentää: $732\textcircled{2}$ luvulle 7,32. Vaikka Stevinin merkintä on desimaalipilkkuun verrattuna ehdottomasti kömpelö, niin sitä käyttäen useita nollia sisältävä desimaaliluvun merkintä on kompakti, vertaa esimerkiksi lukua 0,05004 merkintään $5\textcircled{2}4\textcircled{5}$.

Stevinin uuden merkinnän tärkein etu oli siinä, että sitä käyttäen siihen saakka vaikeina pidetyt murtolukujen laskutoimitukset muuttuivat kohtalaisen helpoiksi. Hän laski yhteenlaskun $27,847 + 875,782$ laskemalla ensin samat kymmenen potenssin kertoimet yhteen ja sieventämällä sitten luvun vaihe vaiheelta oikealta vasemmalle:

$$27\textcircled{0}8\textcircled{1}4\textcircled{2}7\textcircled{3} + 875\textcircled{0}7\textcircled{1}8\textcircled{2}2\textcircled{3} \\ = 902\textcircled{0}15\textcircled{1}12\textcircled{2}9\textcircled{3} = 902\textcircled{0}16\textcircled{1}2\textcircled{2}9\textcircled{3} = 903\textcircled{0}6\textcircled{1}2\textcircled{2}9\textcircled{3}.$$

Stevin oli kehittänyt kaikille neljälle peruslaskutoimitukselle algoritmit, esimerkiksi lukujen 27,847, 37,675 ja 875,782 yhteenlasku suoritetaan allekkain kirjoittamalla yläriville kymmenesosien, sadasosien ja tuhannesosien paikat ja tähän jälkeen lasku etenee kuten nykyisinkin kouluissa opetettava allekkainlasku (vrt. kuva 17):

			①	②	③
	2	7	8	4	7
	3	7	6	7	5
8	7	5	7	8	2
	9	4	1	3	0
				0	4

Kolmen luvun summa on siten $941\textcircled{0}3\textcircled{1}0\textcircled{2}4\textcircled{3} = 941,304$.

Lukujen 32,57 ja 89,46 kertolaskun Stevin suoritti seuraavalla ryhmityksellä:

					①	②	
				3	2	5	7
				8	9	4	6
			1	9	5	4	2
		1	3	0	2	8	
	2	9	3	1	3		
2	6	0	5	6			
	2	9	1	3	7	1	2
			①	②	③	④	

Tulos on siis $2913\textcircled{0}7\textcircled{1}1\textcircled{2}2\textcircled{3}2\textcircled{4} = 2913,7122$. Kertolaskussa Stevin käytti samankantaisten potenssien kertolaskusääntöä määrittämällä alarivin oikeanpuoleisimpien merkkien eli eksponenttien yhteenlaskulla $\textcircled{2} + \textcircled{2} = \textcircled{4}$.

THIENDE. 13
HET ANDER DEEL
 DER THIENDE VANDE
 WERCKINCHE.

**I. VOORSTEL VANDE
 VERGADERINGHE.**

Wesende ghegeven Thiendetalen te vergaderen: hare Somme te vinden.

TGHEGHEVEN. Het sijn drie oirdens van Thiendetalen, welcke eerste 27 ③ 8 ① 4 ② 7 ③, de tweede, 37 ③ 6 ① 7 ② 5 ③, de derde, 875 ③ 7 ① 8 ② 2 ③, **T**BEGHEERDE. **W**y moeten haer Somme vinden. **W**ERCKING. Men sal de ghegeven ghetalen in oirden stellen als hier neven, die vergaderende naer de gemeene maniere der vergaderinghe van heelegetalen aldus:

③ ① ② ③
2 7 8 4 7
3 7 6 7 5
8 7 5 7 8 2
9 4 1 3 0 4

Comt in Somme (door het 1. probleme onser Franscher Arith.) 9 4 1 3 0 4 dat sijn (twelck de teekenen boven de ghetalen staende, anwijfen) 9 4 1 ③ 3 ① ③ ② 4 ③. Ick segghe de selve te wesen de ware begheerde Somme. **B**E W Y S. De ghegeven 27 ③ 8 ① 4 ② 7 ③, doen (door de 3^e. hepaling) $27 \frac{8}{10}, \frac{4}{100}, \frac{7}{1000}$, maeckē tsamen $27 \frac{847}{1000}$. Ende door de selve reden sullen de 37 ③ 6 ① 7 ② 5 ③ weerdich sijn $37 \frac{675}{1000}$; Ende de 875 ③ 7 ① 8 ② 2 ③

16 **S. STEVINS**
**III. VOORSTEL VANDE
 MENICHVULDIGHINGHE.**

Wesende ghegeven Thiendetal te Menichvuldighen, ende Thiendetal Menichvulder: haer Vytbreng te vinden.

TGHEGHEVEN. Het sy Thiendetal te Menichvuldighen 32 ③ 5 ① 7 ②, ende het Thiendetal Menichvulder 89 ③ 4 ① 6 ②. **T**BEGHEERDE. **W**y moeten haer Vytbreng vinden. **W**ERCKING. Men sal de gegevē getalē in oirden stellen als hier nevē, Menichvuldigende naer de gemeene maniere van Menichvuldighen met heele ghetalen aldus:

③ ① ②
3 2 5 7
8 9 4 6
1 9 5 4 2
1 3 0 2 8
2 9 3 1 3
2 6 0 5 6
2 9 1 3 7 1 2 2
③ ① ② ③ ④

Gheeft Vytbreng (door het 3^e. Prob. onser Fran. Arith.) 29137122: Nu om te weten wat dit sijn, men sal vergaderen beyde de laetste gegeven teekenen, welcke een is ②, ende het ander oock ②, maecken tsamen ④, waer uyt men besluyten sal, dat de laetste cijffer des Vytbrengs is ④, welke bekent wesende soo sijn oock (om haer volghende oirden) openbaer alle dander, Inder voughen dat 2913 ③ 7 ① 1 ② 2 ③ 2 ④, sijn het begheerde Vytbreng. **B**E W Y S. Het ghegeven Thiendetal te menichvuldighen 32 ③ 5 ① 7 ②, doet (als blijct

Kuva 13. Simon Stevinin kirjan *De Thiende* sivut 13 ja 16.

Käytön leviäminen

De Thienden ilmestyminen oli merkkipaalu desimaalilukujen leviämisessä. Ranskankielinen versio julkaistiin saman tien 1585. Lisäksi 1608 ilmestyi kirjan ensimmäinen englanninkielinen versio. Desimaalilukujen käyttöönottoa ei voi kuitenkaan laittaa pelkästään Stevinin ansioksi. Itse asiassa Stevinin merkintätapa ei noussut koskaan ”valtavirtaan” ja desimaalilukuja käytettiin enemmän tai vähemmän satunnaisesti kunnes John Napier, Stevinin innoittamana, ilmaisi 1600-luvulla ilmestyneissä logaritmitaulukoissa tukensa desimaalilukujen käytölle. Itse asiassa Napierin ja logaritmitaulukoiden vaikutusta desimaalilukujen yleistymiseen voi pitää vähintään yhtä tärkeänä, ellei tärkeämpänäkin, kuin Steviniä ja *De Thiendeä*. Aivan ensimmäisessä logaritmien julkaisussa *Descriptio* desimaalilukuja ei käytetty, vaan kaikki logaritmit laskettiin luvusta 10^7 , mutta jo vuonna 1619 *Constructio*ssa Napier kirjoitti nykyaikaan saakka kantaneen tärkeän periaatteen selvällä tavalla:

”Kaikki pisteen jälkeen kirjoitettu on murtolukua.”

Henry Briggsin laatimassa ja vuonna 1624 ilmestyneessä kymmenkantaisten logaritmien taulukossa käytettiin jo nykyisenkaltaisella tavalla desimaalilukuja pilkun toimiessa desimaalierottimena. Desimaaliluvut tulivat yleisesti hyväksytyiksi 1600-luvun aikana.

Luvussa 4 kerrotaan tarkemmin logaritmien kehitymisestä ja hieman myöhemmin tässä luvussa palataan merkintöjen kehittymiseen, mm. desimaalipilkun historiaan.

Stevinillä oli kirjasellaan myös toinen tavoite desimaalisten murtolukujen käyttöönoton lisäksi. Hän pyrki desimalisoimaan mittajärjestelmät. Hän esitti, että kullakin alalla perusmitta olisi ”alku” eli niiden perään kirjoitettaisiin © ja tämä jaettaisiin kymmenes-, sadas- jne. osiin. Tämä ehdotus ei kuitenkaan saanut vastaavaa hyväksyntää kuin itse desimaaliluvut ja mittajärjestelmien uudistaminen siirtyi lopulta kahden vuosisadan päähän Ranskan vallankumouksen yhteyteen. Sana ”desimaaliluku” on Stevinin kehittämä.

Simon Stevin (1548-1620)

Simon Stevin oli syntyisin varakkaasta Bruggelaisesta¹⁴³ perheestä. Nuoruudessaan Simon työskenteli kotikaupungissaan kassavirkailijana ja kirjanpitäjänä sekä kaupungin taloushallinnossa, hetken myös Antwerpenissä. Vuonna 1571 hän irtisanoutui kaupungin palveluksesta ja matkusteli vuodet 1571-1577 Pohjois-Euroopassa: Preussissa, Puolasassa, Ruotsissa ja Norjassa. Vuonna 1581 hän asettui asumaan pohjoiseen Leidenin kaupunkiin.

