Epäyhtälötehtävien ratkaisuja

1. osa, ks. Solmu 2/2010

1. Kahden positiivisen luvun harmoninen, geometrinen, aritmeettinen ja kontraharmoninen keskiarvo määritellään yhtälöillä

$$\mathcal{H} = \frac{2}{\frac{1}{u}+\frac{1}{v}}, \quad \mathcal{G} = \sqrt{uv}, \quad \mathcal{A} = \frac{u+v}{2} \quad \text{ja} \quad \mathcal{C} = \frac{u^2+v^2}{u+v}.$$

Todista keskiarvojen suuruusjärjestys $\mathcal{H} \le \mathcal{G} \le \mathcal{A} \le \mathcal{C}$. Milloin yhtäsuuruus on voimassa?

Ratkaisu. Läpi–harmaan–kiven ratkaisut:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} \le \mathcal{G} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{2}{\frac{1}{u}+\frac{1}{v}} \le \sqrt{uv} \\
&\Leftrightarrow \quad 2\sqrt{\tfrac{1}{u}}\sqrt{\tfrac{1}{v}} \le \left(\sqrt{\tfrac{1}{u}}\right)^2 + \left(\sqrt{\tfrac{1}{v}}\right)^2 \\
&\Leftrightarrow \quad \left(\sqrt{\tfrac{1}{u}}\right)^2 - 2\sqrt{\tfrac{1}{u}}\sqrt{\tfrac{1}{v}} + \left(\sqrt{\tfrac{1}{v}}\right)^2 \ge 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \left(\sqrt{\tfrac{1}{u}} - \sqrt{\tfrac{1}{v}}\right)^2 \ge 0.
\end{aligned}$$

Alimman rivin epäyhtälö on tosi, koska reaalilukujen neliöt ovat ei-negatiivisia. Yhtäsuuruus on voimassa, jos ja vain jos

$$\sqrt{\tfrac{1}{u}} - \sqrt{\tfrac{1}{v}} = 0 \;\Leftrightarrow\; u = v.$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{G} \le \mathcal{A} \quad &\Leftrightarrow \quad \sqrt{uv} \le \frac{u+v}{2} \\
&\Leftrightarrow \quad 2\sqrt{u}\sqrt{v} \le \sqrt{u}^{\,2} + \sqrt{v}^{\,2} \\
&\Leftrightarrow \quad \sqrt{u}^{\,2} - 2\sqrt{u}\sqrt{v} + \sqrt{v}^{\,2} \ge 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \left(\sqrt{u} - \sqrt{v}\right)^2 \ge 0.
\end{aligned}$$

Alimman rivin epäyhtälö on tosi, koska reaalilukujen neliöt ovat ei-negatiivisia. Yhtäsuuruus on voimassa, jos ja vain jos

$$\sqrt{u} - \sqrt{v} = 0 \;\Leftrightarrow\; u = v.$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} \le \mathcal{C} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{u+v}{2} \le \frac{u^2+v^2}{u+v} \\
&\Leftrightarrow \quad (u+v)^2 \le 2(u^2+v^2) \\
&\Leftrightarrow \quad u^2 + 2uv + v^2 \le 2u^2 + 2v^2 \\
&\Leftrightarrow \quad u^2 - 2uv + v^2 \ge 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (u - v)^2 \ge 0.
\end{aligned}$$

Alimman rivin epäyhtälö on tosi, koska reaalilukujen neliöt ovat ei-negatiivisia. Yhtäsuuruus on voimassa, jos ja vain jos

$$u - v = 0 \ \Leftrightarrow \ u = v.$$

Hieman vähemmällä pääsee, jos huomaa, että $\mathcal{G}^2 = \mathcal{AH}$.

2. Osoita, että jos u_1 ja u_2 ovat positiivisia lukuja, joille $u_1 + u_2 = 1$, niin

$$\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} \ge 4.$$

Milloin vallitsee yhtäsuuruus?

Ratkaisu. Tehtävän oletusten mukaan

$$\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} = \frac{u_1+u_2}{u_1} + \frac{u_1+u_2}{u_2} = 1 + \frac{u_2}{u_1} + \frac{u_1}{u_2} + 1 \ge 1+2+1 = 4.$$

Yhtäsuuruus on voimassa, jos ja vain jos

$$\frac{u_2}{u_1} + \frac{u_1}{u_2} = 2,$$

mikä toteutuu, jos ja vain jos $u_1 = u_2 = \frac{1}{2}$.