Alankomaat olivat 1500-luvun lopulla myllerryksessä. Etelässä valtaa piti Espanja, jonka alaisuudesta pohjoisosa, mm. juuri Leidenin kaupunki, oli vasta itsenäistynyt. Syy Stevinin muuttoon oli mahdollisesti Espanjalaisten vallanpitäjien harjoittama sorto protestantteja kohtaan, mikä oli ollut myös alkusysäys pohjoisten maakuntien itsenäisyyssohdalle. Oliko Stevin katolinen vai protestantti ei kuitenkaan tiedetä varmuudella. Joka tapauksessa runsaasti protestantteja sekä katolista hallintoa muuten kavahtaneita flaameja muutti Stevinin tapaan pohjoisen itsenäistyneille alueille.

Morits Oranialainen (1567-1625), Alankomaiden tasavallan kenraalikuvernööri, perusti vuonna 1575 Leideniin yliopiston, jonne Stevin kirjautui tällöin jo yli 30-vuotiaana. Myöhemmin hän toimi yliopistossa opettajana. Alankomaat, nuorena valtiona, tarvitsi juuri Stevinin kaltaisia lahjakkaita ja työteliäitä ihmisiä. Etenkin haparoiva alku merkittäväksi merenkäyntivallaksi ja myöhemmin jopa siirtomaiden hallitsijaksi merkitsi tarvetta insinööreille, kartantekijöille, maanmittaajille ja tietenkin näiden aineiden opettajille. Stevin julkaisi vuosina 1582-1586 useita flaaminkielisiä kirjoja, mm. *Problemata Geometrica*, Arkhimedeksen, Eukleideen ja Dürerin teksteihin pohjautuvan geometrian kirjan, joka käsitteli tasogeometriaa ja säännöllisten kappaleiden muodostamista sekä *De Thienden*.

Vuonna 1590, mahdollisesti jo aiemminkin, Stevin muutti Delftin kaupunkiin, joka tunnetaan parhaiten mestarimaalari Johannes Vermeerin (1632-1675) kotikaupunkina. Täällä hän suoritti monenlaisia fysiikkaan liittyneitä kokeita, mm. osoitti vääräksi Aristoteleen ajatuksen, että raskaammat kappaleet tipahtavat keveämpiä nopeammin. Deftiin hän perusti uudenlaisen tuulimyllytyypin, josta oli hankkinut itselleen patentin vuonna 1586. Vuonna 1593 hänet nimitettiin Alankomaiden armeijan huoltopäälliköksi. Tässä virassa hän oli kuolemaansa saakka. Tähän työhön liittyen Stevin kirjoitti runsaasti armeijaan ja sodankäyntiin liittyviä kirjoja. Vuonna 1600 hän järjesti Leidenin teknillisen koulun matematiikan opetuksen uudestaan. Osana uudistusta opetusta ryhdyttiin antamaan kansankielisenä, ei enää latinaksi.

Stevin avioitui verrattain kypsällä iällä, yli 60-vuotiaana, itseään huomattavasti nuoremman Catharina Craeyn kanssa. Avioliitosta syntyi neljä lasta, kaksi poikaa ja kaksi tyttöä, joista toiseksi vanhin Hendrik seurasi isäänsä uravalinnassaan ja ryhtyi opiskelemaan matemaattisia tieteitä valmistuen insinööriksi. Myöhemmällä iällä, perittyään äidin ja nuorena kuolleen vanhemman veljensä Hendrik havaitsi että nuori leski ei ollut ymmärtänyt aviomiehensä käsikirjoitusten arvoa. Ne olivat sekä epäjärjestyksessä että osittain ajautuneet myös pois perheen hallusta. Hendrik keräsi ja järjesti kaikki hajallaan olleet paperit ja ryhtyi julkaisemaan niitä vuonna 1649.

Simon Stevinillä oli erikoinen mielipide flaamin kielen ylivertaisuudesta teknisillä aloilla verrattuna kaikkiin muihin kieliin. Hendrik, jopa monella tavalla seurasi isäänsä, omaksui mielipiteen ja kieltäytyi opiskelemasta koulussa latinaa.

¹⁴³ Satamakaupunki Brugge sijaitsee nykyisen Belgian pohjoisosan flaamilaisalueella.

1.7.13 Algebran kehitys Vièten jälkeen

Thomas Harriot



Englantilainen Thomas Harriot (1560-1621), joka tunnetaan parhaiten fysiikkaan liittyneistä saavutuksista oli eräs joiden ”harteilla” Newton kertoi seisneensa.¹⁴⁴ Harriot valmistui 1580 Oxforin yliopistosta ja asettui vuonna 1590 asumaan Lontoon lähistölle. Harriot tutki fysiikan lisäksi myös matematiikkaa, mutta ei koskaan julkaissut yhtään matematiikan kirjoitusta. Osa niistä julkaistiin postuumisti 1631, mutta jo ennen tätä hänen käsikirjoituksensa olivat tunnettuja Euroopassa.

Harriot oli sisäistänyt Vièten ajatukset hyvin ja mm. omaksunut hänen tuntemattomien suureiden merkintätapansa. Harriot kuitenkin vaihtoi Vièten käyttämät isot kirjaimet pieniin sekä potenssien sanallisen ilmaisun kirjainten toistoon. Esimerkiksi yhtälön $-x^4 + 8x^3 - 13x^2 + 8x = 12$ Harriot kirjoitti

$12\text{II} + 8a - 13aa + 8aaa - aaaa$. Tälle yhtälölle Harriot hyväksyi ratkaisut $a = 2$, $a = 6$, $a = \sqrt{-1}$ ja $a = -\sqrt{-1}$. Yhtälön $16\text{II} - 6a + 9aa - aaa$ ratkaisuksi Harriot ilmoittaa luvut 2, 8 ja -1. Harriot siis yhdisti käsikirjoituksissaan Vièten uuden analyysin Cardanon ja Bombellin vapaaseen suhtautumistapaan negatiivisiin lukuihin ja kompleksilukuihin.

Albert Girard



Kuvan lähde:

<http://fermatlasttheorem.blogspot.com/2007/02/albert-girard.html>

Ranskalaismatematiikko Girard (1595-1632) joutui kotimaassaan vainotuksi protestanttisen uskonsa takia ja muutti Stevinin tapaan jo nuorukaisena Hollantiin, Leidenin kaupunkiin, jonka yliopistoon hän kirjautui 22-vuotiaana. Girard teki algebran alalta useita mielenkiintoisia löytöjä. Girard tutustui hyvin Stevinin ja Bombellin teoksiin ja omaksuen heidän merkintätapansa. Esimerkiksi lausekkeen $12x$ Girard kirjoitti 12O , lausekkeen $4x^3$ 4O jne. Hän myös julkaisi jotain Stevinin teoksia. Kiinnostava sivupolku on, että Girard julkaisi vuonna 1634 kuuluisalle ja myöhemmin paljon tutkitulle Fibonaccin lukujonolle ensimmäisenä rekursiokaavan $a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$.

Vuonna 1629 Girard julkaisi kirjan *Invention nouvelle en l'algebre* (*Uusi keksintö algebrassa*), jossa hän esitti, niin ikään ensimmäisenä, algebran peruslauseen. Seuraavat otteet on poimittu kirjan¹⁴⁵ sivuilta 135-146:

”Lause II. Jokaisella algebrallisella yhtälöllä, paitsi epätäydellisellä, on yhtä monta ratkaisua, kuin korkeimman termin nimellisarvo osoittaa. Ja ratkaisujen ensimmäinen factio on yhtä suuri kuin ensimmäisen alemman termin kerroin, toinen factio on yhtä suuri kuin toisen alemman termin kerroin, kolmas kolmannen ja niin edelleen niin, että viimeinen factio on yhtä suuri kuin vakiotermi – ja kaikki merkit on huomioitava vaihtelevassa järjestyksessä.”

Girard ei anna lauseelleen todistusta, vaan perustelee sitä useiden esimerkkien kautta. Hän kirjoittaa:

”Selitys. Olkoon täydellinen yhtälö¹⁴⁶ $x^4 = 4x^3 + 7x^2 - 34x - 24$. Tällöin sen korkeimman termin nimellisarvo on 4, mikä merkitsee, että sillä on neljä tiettyä ratkaisua, ei enempää, ei vähempää, nimittäin 1, 2, -3 ja 4. ...”

Girard antaa tämän jälkeen useita yhtälöitä, joilla on erilaisia reaalityyppisiä ratkaisuja. Girard hyväksyi myös luvun nolla yhtälön ratkaisuksi, tässäkin suhteessa hän oli edelläkävijä. Reaalisia ratkaisuja sisältävien yhtälöiden jälkeen Girard tote-

¹⁴⁴ Lohne, s. 189

¹⁴⁵ Black & Schmidt, 1986.

¹⁴⁶ Girard kirjoittaa yhtälön näin: ”1(4) on yhtä suuri kuin 4(3) + 7(2) - 34(1) - 24”, Girard määritteli aiemmin täydellisen yhtälön yhtälöksi, jos siinä on korkeimman asteen termistä alkaen jokaista muuttujan potenssia alenevassa sarjassa vakiotermiin saakka.

erkki.luoma-aho@jkl.fi

aa, että yhtälöllä $x^4 = 4x - 3$ on ratkaisut 1 , 1 , $-1 + \sqrt{-2}$ ja $-1 - \sqrt{-2}$. Girard huomioi siis sekä kaksoisjuuren että imaginaariset ratkaisut. Tämän esimerkin jälkeen Girard pohtii hieman kompleksilukujuuria:

”Joku voisi kysyä, että mitä hyötyä näistä mahdottomista ratkaisuista on. Vastaan, että ne ovat hyödyllisiä kolmesta syystä: yleisen säännön varmistamiseksi, ollakseen varma, että ei ole muita ratkaisuja ja niiden käytännöllisyyden vuoksi.”