3. Osoita, että jos u_1, u_2 ja u_3 ovat positiivisia lukuja, joille $u_1+u_2+u_3 = 1$, niin

$$\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} \ge 9.$$

Milloin vallitsee yhtäsuuruus?

Ratkaisu. Samalla tavalla kuin edellisessä tehtävässä

$$\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} = \frac{u_1+u_2+u_3}{u_1} + \frac{u_1+u_2+u_3}{u_2} + \frac{u_1+u_2+u_3}{u_3} =$$

$$3 + \left(\frac{u_2}{u_1} + \frac{u_1}{u_2}\right) + \left(\frac{u_2}{u_3} + \frac{u_3}{u_2}\right) + \left(\frac{u_3}{u_1} + \frac{u_1}{u_3}\right) \ge 3+2+2+2 = 9.$$

Yhtäsuuruus on voimassa, jos ja vain jos $u_1 = u_2 = u_3 = \frac{1}{3}$.

4. Yleistä tehtävien 2. ja 3. epäyhtälöt mielivaltaiselle määrälle positiivisia lukuja, ja todista näin saamasi epäyhtälö yhtäsuuruusehtoineen.

Ratkaisu. Jos positiivisten lukujen $u_1, \ldots, u_n$ summa on 1, niin näiden lukujen käänteislukujen summa on vähintään n^2. Todistus menee samaan tyyliin edellisten kanssa. Korvaamalla käänteislukujen summassa

$$\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \ldots + \frac{1}{u_\imath} + \ldots + \frac{1}{u_\jmath} + \ldots + \frac{1}{u_n}$$

osoittajissa olevat ykköset summalla $u_1 + \ldots + u_n$ ja suorittamalla jakolaskut saadaan tulokseksi summa, jossa on n kappaletta ykkösiä ja

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

kappaletta muotoa

$$\frac{u_\imath}{u_\jmath} + \frac{u_\jmath}{u_\imath} \tag{1}$$

olevia termejä, joista jokainen on vähintään yhtäsuuri kuin 2. Siis käänteislukujen summa on vähintään

$$n + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2 = n + n^2 - n = n^2.$$

Yhtäsuuruus on voimassa, jos ja vain jos jokaisen lausekkeen (1) arvo on 2, mikä toteutuu, jos ja vain jos $u_\imath = \frac{1}{n}$ kaikilla $\imath \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

5. Jos kaikki u-luvut ovat nollasta eroavia, niin CBS-epäyhtälön yhtäsuuruusehto voidaan kirjoittaa muotoon

$$\frac{v_1}{u_1} = \frac{v_2}{u_2} = \ldots = \frac{v_n}{u_n}.$$

Osoita, että jos u-lukujen summa ei ole nolla, niin

$$\frac{v_\imath}{u_\imath} = \frac{v_1 + v_2 + \ldots + v_n}{u_1 + u_2 + \ldots + u_n}$$

kaikilla $\imath \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Ratkaisu. Jos

$$\frac{v_1}{u_1} = \frac{v_2}{u_2} = \ldots = \frac{v_n}{u_n} = t,$$

niin $v_\imath = tu_\imath$ kaikilla $\imath \in \{1, 2, \ldots, n\}$, joten

$$v_1 + \ldots + v_n = tu_1 + \ldots + tu_n = t(u_1 + \ldots + u_n).$$

Jos u-lukujen summa ei ole nolla, niin tästä seuraa

$$\frac{v_1 + \ldots + v_n}{u_1 + \ldots + u_n} = t = \frac{v_\imath}{u_\imath}$$

kaikilla $\imath \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

6. a) Sijoita yksikkökuutio $\mathbb{R}^3$:n positiivisten akselien rajaamaan soppeen siten, että yksi kärki tulee origoon ja kolme siitä lähtevää särmää yhtyy koordinaattiakseleihin. Määritä kuution kärkipisteiden koordinaatit. Laske samasta kärjestä lähtevän särmän ja avaruuslävistäjän välinen kulma.