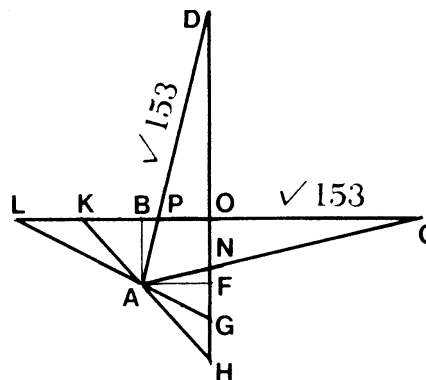
Kaksi ensimmäistä Girardin perustelua ovat selvät, mutta hänen ”käytännöllisyytensä” ei käy ilmi tekstistä, mutta se liittyy kolmannen asteen yhtälön tapauksen *casus irreducibilis* ratkaisuun.

Lauseen II ”factioiden” käyttöä Girard esittelee mm. seuraavan esimerkin kautta. Olkoon yhtälö $x^4 - 7x^2 + 24 = 4x^3 - 34x$, joka on siis järjestetty siten, että parilliset potenssit ovat yhtäsuuruusmerkin vasemmalla ja parittomat oikealla puolella¹⁴⁷. Yhtälöllä on neljä ratkaisua, luvut 1 , 2 , -3 ja 4 . Girard opettaa factioiden laskemisen ja käytön: Ensimmäinen factio on juurten summa $1 + 2 - 3 + 4 = 4$ eli kolmannen asteen termin kerroin. Toinen factio on juurten pareittain laskettujen tulojen summa $1 \cdot 2 + 1 \cdot (-3) + 1 \cdot 4 + 2 \cdot (-3) + 2 \cdot 4 - 3 \cdot 4 = -7$ eli toisen asteen termin kerroin. Kolmas factio on juurista muodostettujen tulokolmikoiden summa -34 eli ensimmäisen asteen termin kerroin ja neljäs factio on juurten tulo eli vakiotermi 24 . Tämä Girardin tekemä havainto oli ensimmäinen kerta, kun ymmärrettiin polynomi yhtälön kertoimien ja juurten välinen yhteys.

Girard tekee vielä yhden merkittävän määritelmän kirjassaan kuvatessaan negatiivisten lukujen merkitystä. Hän toteaa hyvin lakonisesti:

”Tähän saakka emme selittäneet mahdollisesti löytyvien negatiivisten ratkaisujen merkitystä. Miinusratkaisu on selitettävissä Geometriassa liikkeellä taaksepäin; negatiivinen liikkuu taaksepäin, kun positiivinen etenee.”

Toteamuksensa jälkeen Girard antaa esimerkin. Aluksi piirretään kaksi suoraa DG ja BC , jotka leikkaavat toisensa kohtisuorasti pisteessä O . Suoran kulman puolittajalle sijoitetaan piste A siten, että $ABOF$ on neliö, jonka jokainen sivu on 4 . Pisteestä A piirretään jana AC , joka leikkaa suoran DH pisteessä N siten, että janan NC pituus on $\sqrt{153}$.



Kuva 14.

Kuvion jälkeen Girard ryhtyy selvittämään janan $FN (=x)$ pituutta yhtälön $x^4 = 8x^3 + 121x^2 + 128x - 256$ avulla. Yhtälölle hän löytää neljä ratkaisua, joille antaa geometriset selitykset: $FN = 1$, $FD = 16$, $FG = -4\frac{1}{2} + \sqrt{4\frac{1}{4}}$ ja $FH =$

¹⁴⁷ Tätä merkitsee lauseen II viimeinen huomautus.

$-4\frac{1}{2} - \sqrt{4\frac{1}{4}}$. Hän vielä selvittää, että pisteestä F ylöspäin liikuttaessa liikutaan positiiviseen suuntaan: ”jos oletamme, että FN ja FD etenevät ...” ja pisteestä F alaspäin liikuttaessa liikutaan negatiiviseen suuntaan: ”... FG ja FH liikkuvat taaksepäin”. Girard ennakoii tässä lukusuoran käsitettä, joka perustuu hyvin yksinkertaiselle luvun geometriselle tulkinnalle, jota Girard käytti kuviossaan. Girard piti pistettä F ikään kuin origona, josta suunnisti ylöspäin sijoittaen positiiviset ratkaisut pisteen F yläpuolelle ja negatiiviset ratkaisut pisteen F alapuolelle.

1.7.13 René Descartes ja modernit merkinnät

René Descartes

Algebra oli kehittynyt nopeasti *Ars Magna* (1545) ilmestymisen jälkeen. Kuitenkin yksi merkittävä puute vielä vaivasi sitä: huonot merkinnät. Vièten työn seurauksena muuttujan merkitys jo ymmärrettiin, mutta sen jälkeen yhteisymmärrys olikin vähäistä. Joskus tapahtuu niin onnellisesti, että asiat loksahtavat kerralla paikoilleen. Näin sattui, kun ranskalainen filosofi ja matemaatikko René Descartes¹⁴⁸ (lat. Renatus Cartesius; 1596-1650) julkaisi vuonna 1637 filosofisen esikoisteoksensa *Discours de la Méthode* (*Metodin esitys*). Nimen mukaisesti Descartes esitteli teoksessa kehittelemänsä tieteellisen yleismenetelmän. Descartesin lopullinen päämäärä oli ”luoda tieteille paitsi uusi metodi myös täysin uusi pohja, joka olisi samalla kaiken inhimillisen tiedon varma perusta.”¹⁴⁹ Oivalluksen tästä ihmeellisestä tieteiden uudesta perustasta Descartes kertoo saaneensa eräänä marraskuisena talvipäivänä vuonna 1619. Paperille hän laittoi ajatuksensa kuitenkin vasta vuosien kypsyttelyn jälkeen. Jo ennen *Metodin esitystä*, vuosina 1626-1628, laati Descartes lopulta keskenäiseksi jääneen kirjansen *Järjen käyttöohjeet*. Tässä Descartes kirjoitti algebran suhteesta hänen tieteelliseen menetelmäänsä:

”Nykyisin kuitenkin kukoistaa eräs aritmetiikan laji, jossa suoritetaan luvuilla se, minkä vanhat geometrikot suorittivat kuvioilla ja sitä kutsutaan algebraksi. Nämä kaksi tapaa eivät ole mitään muuta kuin saman menetelmän alkuperäisistä periaatteista itsekseen kehittyneitä hedelmiä.”¹⁵⁰

Descartesin ajatukset kulkivat samoja polkuja kuin Viètellä aiemmin. Descartes kuitenkin vei pohdiskelut filosofisempaan suuntaan ja korkeammalle tasolle kuin Viète, jolle analyysi tarkoitti uudistettua algebraa. Descartesille algebra, uudistetussa muodossaan oli vain yleisen menetelmän, universaalien matematiikan, sovellus:

”Joitain jälkiä tästä aidosta matematiikasta näyttää esiintyneen Pappoksella ja Diofantoksella, jotka elivät satoja vuosia sitten, vaikkeivät ehkä aivan alkuaikoina. Luulen, että nämä samat kirjoittajat ovat myöhemmin katalasti kätkenneet sen, kuten monien nerojen on todettu tehneen keksinnöilleen. Ehkä he pelkäsivät tuon matematiikan olevan niin helppoa ja yksinkertaista, että se julkistettuna menettäisi arvonsa. Sen sijaan he mieluummin paljastivat ihmeteltäväksemme muutamia näennäisen terävästi todistettuja steriilejä totuuksia ikään kuin taitonsa aikaansaannokseina, mutta eivät opettaneetkaan itse taitoa, vaikka juuri se olisi taatusti herättänyt ihailua. Tälläkin vuosisadalla on elänyt eräitä nerokkaita miehiä, jotka ovat koettaneet herättää henkin saman taidon, sillä mitäpä muuta olisi se, mitä kutsutaan vieraskielisesti algebraksi? Algebra selviytyy moninaisten lukujen ja selittämättömien kuvioiden röykkiöstä niin mainiosti, että tuloksena on lopulta suurin mahdollinen selkeys ja helppous, jollaisen voimme olettaa olevan myös aidossa matematiikassa. Kun nämä ajatukset olivat saaneet minut siirtymään pois aritmetiikan ja geometrian parista, jotka ovat erillistieteitä, etsiäkseni

¹⁴⁸ Lyhyt elämäkerta sivulla nn, analyttisen geometrian yhteydessä.

¹⁴⁹ Lilli Alanen, Descartesin Teoksia I johdannossa, s. 12.

¹⁵⁰ Descartes, s. 50-51

yleistä matemaattista tiedettä, kysyin aluksi, mitä ihmiset sanalla *matematiikka* oikeastaan tarkoittavat ... vain kaikki ne alat, joissa tarkastellaan järjestystä tai mittausta, kuuluvat matemaatiikkaan riippumatta siitä tehdäänkö mittaus lukujen, kuvioiden, tähtien, äänien tai joidenkin muiden kohteiden mukaan. Niinpä on oltava jokin yleistiede, joka selittää kaiken, mitä järjestyksestä ja mitasta voidaan tutkia lisäämättä mitään erityisaineistoa. Tätä tiedettä voimme kutsua universaaliseksi matematiikaksi, mikä ei ole juuri keksitty nimitys, vaan se on jo vanhaan ollut käytössä; se sisältää kaiken sen, minkä ansiosta muita tieteenaloja kutsutaan matematiikan osiksi. Universaali matematiikka on sen alaan kuuluvien erillistieteisiin verrattuna ylivoimaisen käyttökelpoinen ja helppo, mikä ilmenee siitä, että se kattaa kaiken saman kuin nämäkin sekä lisäksi vielä paljon muuta.”¹⁵¹

Vièten tyyliin *mathematica universalis* on (kuten Stevinin ajatuksissa) jo muinaisten keksintö, viitataan suoraan vain Diofantokseen ja Pappokseen. Descartes esittelee metodologiaan kesken jääneessä *Järjen käyttöohjeissa* 21 erilaisen säännön kautta sekä tietenkin *Metodin esityksessä*. Myöhemmissäkin kirjoissaan hän jatkoi aiheen parissa.

Mielenkiintoinen kysymys on, että oliko Descartes tietoinen Vièten jo vuosikymmeniä aiemmin julkaisemista analyysiä koskeneista kirjoituksista. Descartes itse väitti, että on kehittänyt menetelmänsä ennen kuin näki Vièten algebralliset tekstit.¹⁵² Missä määrin Descartes on saanut vaikutteita keneltäkin on kysymys, johon historioitsijat eivät ole löytäneet tarkkaa vastausta. Descartes joka tapauksessa joko hylkää tai ei ollut edes tietoinen Vièten *logistica speciosa* sillä vastaavaa lajien ja dimensioiden käsittelyä ei Descartesin kirjoituksista löydy. Descartes itse asiassa kritisoi vahvasti algebran geometrista terminologiaa: pituutta, neliötä ja kuutiota. Hän kirjoittaa:

”Niinpä tulin siihen tulokseen, että nämä nimitykset on syytä kokonaan hylätä, jotta käsitteet eivät mene sekaisin. ... Niinpä on erittäin tärkeää panna merkille, etteivät esimerkiksi juuri, neliö ja kuutio ole mitään muuta kuin peräkkäisiä suureita, joiden keskinäinen suhde on vakio.”¹⁵³

La géométrie

Metodin esitys sisältää kolme liitettä, joissa hän esitteli yleispätevän metodin soveltamista tiettyihin erityisiin tilanteisiin. Näistä *La géométrie*¹⁵⁴ (*Geometria*) on algebran kannalta merkittävin. Juuri tässä liitteessä Descartes ottaa käyttöön, ilman erityisiä perusteluja tai johdantoa modernit algebralliset merkinnät. Muuttujina Descartes käyttää kirjassaan Harriotin ja Girardin tapaan pieniä kirjaimia, mutta ei Vièten tapaan vokaaleja, vaan ranskan aakkosten loppupään kirjaimia x , y ja z . Parametreina hän käyttää aakkosten alkupään kirjaimia a , b ja c . Tämä Descartesin oivallus on käynyt niin arkipäiväiseksi, ettei kahtiajakoa useinkaan tule miettineeksi. Osittain kunnia kirjaimien x :n käytöstä tuntemattomana kuuluu Descartesin lisäksi kirjapainolle. *La géométrie*n painatusta valmistettaessa kirjapainosta alkoi loppua aakkosten loppupään kirjaimet, jolloin Descartesilta kysyttiin oliko väliä mitä kirjainta pääasiassa monissa kirjan yhtälöissä käytettäisiin. Kun Descartes vastasi, että ei ole väliä, käytti kirjanpaino useimmissa tilanteissa kirjainta x , joka on ranskan kielessä harvinaisempi kuin y ja z .¹⁵⁵

Muuttujien lisäksi potenssi ja neliöjuuri ovat *La géométriessa* nykyisenkaltaisessa asussaan, kuten saksalaisperäiset ja jo Vièten käyttämät yhteen- ja vähennyslaskun merkit. Ainoastaan yhtäsuuruusmerkki ja potenssin kaksi merkintä poikkeavat modernista. Itse asiassa Descartesin kirja on ensimmäinen julkaistu matematiikan, jota

¹⁵¹ Descartes, s. 52-53

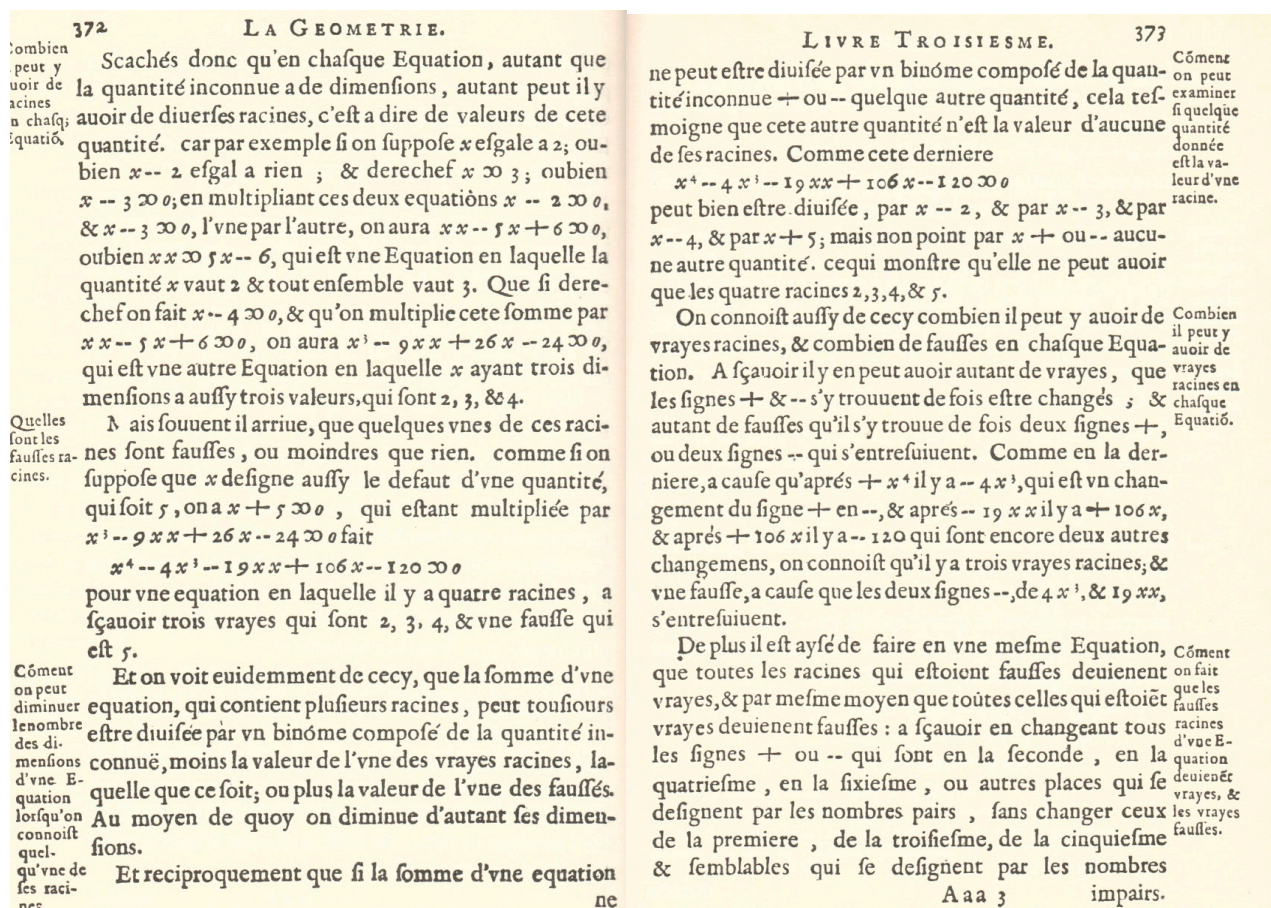
¹⁵² Struik, Source...s. 88

¹⁵³ $1/x = x/x^2 = x^3/x^3 = \dots$; Descartes, s. 106-107

¹⁵⁴ Hänen merkittävin matemaattinen oivalluksensa, algebran soveltaminen geometriaan eli analyttisen geometrian perustaminen tapahtuu tässä *Metodin esityksen* liitteessä. Analyttisen geometrian kehittymistä käsitellään luvussa 5.

¹⁵⁵ Derbyshire, s. 93

on merkintöjen puolesta mahdollista seurata ilman kohtuutonta vaivaa, joskin 400 vuotta vanha ranskankieli estänee lukukokemuksen. Descartesin auktoriteetti sai aikaan sen, että yhä useampi häntä seurannut matemaatikko omaksui hänen merkintänsä ja ne syrjäyttivät lopulta melko nopeasti kaikki muut käytetyt merkinnät.



Kuva 15. *La Géométrie* sivut 372 ja 373. Ensimmäisen painoksen näköispainos, Dover, 1954.