Ratkaisu. Kärkipisteiden koordinaatit ovat (0,0,0), (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (1,1,0), (1,0,1), (0,1,1) ja (1,1,1). Samasta kärjestä lähtevät särmä ja avaruuslävistäjä voidaan esittää vektoreina

$$\mathbf{s} = (1{,}0{,}0) \quad \text{ja} \quad \mathbf{a} = (1{,}1{,}1).$$

Niiden välisen kulman γ kosini on

$$\cos\gamma = \frac{\mathbf{s}\cdot\mathbf{a}}{|\mathbf{s}|\,|\mathbf{a}|} = \frac{1+0+0}{1\cdot\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

joten $\gamma = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \approx 54{,}7°$.

b) Sijoita yksikkökuutio $\mathbb{R}^4$:n positiivisten akselin osien raajaamaan osaan siten, että yksi kärki tulee origoon ja neljä siitä lähtevää särmää yhtyy koordinaattiakseleihin. Määritä kuution kärkipisteiden koordinaatit. Laske samasta kärjestä lähtevän särmän ja avaruuslävistäjän välinen kulma.

Ratkaisu. Kärkipisteiden koordinaatit ovat kuten a-kohdassa

$$(0{,}0{,}0{,}0),\ (1{,}0{,}0{,}0),\ (0{,}1{,}0{,}0),\ \ldots\ (1{,}1{,}1{,}1).$$

Niitä on $2^4 = 16$ kappaletta. Samasta kärjestä alkavaa särmää ja avaruuslävistäjää edustavat vektorit

$$\mathbf{s} = (1{,}0{,}0{,}0) \quad \text{ja} \quad \mathbf{a} = (1{,}1{,}1{,}1),$$

ja niiden välisen kulman γ kosini on

$$\cos\gamma \;=\; \frac{\mathbf{s}\cdot\mathbf{a}}{|\mathbf{s}|\,|\mathbf{a}|} \;=\; \frac{1+0+0+0}{1\cdot\sqrt{4}} \;=\; \frac{1}{2}.$$

Vektorien välisen kulman asteluku on siis $\gamma = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 60°$.

7. **a)** Olkoon $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, ja $\gamma_\imath$ sen sekä kantavektorin $\mathbf{e}_\imath$ välinen kulma kaikilla $\imath \in \{1, 2, \ldots n\}$. Osoita, että

$$\cos^2\gamma_1 \;+\; \cos^2\gamma_2 \;+\; \ldots \;+\; \cos^2\gamma_n \;=\; 1.$$

Ratkaisu. Olkoon $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_\imath, \ldots, u_n)$. Tällöin $\mathbf{u}\cdot\mathbf{e}_\imath = u_\imath$, ja toisaalta $\mathbf{u}\cdot\mathbf{e}_\imath \;=\; |\mathbf{u}||\mathbf{e}_\imath|\cos\gamma_\imath$. Siis

$$|\mathbf{u}||\mathbf{e}_\imath|\cos\gamma_\imath \;=\; u_\imath,$$

mistä seuraa, koska $|\mathbf{e}_\imath| = 1$,

$$\cos\gamma_\imath \;=\; \frac{u_\imath}{|\mathbf{u}|}.$$

Niinpä näiden kosinien neliöiden summa on

$$\frac{u_1^2}{|\mathbf{u}|^2} \;+\; \frac{u_2^2}{|\mathbf{u}|^2} \;+\; \ldots \;+\; \frac{u_n^2}{|\mathbf{u}|^2} \;=\; \frac{|\mathbf{u}|^2}{|\mathbf{u}|^2} \;=\; 1.$$

b) Osoita, että $\mathbb{R}^n$:n vektorit toteuttavat kolmioepäyhtälön

$$|\mathbf{u} \,+\, \mathbf{v}| \;\le\; |\mathbf{u}| \,+\, |\mathbf{v}|.$$

Ohje: Sovella vektorimuotoista CBS-epäyhtälöä.

Ratkaisu.

$$\begin{aligned} |\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2 &= (\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}+\mathbf{v}) \\ &= |\mathbf{u}|^2 + 2\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} + |\mathbf{v}|^2 \\ &\le |\mathbf{u}|^2 + 2\,|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}| + |\mathbf{v}|^2 \\ &= (|\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|)^2, \end{aligned}$$

mistä väite seuraa.

8. Osoita, että keskiarvot $\mathcal{H}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{C}$ sijaitsevat pienimmän ja suurimman u-luvun välissä.