Yhtälöiden teoria

Descartes käsitteli *La Géométrie* kolmannessa ja viimeisessä osassa yhtälöiden teoriaa. Osan kolme alussa hän kirjoittaa yhtälön juurten ja asteluvun välisestä yhteydestä. Itse asiassa Descartes ei ole edes kiinnostunut ratkaisemaan yhtälöä, vaan pikemminkin hän näyttää, miten yhtälöitä rakennetaan juurien avulla. Descartes kirjoittaa *La Géométrie* sivulla 372 (vrt. kuva 15):

"Jokaisella yhtälöllä voi¹⁵⁶ olla yhtä monta erillistä juurta eli tuntemattoman suureen arvoa kuin tuntemattomalla suureella on ulottuvuuksia. Oletetaan esimerkiksi, että $x = 2$ tai $x - 2 = 0$ ja $x = 3$ tai $x - 3 = 0$. Kertomalla keskenään kaksi yhtälöä $x - 2 = 0$ ja $x - 3 = 0$ saadaan $x^2 - 5x + 6 = 0$ eli $x^2 = 5x - 6$. Tämä on yhtälö, jossa x :llä on arvo 2 ja samaan aikaan x :llä on arvo 3. Jos seuraavaksi teemme $x - 4 = 0$ ja kerromme tämän yhtälöllä $x^2 - 5x + 6 = 0$ saamme $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$, toisen yhtälön, jossa x :llä on kolme ulottuvuutta ja siten kolme arvoa, nimittäin 2, 3, ja 4.

¹⁵⁶ Descartes on Girardia taantumuksellisempi, sillä hän hyväksyy vain reaaliset positiiviset ratkaisut ja siksi kirjoittaa "voi olla." Girard ilmaisi asian selvästi siten, että jokaisella yhtälöllä on täsmälleen asteluvun verran ratkaisuja.
erkki.luoma-aho@jkl.fi

Usein käy kuitenkin niin, että jotkut juuret ovat virheellisiä tai vähemmän kuin ei mitään. Jos siis oletamme, että x edustaa luvun 5 puutetta¹⁵⁷, me saamme $x + 5 = 0$, mikä kerrottuna yhtälöllä $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$ antaa yhtälön $x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$, jolla on neljä juurta, nimittäin kolme oikeaa juurta 2, 3 ja 4 sekä yksi virheellinen juuri 5.”

Descartesin yhtälöiden käsittelyssä on Girardin käsittelyä selvemmin näkyvillä kuinka yhtälö voidaan rakentaa juurien avulla. Toisaalta Descartesin mielestä negatiivinen luku -5 ei ole kuitenkaan yhtälön ”oikea” juuri, vaikka hän selvästi ymmärtää kyseisen luvun toteuttavan rakentamansa yhtälön. Tämä näkökanta liittyy hänen tuntemattomien suureiden geometriseen tulkintaan janojen pituuksina. Tätä käsitellään tarkemmin seuraavassa luvussa.

Descartes jatka vielä kyseisen yhtälön käsittelyä varmistaen, että edellä kirjoitetun perusteella muotoa $p(x) = 0$ olevassa yhtälössä lauseke $p(x)$, josta Descartes käyttää nimitystä ”summa”, on jaollinen juurista muodostetuilla binomeilla. Lisäksi hän esittelee todistamatta ns. Descartesin merkkisäännön positiivisten ja negatiivisten juurten lukumäärän selvittämiseksi. Sääntö oli tällöin myös ainakin Thomas Harriotin tiedossa, sillä hän julkaisi sen kirjassa *Artis analyticae praxis* (1631)¹⁵⁸. *La Géométrie*, s. 372-373:

”Edeltävän perusteella on selvää, että useita juuria sisältävän yhtälön summa on aina jaollinen binomilla, joka on muodostettu vähentämällä suureesta jokin oikeiden juurten arvoista tai lisäämällä jonkin virheellisen juuren arvo. Tällä tavalla yhtälön astelukua on mahdollista alentaa.

Toisaalta, jos yhtälön termien summa ei ole jaollinen binomilla, joka muodostuu tuntemattomasta suureesta, johon on lisätty tai josta on vähennetty toinen suure, niin jälkimmäinen suure ei ole yhtälön juuri. Siten yhtälö $x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$ on jaollinen vain [lausekkeilla] $x - 2$, $x - 3$, $x - 4$ ja $x + 5$, mutta ei ole jaollinen [lausekkeella] $x +$ tai $-$ jokin toinen suure. Siksi yhtälöllä voi olla vain neljä juurta 2, 3, 4 ja 5¹⁵⁹. Voimme määrittää oikeiden ja virheellisten juurten lukumäärän mistä tahansa yhtälöstä myös seuraavalla tavalla: Yhtälöllä voi olla yhtä monta oikeaa juurta kuin se sisältää merkkien vaihdoksia, merkistä $+$ merkkiin $-$ tai merkistä $-$ merkkiin $+$; ja yhtä monta virheellistä juurta, kuin siitä löytyy kaksia peräkkäisiä $+$ tai $-$ merkkejä.

”Siispä viimeisimmässä yhtälössä, koska [termiä] $+x^4$ seuraa $-4x^3$, antaen merkinvaihdon merkistä $+$ merkkiin $-$ ja [termiä] $-19x^2$ seuraa $+106x$ ja [termiä] $+106x$ seuraa -120 antaen kaksi muuta merkin vaihtumista tiedämme, että on kolme oikeaa juurta; ja koska [termiä] $-4x^3$ seuraa $-19x^2$ virheellisiä juuria on yksi.”

Seuraavaksi Descartes käsittelee mahdollisuutta muokata yhtälöä siten, että sen negatiiviset ratkaisut muuttuvat positiiviseksi. Meidän näkökulmastamme seuraa valille säännölle ei ole juuri käyttöä (373-374):

On helppo muuntaa yhtälö sellaiseksi, että kaikki juuret, jotka olivat virheellisiä tulevat oikeiksi ja kaikki ne juuret, jotka olivat oikeita tulevat virheellisiksi. Tämä tehdään vaihtamalla toisen, neljännen, kuudennen ja kaikkien parillisten termien merkit, jättäen ensimmäisen, kolmannen, viidennen ja kaikkien parittomien termien merkit ennalleen. Siispä, jos yhtälön

$$x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$$

sijaan kirjoitamme

$$x^4 + 4x^3 - 19x^2 - 106x - 120 = 0$$

¹⁵⁷ Luvun 5 puute merkitsee jäännöstä, kun luku 5 vähennetään nolasta eli lukua -5 .

¹⁵⁸ Smith, *The Geometry of ...* s.160

¹⁵⁹ Descartesilla näyttää olleen monenlaisia ongelmia negatiivisten lukujen kanssa, pitäisi olla -5 .

saamme yhtälön, jolla on ainoastaan yksi oikea juuri 5 ja kolme virheellistä juurta 2, 3 ja 4¹⁶⁰.

Tämän jälkeen Descartes opettaa kuinka yhtälön juuren arvoa on mahdollista muuttaa (s. 374):

Jos yhtälön juuret ovat tuntemattomat ja halutaan lisätä tai vähentää kutakin juurta jollakin tietyllä luvulla meidän täytyy sijoittaa tuntemattoman suureen tilalle, läpi koko yhtälön, toinen suure lisättynä tai vähennettynä annetulla luvulla. Siispä, jos halutaan lisätä 3:lla jokaisen juuren arvoa yhtälössä

$$x^4 + 4x^3 - 19x^2 - 106x - 120 = 0$$

laitetaan x :n paikalle y ja annetaan y :n yllittää x 3:lla, niin että $y - 3 = x$. Sitten x^2 :n sijaan laitetaan $(y - 3)$:n neliö tai $y^2 - 6y + 9$; x^3 :n paikalle laitetaan sen kuutio $y^3 - 9y^2 + 27y - 27$; ja x^4 paikalle laitetaan sen neljäs potenssi tai $y^4 - 12y^3 + 54y^2 - 108y + 81$

Tämän jälkeen Descartes laskee ilmoittamansa polynomit yhteen ja jakaa lopuksi saamansa yhtälön $y^4 - 8y^3 - y^2 + 8y = 0$ y :llä.

Jatkossa Descartes tekee vaivalloisia laskuja päämääränään vain muuntaa negatiiviset ratkaisuja positiivisiksi. Hän myös näyttää kuinka sijoittamalla voidaan poistaa neliöjuuria ja murtolukuja yhtälöstä. Yhtälön $x^3 - \sqrt{3}x^2 + \frac{26}{27}x - \frac{8}{27\sqrt{3}} = 0$ hän muokkaa sijoituksella $y = x\sqrt{3}$ ja kertomalla $3\sqrt{3}$:lla muotoon

$y^3 - 3y^2 + \frac{26}{9}y - \frac{8}{9} = 0$. Tästä hän etenee uudella sijoituksella $z = 3y$ ja kertomalla 27:llä yhtälöön $z^3 - 9z^2 + 26z - 24 = 0$, jonka ratkaisut 2, 3 ja 4 hän palauttaa alkuperäisen yhtälön ratkaisuiksi $\frac{2}{3}\sqrt{3}$, $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ ja $\frac{4}{9}\sqrt{3}$. Hieman tämän jälkeen Descartes kirjoittaa (s. 380):

Eivät oikeat eivätkä vääräkään juuret ole aina todellisia¹⁶¹; joskus ne ovat kuvitteellisia¹⁶²; se on, vaikka voimme aina kuvitella mielessämme yhtä monta juurta kullekin yhtälölle, kuten olen aiemmin todennut, ei silti aina löydy tarkkaa lukua, joka vastaisi kuvaa. Vaikka siis voimme kuvitella yhtälölle $x^3 - 6x^2 + 13x - 10 = 0$ kolme juurta, niin sillä on silti vain yksi todellinen juuri 2 ja kaksi muuta, jotka, vaikka kuinka lisäämme, vähennämme tai kerromme niitä juuri asetettujen sääntöjen mukaan, pysyvät aina kuvitteellisina.

Tässä katkelmassa tavataan ensimmäisen kerran nimitys ”imaginaarinen” liittyen kompleksilukuihin. Siten termi ”imaginaariluku” voidaan nähdä olevan peräisin Descartesilta. Hän ei kuitenkaan jatka imaginaarilukujen ominaisuuksien tutkimista, vaan käsittely jää täksi yksittäiseksi toteamukseksi.

¹⁶⁰ Juuret ovat siis $x = 5$, $x = -2$, $x = -3$ ja $x = -4$.

¹⁶¹ ”reelles”; reaalisia

¹⁶² ”Mais quelquefois seulement imaginaires.”

1.7.14 Lopuksi

1600-luvulla algebra saavutti kaikilta oleellista osiltaan tason, joka vastaa tai ylittää lukiossa opetettavan tason. Al-Khwarizmi oli muotoillut menetelmän toisen asteen yhtälön ratkaisulle. Italiaalaisten Del Ferron, Tartaglian, Cardanon ja Ferrarin johdolla oli onnistuttu löytämään ratkaisut kolmannen ja neljännen asteen yhtälöille. Ranskalaisten Vièten ja Descartesin johdolla oli perustettu moderni symboliikka. Girard oli havainnut algebran peruslauseen sekä yhtälön juurten ja termien kertomien välisen yhteyden. Hän myös suhtautui negatiiviseen lukuun, kuten kompleksilukuunkin hyvin sallivaksi.

Reaaliluvut

Merkittävin puute ja siten merkittävin myöhemmin tapahtunut kehitys koski reaaliluvun käsitettä. 1600-luvulla matemaatikot horjuivat vielä vanhan kreikkalaisen perinteen ja Stevinin ennakoiman uuden lukukäsityksen välillä. Kreikan matematiikkaa kohtaan tunnettu kunnioitus hidasti luopumista vanhasta. Vasta Cauchyn ja Bolzanon analyysiin 1800-luvun alussa tuoma tarkkuus mahdollisti reaaliluvun määrittelyn nykymuodossa. Modernin määritelmän antoi lopulta Richard Dedekind (1831-1916). Hän julkaisi ajatuksensa rationaali- ja irrationaalilukujen muodostamasta jatkumosta, reaalilukujen joukosta, vuonna 1872 kirjassa *Stetigkeit und Irrationale Zahlen (Jatkuvuus ja irrationaaliluvut)*¹⁶³. Dedekind itse kirjoittaa kirjan esipuheessa, että

”differentiaalilaskennan sanotaan käsittelevän jatkuvia suureita antamatta missään tarkkaa määritelmää jatkuvuudelle”¹⁶⁴.

Pettyneenä kaikkiin aikaisempiin määritelmiin hän päätti laatia

”puhtaasti aritmeettisen ja täydellisen tarkan perustan inifinitesimaaliselle analyysille”¹⁶⁵.

Dedekindin määritelmä

Dedekind asettaa aluksi rationaalilukujen joukon R ja suoran L , jolle on asetettu lukuja 0 ja 1 vastaavat pisteet. Seuraavaksi hän asettaa jokaista rationaalilukua vastaamaan jonkin suoran pisteen. Dedekind toteaa saman tien että suoralla L on huomattavasti enemmän pisteitä kuin joukossa R on alkioita. Joukkoon R tulisi siten lisätä kaikki suoralla L löytyvät irrationaaliluvut, jotta lukujoukossa R olisi sama täydellisyys ja jatkuvuus kuin mikä suoralla L on. Dedekind täyttää joukon R aukot ns. Dedekindin leikkausten avulla.

Dedekindin määrittelyssä leikkaus (A_1, A_2) on sellainen rationaalilukujen joukon R jako kahteen osaan A_1 ja A_2 , että jokainen joukon A_1 alkio on jokaista joukon A_2 alkioita pienempi. Lisäksi A_1 ja A_2 muodostavat yhdessä joukon R eli joukkoon A_1 kuuluvat täsmälleen ne rationaaliluvut, jotka eivät kuulu joukkoon A_2 ja kääntäen. Dedekinkin mukaan leikkauksia on kolmenlaisia. Jokainen rationaaliluku tuottaa kaksi leikkausta, sillä rationaaliluku a jakaa aina joukon R kahteen osaan, joista joukkoon A_1 kuuluvat kaikki lukua a pienemmät tai yhtäsuuret ja joukkoon A_2 lukua a suuremmat tai yhtäsuuret luvut. Lisäksi luku a voidaan sijoittaa jompaankumpaan joukkoon eli a on joko joukon A_1 suurin tai joukon A_2 pienin luku. Näiden kahden itsestään selvän leikkaustyyppin lisäksi on vielä kolmas leikkaustyyppi:

”Tästä ominaisuudesta, että kaikki leikkaukset eivät ole rationaalilukujen tuottamia johdettu rationaalilukujen joukon R epätäydellisyys tai epäjatkuvuus. Silloin kun meidän on käsiteltävä leikkausta (A_1, A_2) , joka ei ole rationaaliluvun tuottama, me luomme uuden, irrationaalisen luvun a , jota pidämme täysin määriteltynä tämän leikkauksen (A_1, A_2)

¹⁶³ Encyclopedia Britannica ”Dedekind”

¹⁶⁴ Dedekind, s. 2

¹⁶⁵ Dedekind, s. 2

kautta; me sanomme, että luku a vastaa tätä leikkausta tai se tuottaa tämän leikkauksen. Tästä eteenpäin, siten, jokaista tiettyä leikkausta vastaa tietty rationaali- tai irrationaali-luku ...”¹⁶⁶

Nyt reaalityluvut oli lopulta määritelty täsmällisesti ja oikein. Samalla lukusuora oli esitetty täsmällisesti, sillä jokaista suoran L pistettä vastasi jokin reaalityluku, rationaalinen tai irrationaalinen.

Kompleksiluvut

1600-luvulla ymmärrys kompleksilukujen luonteesta oli vielä tavoittamatta. Cardano oli tuonut ne yleiseen tietoisuuteen 1540, minkä jälkeen mm. Bombelli ja Girard olivat käsitelleet niitä. John Wallis yritti antaa kompleksiluvuille 1600-luvun lopulla graafisen tulkinnan, joka jätti kuitenkin runsaasti kysymyksiä. Kompleksilukuja käytettiin laskuissa 1600-luvun lopulta alkaen hyvin vapaasti, mm. Leibniz osoitti taituruutta niiden käsittelyssä, kuten myös Leonhard Euler (1707-1783) 1700-luvulla. Eulerilta on myös peräisin merkintä $i = \sqrt{-1}$. Euler ja Abraham de Moivre (1667-1754) tunsivat kaavan $(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$. Euler hahmotti kompleksilukuja xy -koordinaatistossa sekä myös napakoordinaatistossa kaavan $x + iy = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ välityksellä. Nämä edelliset tulokset sekä kaavan $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ Euler esitteli kirjassaan *Introductio in Analysin Infinitorum* (1748). Eulerilta kuitenkin puuttui tarkka määritelmä kompleksiluvulle.¹⁶⁷

Ensimmäisen selvän kompleksitason esityksen yhdessä kompleksilukujen yhteen- ja kertolaskun kanssa loi norjalainen kartturi ja maanmittaaja Caspar Wessel (1745-1818) vuonna 1797. Wesslin taskankielinen tutkimuspapere julkaistiin Kööpenhaminan yliopiston¹⁶⁸ julkaisusarjassa vuonna 1799. Saman keksinnön teki itsenäisesti myös ranskalainen Rober Argand (1768-1822), joka julkaisi löytönsä vuonna 1806. Wesselin papere jäi täysin huomiotta vuoteen 1895 saakka, joten Argandin julkaisu on kompleksilukujen käsitteen tosiasiallinen lähde nykymatematiikassa.¹⁶⁹

Algebran peruslause

Algebran peruslauseelle esitettiin Girardin työn jälkeen monia epätäydellisiä todistuksia. Ensimmäisen yrittäjä oli ranskalainen Jean Le Rond D'Alembert (1717-1783), joka laati todistuksen 1700-luvun puolivälissä. Likimain samoihin aikoihin sveitsiläinen Leonhard Euler julkaisi niinkään epätäydellisen todistuksen¹⁷⁰. Myös De Foncenet (1759) ja Lagrange (1772) julkaisivat omat todistuksensa. Lopulta vasta lähes 200 vuotta Girardin jälkeen saksalainen Carl Friedrich Gauss esitti vuonna 1799 puolustamassaan väitöskirjassa ensimmäisen täydellisen todistuksen. Pitävän todistuksen lisäksi hän osoitti työssään myös edeltäjiensä virheet ja puutteet¹⁷¹.

Ratkaisukaavat

Matemaatikot käyttivät runsaasti energiaa löytääkseen ratkaisukaavat korkeampaa astetta olevilla polynomiyhtälöille. Päätöksen tälle etsinnälle antoi lopulta Évariste Galois vasta 1830-luvulla osoittamalla, että yleistä ratkaisukaavaa ei edes ole mahdollista löytää millekään neljättä astetta korkeammalle polynomiyhtälölle.