Ratkaisu. Olkoot m ja M pienin ja suurin positiivisista u-luvuista. Tällöin

$\mathcal{H}$)

$$\mathcal{H} = \frac{n}{\frac{1}{u_1} + \ldots + \frac{1}{u_n}} \leq \frac{n}{\frac{1}{M} + \ldots + \frac{1}{M}} = \frac{n}{\frac{n}{M}} = M,$$

ja

$$\mathcal{H} = \frac{n}{\frac{1}{u_1} + \ldots + \frac{1}{u_n}} \geq \frac{n}{\frac{1}{m} + \ldots + \frac{1}{m}} = \frac{n}{\frac{n}{m}} = m.$$

$\mathcal{G}$)

$$\mathcal{G} = \sqrt[n]{u_1 u_2 \ldots u_n} \leq \sqrt[n]{M\,M \ldots M} = \sqrt[n]{M^n} = M,$$

ja

$$\mathcal{G} = \sqrt[n]{u_1 u_2 \ldots u_n} \geq \sqrt[n]{m\,m \ldots m} = \sqrt[n]{m^n} = m.$$

$\mathcal{A}$)

$$\mathcal{A} = \frac{u_1 + \ldots + u_n}{n} \leq \frac{M + \ldots + M}{n} = \frac{nM}{n} = M,$$

ja

$$\mathcal{A} = \frac{u_1 + \ldots + u_n}{n} \geq \frac{m + \ldots + m}{n} = \frac{nm}{n} = m.$$

$\mathcal{C}$)

$$u_1^2 + \ldots + u_n^2 \leq M u_1 + \ldots + M u_n = M(u_1 + \ldots + u_n),$$

joten

$$\mathcal{C} = \frac{u_1^2 + \ldots + u_n^2}{u_1 + \ldots + u_n} \leq M.$$

$$u_1^2 + \ldots + u_n^2 \geq m u_1 + \ldots + m u_n = m(u_1 + \ldots + u_n),$$

joten

$$\mathcal{C} = \frac{u_1^2 + \ldots + u_n^2}{u_1 + \ldots + u_n} \geq m.$$

9. Todista epäyhtälö $\mathcal{G} \leq \mathcal{A}$ yhtäsuuruusehtoineen. Ohje: Tälle epäyhtälölle löytyy useita erilaisia todistuksia, mutta teoksessa [1] esitetään seuraava erityisen nerokas ajatus. Voidaan rajoituksetta olettaa, että $u_1 \leq u_2 \leq \ldots \leq u_n$. Geometrinen keskiarvo $\mathcal{G}$ sijaitsee pienimmän ja suurimman u-luvun välissä, joten on olemassa k, jolle $u_k \leq \mathcal{G} \leq u_{k+1}$. Koska

$$\sum_{\imath=1}^{k} \int_{u_\imath}^{\mathcal{G}} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{\mathcal{G}}\right) \mathrm{d}t + \sum_{\imath=k+1}^{n} \int_{\mathcal{G}}^{u_\imath} \left(\frac{1}{\mathcal{G}} - \frac{1}{t}\right) \mathrm{d}t \geq 0, \tag{2}$$

ja koska integroitavat ovat ei-negatiivisia, on yhtäsuuruus voimassa, jos ja vain jos $u_\imath = \mathcal{G}$ kaikilla $\imath \in \{1, 2, \ldots n\}$. Osoita, että (2) sievenee epäyhtälöksi $\mathcal{G} \leq \mathcal{A}$.

Ratkaisu. Integrointien jälkeen epäyhtälön (2) vasemman puolen ensimmäinen summa tulee muotoon

$$k \ln \mathcal{G} - k - \ln(u_1 \ldots u_k) + \frac{u_1 + \ldots + u_k}{\mathcal{G}},$$

ja toinen summa vastaavasti

$$\frac{u_{k+1} + \ldots u_n}{\mathcal{G}} - \ln(u_{k+1} \ldots u_n) - (n-k) + (n-k) \ln \mathcal{G}.$$

Sijoittamalla nämä epäyhtälöön (2) saadaan

$$n \ln \mathcal{G} - n + \frac{u_1 + \ldots u_n}{\mathcal{G}} - \ln(u_1 \ldots u_n) \geq 0.$$

Se sievenee n:llä jakamalla muotoon

$$\ln \mathcal{G} - 1 + \frac{\mathcal{A}}{\mathcal{G}} - \ln \mathcal{G} \geq 0,$$

ja edelleen epäyhtälöksi

$$\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{G}} \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{A} \geq \mathcal{G}.$$

10. **a)** Todista epäyhtälö $\mathcal{H} \leq \mathcal{G}$ yhtäsuuruusehtoineen.