¹⁶⁶ Dedekind, s. 15

¹⁶⁷ van der Waerden, s. 177-178

¹⁶⁸ Tanska ja Norja muodostivat tällöin kaksoismonarkian; Norjassa ei ollut omaa yliopistoa 1700-luvulla.

¹⁶⁹ Nahin, s. 48; DSB XIV, s. 279-280; Bodil Branner, ”Caspar Wessel on representing complex numbers (1799)”, EMS Newsletter, September 1999, s. 13-16

¹⁷⁰ Struik, A Source ..., s. 99

¹⁷¹ Struik, A Source ..., s. 115

Lisätietoa

Tarkemmin 1700- ja 1800- lukujen sekä 1900-luvun alun algebran tutkimuksen saavutuksista voi lukea hollantilaismatemaatikon Bartel Leendert van der Waerdenin (1903 – 1996) klassikosta *A History of Algebra: From al-Khwārizmī to Emmy Noether* (1985). Kirja käsittelee koko algebran historian, mutta kaksi kolmannesta kirjasta käsittelee Descartesin jälkeistä aikaa ja modernin algebran syntyä. Lukijan kannalta kiintoisaa on tietää, että van der Waerdenin on itsekin vaikuttanut modernin algebran kehitykseen 1900-luvun alun vuosikymmeninä. Kirja on saatavilla ainakin yliopistollisista kirjastoista.

1.8 Merkintöjen kehittyminen

Johdanto

Symbolien kehittyminen ja vakiintuminen nykyisin käytettyyn muotoon kesti satoja vuosia. Symboliikan syntymisessä voidaan havaita kaksi vaihetta, joista ensimmäisessä italialaiset abacistit ryhtyivät lyhentämään muuten retorisen algebran usein toistuvia ilmaistuja 1300-luvulta alkaen. Toinen vaihe, varsinaisen symboliikan aikakausi, alkaa Vièten ”analyysistä”. Vaikka Vièten merkinnät muuten olivat vaatimattomat niin hänen tärkein saavutuksensa, muuttujan ja parametrin käsitteiden perustaminen, muutti ratkaisevalla tavalla algebran olemusta ja mahdollisti symbolisen algebran.

Seuraavassa käydään läpi jokaisen peruslaskutoimituksen symbolin kehittyminen. Osittain merkintöjen kehittymistä on sivuttu jo algebran yleisen kehityksen osiossa.

Yhteen- ja vähennyslasku 1400-luvulla alkoi italialaisiin aritmetiikan ja algebran kirjoihin ilmestyä yhteen- ja vähennyslaskulle lyhennysmerkintöjä. Italian- ja latinankielisissä teksteissä käytettiin kirjainta p ja $\tilde{p}$ latinan kielen sanan *plus* ja italian kielen sanan *piu* tilalle. Molempien merkitys on sama, enemmän. Vastaavasti merkintöjä m ja $\tilde{m}$ käytettiin sanojen *minus* ja *meno* (vähemmän) sijasta.

Symbolit $+$ ja $-$ ovat peräisin saksankielisistä aritmetiikan kirjoista. Ne esiintyvät ensimmäisen kerran painettuina Johann Widmanin kirjassa *Behede vnd hubsche Rechenung auff allen Kauffmanschafft* (1489)¹⁷². Sanaa *et* oli käytetty aikaisemmin ilmaisemaan yhteenlaskua. On havaittu, että käsikirjoituksissa sanaa *et* on ryhdytty useiden toistojen vuoksi kirjoittamaan huolimattomasti. Erityisesti t -kirjain on kirjoitettu lähes ristin muotoon. Merkkiä $+$ pidetäänkin sanan *et* ligatuurina eli kirjainten yhdistymänä¹⁷³. Miinusmerkin alkuperä on keskiaikaisessa varastokirjanpidossa, jossa kauppiat ja kirjanpitäjät käyttivät vaakaviivaa ($-$) puuttuvan määrän sekä myös taarapainon ilmaisemisessa.

Saksalaistyyppiset merkit $+$ ja $-$ syrjäyttivät italialaisten lyhenteet käytännössä siinä vaiheessa kun ranskalaismatemaatikot Viète ja Descartes omaksuivat ne käyttöönsä. Merkkien ulkomuoto vaihteli kuitenkin pitkään ja niistä saatettiin tehdä koristeellisia. Miinusmerkki kirjoitettiin välillä yhdessä pisteiden avulla, ja merkki $\div$ oli Keski-Euroopassa melko yleinen. Jopa niinkin myöhään kuin vuonna 1915 Tanskassa julkaistiin kemian alan tutkimuspapereita, jossa käytettiin $\div$ -merkkiä vähennyslaskun merkitsemiseen.

Kerto- ja jakolasku

Kerto- ja jakolaskun symbolit vakiintuivat 1600-luvun aikana. Meillä varsin vähän käytetty St Andrew’n risti $\times$ on peräisin Englannista 1600-luvun alusta. Erityisesti englantilainen matemaatikko William Oughtred (1574-1660) suosi sen käyttöä ja mm. skotlantilaisen John Napierin (1550-1617) kirjassa *Miffici Logarithmorum canonis descriptio*¹⁷⁴ (1618) käytettiin sitä kertolaskun merkitsemiseen. Nykyisin kertolasku merkitään yleensä pienellä pisteellä. Syy, miksi merkki $\times$ jäi pois käytöstä oli sen samankaltaisuus kirjaimen x kanssa. Kirjainten käyttö tuntemattomien merkitsemisessä ja erityisesti kirjainten x , y ja z käyttö yleistyi 1600-luvun puolivälistä alkaen, joten ongelmia alkoi ilmetä 1600-luvun lopulla. Saksalainen G. W. Leibniz (1646-1716) keksi käyttää pistettä kertolaskun merkinä. Hän kirjoitti 29.7. 1698 kirjeessä Johann Bernoullille, että

¹⁷² Cajori, s. 232

¹⁷³ Samoin on syntynyt $\&$ -merkkikin eli sanan *et* (ja) kirjainten yhteensulautumisesta.

¹⁷⁴ Logaritmien kehittämisestä ja John Napierin saavutuksista tarkemmin luvussa 5.

”En pidä merkin $\times$ käyttämisestä kertolaskun symbolina, koska se voidaan sekoittaa helposti kirjaimeen x Usein kirjoitan kahden suureen väliin pisteen ja ilmaisen kerto-laskun näin: $ZC \cdot LM$. Tästä syystä en käytä suhteen ilmaisemiseen pistettä, vaan kahta pistettä. Tätä merkintää käytän myös jakolaskuissa.”

Leibnizin mainitsema ja meidänkin käyttämämme kaksoispistemerkintä ($:$) ei ollut Leibnizin oma keksintö, sitä oli käytetty jo 1600-luvun alkupuolella, mutta se yleistyi kuitenkin juuri Leibnizin ansiosta.

Murtolukujen vaakasuoraa viivaa käyttivät jo arabimatematiikot. Euroopassa ensimmäisenä sen otti käyttöön jo Leonardo Fibonacci.

Jakolaskua merkitsi symbolilla $\div$ ensimmäisen kerran svetsiläinen Johann Rahn teoksessa *Teutsche Algebra* vuonna 1659. Teos ei saavuttanut kotimaassaan liki-mainkaan sitä suosiota minkä sen englanninkielinen käännös saavutti Iso-Britanniassa. Kun mm. sellaiset nimekkäät matemaatikot kuin John Wallis ja Isaac Barrow omaksuivat merkin käyttöönsä levisi se yleisesti käytetyksi merkiksi lopulta koko englanninkieliseen maailmaan. Jakolaskun merkin $\div$ käyttöalue noudattelee nykyisin hyvin tarkasti kielipoliittisia rajoja. Manner-Euroopassa ei Rahnin jälkeen ole käytännössä lainkaan käytetty kyseistä merkkiä, vaikka Iso-Britanniassa ja Yhdysvalloissa se on laajalti käytössä. On hyvin todennäköistä, että suomalainen ei näe kyseistä merkkiä kuin taskulaskimessa, ellei tietoisesti tutustu englanninkieliseen matemaattiseen kirjallisuuteen.¹⁷⁵

Yhtäsuuruusmerkki

Yhtäsuuruusmerkki on saanut syntynsä walesilaisen englantilaismatematiikon Robert Recorden (n. 1510-1558) oivalluksesta. Hän käytti sitä ensimmäisen kerran kirjassaan *The Whetstone of Witte* (1557), jonka lehdistä hän perustelee sen käyttöä seuraavasti:

”...And to auoide the tedious repetition of these woordes: is equalle to: I Will sette as I doe often in woorke use, a pair of parallels, or Gemowe lines of one lengthe, thus:
 $\equiv$ bicause noe .2. thynges, can be moare equalle...”