Ratkaisu. Sovelletaan epäyhtälöä $\mathcal{G} \leq \mathcal{A}$ u-lukujen käänteislukuihin.

b) Todista epäyhtälö $\mathcal{A} \leq \mathcal{C}$ yhtäsuuruusehtoineen.

Ratkaisu. Sovelletaan CBS-epäyhtälöä lukuihin $(\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n})$ ja $(u_1, \ldots, u_n)$.

2. osa, ks. Solmu 3/2010

1. Osoita, että funktio $f(x) = x^2$ on aidosti konveksi.

Ratkaisu. Olkoon $u, v \in \mathbb{R}$ ja $\lambda \in]0,1[$. Epäyhtälöt

$$\begin{aligned}
f\big(\lambda u + (1-\lambda)v\big) &\leq \lambda f(u) + (1-\lambda)f(v) \\
\big(\lambda u + (1-\lambda)v\big)^2 &\leq \lambda u^2 + (1-\lambda)v^2 \\
\lambda(\lambda-1)u^2 - 2\lambda(\lambda-1)uv + \lambda(\lambda-1)v^2 &\leq 0 \\
u^2 - 2\,uv + v^2 &\geq 0 \\
(u - v)^2 &\geq 0
\end{aligned}$$

ovat yhtäpitäviä. Viimeinen niistä on tosi, joten kaikki ovat tosia. Viimeisestä epäyhtälöstä nähdään myös, että yhtäsuuruus on voimassa, jos ja vain jos $u = v$, joten f on aidosti konveksi.

2. Osoita, että funktio $g(x) = x^{-1}$, $x > 0$, on aidosti konveksi.

Ratkaisu. Olkoon $u, v \in \mathbb{R}_+$ ja $\lambda \in]0,1[$. Epäyhtälöt

$$\begin{aligned}
f\big(\lambda u + (1-\lambda)v\big) &\leq \lambda f(u) + (1-\lambda)f(v) \\
\big(\lambda u + (1-\lambda)v\big)^{-1} &\leq \lambda u^{-1} + (1-\lambda)v^{-1} \\
1 &\leq \big(\lambda u + (1-\lambda)v\big)\big(\lambda u^{-1} + (1-\lambda)v^{-1}\big) \\
2\lambda(1-\lambda) &\leq \lambda(1-\lambda)\big(\frac{u}{v} + \frac{v}{u}\big) \\
2 &\leq \frac{u}{v} + \frac{v}{u}
\end{aligned}$$

ovat yhtäpitäviä. Viimeinen niistä on tosi, joten kaikki ovat tosia. Yhtäsuuruus on voimassa, jos ja vain jos $u = v$, joten g on aidosti konveksi.

3. Keksi esimerkki konveksista funktiosta $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, joka on **a)** jatkuva, **b)** epäjatkuva.

Ratkaisu. **a)** Funktio $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ on konveksi ja jatkuva.

b) Funktio

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x = 0, \\ x, & \text{kun } 0 < x \leq 1, \end{cases}$$

on konveksi mutta ei jatkuva.

4. Osoita, että jos f ja g ovat välillä I konvekseja funktioita ja jos a sekä b ovat ei-negatiivisia, niin lineaarikombinaatio $af + bg$ on konveksi.

Ratkaisu. Olkoot $x, y \in I$ sekä $\lambda \in]0,1[$ mielivaltaisesti valittuja. Tällöin, koska f ja g ovat konvekseja ja $a, b \geq 0$, on

$$\begin{aligned}(af + bg)(\lambda x + (1-\lambda)y) &= af(\lambda x + (1-\lambda)y) + bf(\lambda x + (1-\lambda)y) \\ &\leq a\lambda f(x) + a(1-\lambda)f(y) + b\lambda g(x) + b(1-\lambda)g(y) \\ &= \lambda(af + bg)(x) + (1-\lambda)(af + bg)(y),\end{aligned}$$

joten $af + bg$ on konveksi.

5. Osoita, että välillä I määritelty funktio f on konveksi, jos ja vain jos

$$\frac{f(v) - f(u)}{v - u} \leq \frac{f(v) - f(x)}{v - x} \tag{3}$$

kaikille ehdon $u < x < v$ toteuttaville välin I luvuille.