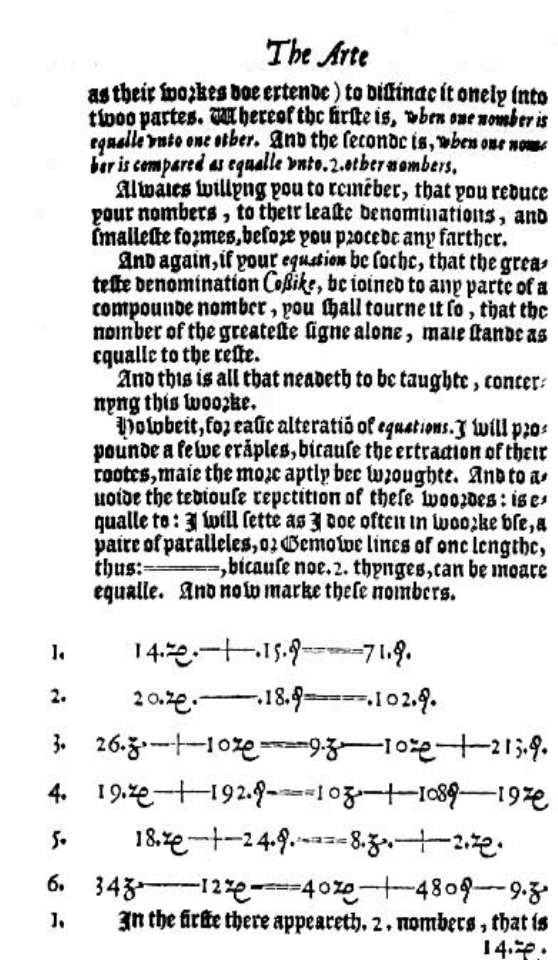
Vapaasti suomennettuna Recorden perustelu on:

”Välttääkseni sanojen 'on yhtäsuuri kuin' tylsää toistamista käytän merkkiä $\equiv$, koska kaksi asiaa eivät voi olla enemmän yhtä suuria, kuin pari yhtä pitkiä samansuuntaisia viivoja”.

Recorden yhtäsuuruusmerkki oli huomattavasti pidempi kuin mihin olemme tottuneet, mutta muuten sen käyttö vastasi nykyistä tapaa. Tätä ennen yhtäsuuruutta oli kuvattu pääasiassa sanallisesti mm. latinan kielen sanoilla *aequales* ja *aequantur* sekä lyhenteellä *aeq.* Myös vastaavia englannin, ranskan ja saksankielisiä ilmauksia käytettiin, kuten Recorden tekstistä voi päätellä. Recorden ehdotusta edeltänyt retorinen tapa jatkui vuoden 1557 jälkeenkin. Seuraavan kerran Recorden yhtäsuuruusmerkkiä käytettiin painetussa kirjassa vasta vuonna 1618. Merkki yleistyi 1600-luvun alusta lähtien Englannissa saavuttaen siellä jo vuosisadan puolivälissä lähes yksinomaisen aseman.

Suurin uhka nykyiselle yhtäsuuruusmerkille oli Descartesin (1596-1650) yhtäsuuruudelle käyttämä symboli ∞ (kuva 21). Johtuen Descartesin maineesta se oli varsin käytetty Ranskassa ja Hollannissa 1600-luvun lopulla ja 1700-luvun alussa. Tärkein syy Recorden merkinnän vakiintumiseen ja Descartesin merkinnän häviämiseen oli, että molemmat differentiaalilaskennan kehittäjät, saarivaltion Newton ja manner-Euroopan Leibniz suosivat Recorden merkintää.

¹⁷⁵ Cajori, s. 270-272



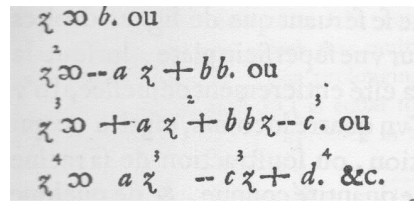
Kuva 16. Robert Recorden kirjan *The Whetstone of Witte* sivu, jolla Recorde perustelee symbolin $\equiv$ käyttöä.

Neliöjuuri

Neliöjuuren merkki $\sqrt{}$ oli käytössä ensimmäisen kerran saksalaisen Christoff Rudolffin kirjan *Die Coss* (1525) uudistetussa laitoksessa vuonna 1553, jolloin hän merkitsi neliöjuurta symbolilla $\sqrt{}$. Lisäksi kuutiojuurelle oli merkki $\sqrt[3]{}$, neljännele juurelle merkki $\sqrt[4]{}$ jne. Ennen tätä symbolia neliöjuuri ilmaistiin joko sanoilla *radix* (juuri) tai *latus* (sivu). Myös alkukirjaimi *r* ja *l* käytettiin, kuten myös muotoja *ra*, *R* ja $\bar{R}$. Perinteisen, Eulerin jo vuonna 1775 esittämän teorian mukaan $\sqrt{}$ -merkki on kehittynyt *r*-kirjaimesta, sen huolimattomasti kirjoitetusta muodosta. Juuren merkki vakiintui käyttöön 1600-luvun loppuun mennessä.

Potenssi

Potenssimerkintämme on Descartesin keksintö. Hän käytti sitä ensimmäisen kerran jo aiemmin mainitussa kirjassa *La Géométrie* vuonna 1637. Ainoa ero nykyiseen merkintätapaan oli, että hän kirjoitti lukujen neliön kertolaskuna, esimerkiksi $b\ b$ eikä b^2 . Descartesin potenssimerkintä vakiintui moniin muihin merkintöihin verrattuna melko nopeasti, jo muutaman vuosikymmenen kuluessa muut merkinnät väistyivät. Ennen tätä käytössä oli ollut hyvin monenlaisia merkintöjä, yleisimpänä eri muodoissa esiintyi potenssien sanallinen kirjoittaminen tai vastaavien sanojen lyhentäminen.



$$\begin{aligned} z &= b \\ z^2 &= -az + b^2 \\ z^3 &= az^2 + b^2z - c^3 \\ z^4 &= az^3 - c^3z + d^4 \end{aligned}$$

Kuva 17. Ote Rene Descartesin kirjan *La Géométrie* sivulta 301 sekä vastaavat modernit merkinnät. Ensimmäisen painoksen näköispainos, Dover, 1954.

Desimaalipilkku

Stevinin kehittämät desimaaliluvut olivat periaatteeltaan aivan samat kuin mitä me edelleen käytämme. Ainoa ero on tietenkin Stevenin kömpelö merkintätapa. Vaikka desimaaliluvut periaatteessa saivat myönteisen vastaanoton, niin moni matemaatikko koki tarpeelliseksi hieman muokata ja parantaa merkintöjä. Mm. seuraavallaisia merkitsemistapoja käytettiin seuraavien vuosikymmenien kuluessa: 8 798^v luvulle 8,00798; 123.4.5.9.8.7.2. luvulle 123,459872; 3 9 8⁽⁰⁾⁽¹⁾⁽²⁾ luvulle 3,98 ja 31|2500 luvulle 31,25.

Desimaalipilkku esiintyi ensimmäisen kerran vuonna 1592 Joost Bürgin (1552-1632) teksteissä ja desimaalipiste esiintyi vuonna 1593 Christoph Claviuksen¹⁷⁶ teksteissä.

Logaritmijärjestelmän lopulliseen muotoon saattanut englantilainen Henry Briggs ja hänen työtään jatkanut hollantilainen Adriaan Vlacq kirjoittivat 1620-luvulla valmistuneissa taulukoissa desimaaliluvut käyttäen desimaalierottimena pilkkua.

Logaritmitaulukoiden suuren suosion ja nopean leviämisen myötä nykyinen desimaalilukujen merkitsemistapa saavutti koko Euroopan. Kuitenkin vuonna 1614 ilmestyneen Napierin alkuperäisen logaritmitaulukon vuonna 1616 ilmestyneessä englanninkielisessä laitoksessa kääntäjä Edward Wright muokkasi taulukkoa hieman ja kirjoitti luvut desimaalilukuina käyttäen kokonais- ja desimaaliosan erottimena pistettä. Tämän myötä Englantiin vakiintui käyttöön desimaalipiste.

Kun 1600-luvun lopulla Manner-Euroopassa ryhdyttiin Leibnizin aloitteesta vähitellen käyttämään kertomerkinä pistettä ($\cdot$), niin sekaannuksen välttämiseksi desimaalierottimeksi vakiintui 1700-luvulla lopullisesti pilkku. Koska Englannissa kertomerkinä suosittiin edelleen Oughtredin käyttämää ristiä ($\times$) ei estettä desimaalipisteen käytön jatkamiselle ei ollut.

Jako desimaalipilkun ja desimaalipisteen käyttäjiin on säilynyt 1600-luvulta 2000-luvulle saakka eikä tulevaisuudessakaan ole nähtävissä parannusta asiaan. Englannin lisäksi englanninkielisissä maissa, Australia ja Yhdysvallat suurimpina, käytetään desimaalierottimena pistettä. Manner-Euroopassa, Venäjällä ja Etelä-Amerikassa taas käytetään desimaalipilkkua. Aasian maat jakautuvat sekä pisteen että pilkun käyttäjiin enemmistön, mm. Japanin ja Kiinan, käyttäessä desimaalipistettä. Kanada jakautuu kieliryhmien mukaan pilkun ja pisteen käyttäjiin ranskankielisten suosiessa pilkkua ja englanninkielisten suosiessa pistettä.

¹⁷⁶ Jesuiitta Clavius tunnetaan paremmin yhtenä gregoriaanisen kalenterin laatijoista ja karkausvuosisäännön kehittäjänä. Clavius muotoili seuraavan säännön: Karkausvuosia ovat kaikki neljällä jaolliset vuodet, paitsi ne vuodet, jotka ovat jaollisia myös luvulla 100. Poikkeuksen tekevät 400 jaolliset vuodet, jotka eivät ole karkausvuosia. Näin muun muassa vuosi 1900 ei ollut karkausvuosi, mutta vuosi 2000 oli karkausvuosi. Tämä jo yli 400 vuotta vanha sääntö on edelleen riittävän tarkka ja kalenterimme pitää yhtä havaittujen vuodenaikojen kanssa.