Ratkaisu. Olkoot $[u,v] \subseteq I$. Luku $x \in]u,v[$, jos ja vain jos on olemassa $\lambda \in]0,1[$ siten, että $x = \lambda u + (1-\lambda)v$. Epäyhtälöt

$$\begin{aligned}\frac{f(v) - f(u)}{v - u} &\leq \frac{f(v) - f(x)}{v - x} \\ \frac{f(v) - f(u)}{v - u} &\leq \frac{f(v) - f\big(\lambda u + (1-\lambda)v\big)}{v - \lambda u - (1-\lambda)v} \\ \frac{f(v) - f(u)}{v - u} &\leq \frac{f(v) - f\big(\lambda u + (1-\lambda)v\big)}{\lambda(v - u)} \\ \lambda f(v) - \lambda f(u) &\leq f(v) - f\big(\lambda u + (1-\lambda)v\big) \\ f\big(\lambda u + (1-\lambda)v\big) &\leq \lambda f(u) + (1-\lambda)f(v)\end{aligned}$$

ovat yhtäpitäviä, joten f on konveksi, jos ja vain jos ehto (3) on voimassa.

6. Osoita, että välillä I määritelty funktio f on konveksi, jos ja vain jos

$$\frac{f(x)-f(u)}{x-u} \leq \frac{f(v)-f(u)}{v-u} \tag{4}$$

kaikille ehdon $u < x < v$ toteuttaville välin I luvuille.

Ratkaisu. Olkoot $[u,v] \subseteq I$. Luku $x \in]u,v[$, jos ja vain jos on olemassa $\lambda \in]0,1[$ siten, että $x = \lambda u + (1-\lambda)v$. Epäyhtälöt

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)-f(u)}{x-u} &\leq \frac{f(v)-f(u)}{v-u} \\
\frac{f\big(\lambda u+(1-\lambda)v\big)-f(u)}{\lambda u+(1-\lambda)v} &\leq \frac{f(v)-f(u)}{v-u} \\
\frac{f\big(\lambda u+(1-\lambda)v\big)-f(u)}{(1-\lambda)(v-u)} &\leq \frac{f(v)-f(u)}{v-u} \\
f\big(\lambda u+(1-\lambda)v\big)-f(u) &\leq (1-\lambda)(f(v)-f(u)) \\
f\big(\lambda u+(1-\lambda)v\big) &\leq \lambda f(u) + (1-\lambda)f(v)
\end{aligned}$$

ovat yhtäpitäviä, joten f on konveksi, jos ja vain jos ehto (4) on voimassa.

7. Todista, että *avoimella välillä* määritelty konveksi funktio on jatkuva.

Ratkaisu. Olkoon $]a,b[$ konveksin funktion f määrittelyväli ja $t \in]a,b[$. Osoitetaan, että f on jatkuva pisteessä t. Koska väli $]a,b[$ on avoin, on olemassa $c, d, x, y \in]a,b[$ siten, että $a < c < x < t < y < d < b$. Kaksoisepäyhtälön

$$\frac{f(t)-f(c)}{t-c} \leq \frac{f(t)-f(x)}{t-x} \leq \frac{f(d)-f(t)}{d-t}.$$

vasen ja oikea puoli ovat x:stä riippumattomia, joten merkitsemme ne vakioiksi m ja m'. Siis

$$m \leq \frac{f(t)-f(x)}{t-x} \leq m',$$

mistä seuraa

$$m(t-x) \leq f(t)-f(x) \leq m'(t-x).$$

Kun $x \to t-$, niin $t - x \to 0$, joten $f(x) \to f(t)$. Siis,

$$\lim_{x \to t-} f(x) = f(t). \tag{5}$$

Kaksoisepäyhtälöstä

$$\frac{f(t) - f(c)}{t - c} \leq \frac{f(y) - f(t)}{y - t} \leq \frac{f(d) - f(t)}{d - t}$$

seuraa samalla tavalla

$$\lim_{y \to t+} f(y) = f(t), \tag{6}$$

joten f on jatkuva pisteessä t.

8. Osoita, että funktio $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \ln x$, on aidosti konveksi.

Ratkaisu. Toinen derivaatta $f'(x) = x^{-1} > 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}_+$, joten f on aidosti konveksi.

9. Osoita, että jos positiivisten lukujen $u_1, \ldots, u_n$ aritmeettinen keskiarvo on 1, niin

$$u_1 u_2 \ldots u_n \leq 1 \leq u_1^{u_1} u_2^{u_2} \ldots u_n^{u_n},$$

ja että yhtäsuuruudet ovat voimassa, jos ja vain jos $u_k = 1$ kaikilla $k \in \{1, \ldots, n\}$.

Ratkaisu. Kaksoisepäyhtälön vasen puoli yhtäsuuruusehtoineen seuraa välittömästä keskiarvoepäyhtälöstä $\mathcal{G} \leq \mathcal{A}$. Oikea puoli yhtäsuuruusehtoineen puolestaan seuraa epäyhtälötekstin kakkososan (Solmu 3/2010) viidennestä lauseesta.

10. Osoita **a)** edellisen tehtävän erikoistapauksena, **b)** pelkästään lukion oppimäärään tukeutuen, että

$$(1 - x)^{1-x} (1 + x)^{1+x} > 1$$

kaikilla $x \in]0,1[$.

Ratkaisu. **a)** Lukujen $1 - x$ ja $1 + x$ aritmeettinen keskiarvo on 1, joten väite on edellisen tehtävän kaksoisepäyhtälön oikean puolen erikoistapaus.

b) Funktio $f(x) = (1-x)^{1-x}(1+x)^{1+x}$ saa yksinomaan positiivisia arvoja, kun $0 \le x < 1$, joten sen logaritmi

$$g(x) = \ln f(x) = (1-x)\ln(1-x) + (1+x)\ln(1+x)$$

on näillä x:n arvoilla määritelty. Tämä funktio on derivoituva, ja sen derivaatta sievenee muotoon

$$g'(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Derivaatta on positiivinen, kun $0 < x < 1$, joten g on aidosti kasvava. Koska $g(0) = 0$ ja g on jatkuva välillä $[0{,}1[$, on $g(x) > 0$, kun $0 < x < 1$. Tästä seuraa, koska $g(x) = \ln f(x)$, että $f(x) > 1$, kun $0 < x < 1$.

11. Osoita, että jos a, b, c ovat positiivisia ja $a + b + c = 1$, niin

$$a^2 + b^2 + c^2 \ge \tfrac{1}{3}.$$

Milloin yhtäsuuruus on voimassa?

Ratkaisu. Funktio $f(x) = x^{-1}$, $(x > 0)$, on aidosti konveksi. Jensenin epäyhtälön mukaan

$$f(aa + bb + cc) \le af(a) + bf(b) + cf(c),$$

eli

$$\frac{1}{a^2+b^2+c^2} \le a\frac{1}{a} + b\frac{1}{b} + c\frac{1}{c} = 3,$$

mistä väite seuraa. Jensenin epäyhtälön yhtäsuuruusehdon mukaan yhtäsuuruus on voimassa, jos ja vain jos

$$a = b = c = \tfrac{1}{3}.$$

Tehtävä voidaan ratkaista myös geometrisesti, jolloin a:n, b:n ja c:n rajaaminen positiivisiksi käy tarpeettomaksi. Nimittäin

$$a + b + c = 1$$

on erään $\mathbb{R}^3$:ssa sijaitsevan tason yhtälö. Origon etäisyys tästä tasosta on $d = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Origon kautta kulkeva tason normaali siis leikkaa tason pisteessä, jonka etäisyys origosta on d. Kaikkien muiden tason pisteiden etäisyys origosta on suurempi kuin d, mistä väite seuraa.

12. Osoita, että jos luvut u_k ovat positiivisia ja jos $u_1 + u_2 + \ldots + u_n = 1$, niin

$$\left(u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2\right)^2 \le u_1^3 + u_2^3 + \ldots + u_n^3.$$

Milloin yhtäsuuruus on voimassa?

Ratkaisu. Funktio $f(x) = x^2$ on aidosti konveksi. Jensenin epäyhtälöä soveltaen saadaan

$$f(u_1 u_1 + \ldots + u_n u_n) \le u_1 f(u_1) + \ldots + u_n f(u_n),$$

eli

$$\left(u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2\right)^2 \le u_1^3 + u_2^3 + \ldots + u_n^3.$$

Jensenin epäyhtälön yhtäsuuruusehdon mukaan yhtäsuuruus on voimassa, jos ja vain jos

$$u_1 = \ldots = u_n = \tfrac{1}{n}.$$