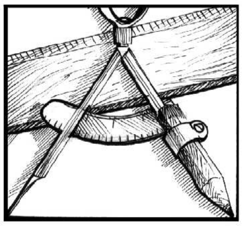


Apollonioksen unohtunut ympyrä

Matti Lehtinen
Helsingin yliopisto

Vuoden 2010 Kansainväliset matematiikkaolympialaiset pidettiin Kazakstanissa. Kilpailun toisen päivän ensimmäinen tehtävä oli klassista geometriaa:

Olkoon P kolmion ABC sisäosan piste. Suorat AP, BP ja CP leikkaavat kolmion ABC ympäri piirretyn ympyrän Γ myös pisteissä K, L ja M, tässä järjestyksessä. Pisteeseen C piirretty Γ:n tangentti leikkaa suoran AB pisteessä S. Oletetaan, että $SC = SP$. Todista, että $MK = ML$.

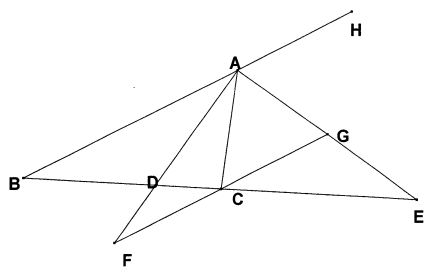
Kun keskustelin kilpailun jälkeen tehtävistä Suomen joukkueen jäsenten kanssa, tulin maininneeksi, että yksi tehtävän monista ratkaisutavoista perustuu *Apollonioksen ympyrän* hyväksikäyttöön. Itselleni yllätykseksi sain todeta, että Apollonioksen ympyrä oli kaikille läsnäolijoille tuntematon käsite. Lienee siis syytä saattaa Solmun lukijoiden tiedot tässä suhteessa samalle tasolle kuin aikanaan lukion oppimäärän opiskelleiden: vuosina 260–170 eKr. eläneen suuren kreikkalaisen geometrikon *Apollonios Pergalaisen* mukaan nimetty ympyrä kuului nimittäin geometrian oppikurssin perustietoihin ennen matematiikanopetuksen mullistuksia.

Klassinen lähestymistapa

Apollonioksen ympyrään päästään nykykoulunkin geometrian kursseissa mainitun kolmion kulman puolittajan ominaisuuden kautta. Olkoon ABC kolmio, josta oletetaan $AB > AC$. Olkoon H jokin piste sivun BA jatkeella. Kulman BAC puolittaja leikkaa sivun BC pisteessä D ja kulman CAH eli kulman BAC vieruskulman puolittaja leikkaa sivun BC jatkeen pisteessä E. Tällöin pätee

$$\frac{DB}{DC} = \frac{EB}{EC} = \frac{AB}{AC}.$$

Näiden verrantojen sisältö ilmaistaan usein niin, että kolmion kulman puolittaja ja kolmion kulman vieruskulman puolittaja jakavat kolmion sivun sisä- ja ulkopuolisesti kulman viereisten sivujen suhteessa.



Tämän *kulmanpuolittajalauseen* todistus voidaan suorittaa monin tavoin, esimerkiksi sinilauseen avulla. Eräs yksinkertaisimmista todistuksista perustuu apupiirrokseen, jossa pisteen C kautta piirretään AB:n suuntainen suora. Se leikkaa kulman BAC puolittajan pisteessä F ja kulman CAH puolittajan pisteessä G. Yhdensuuntaisuudesta seuraa $\angle CFD = \angle BAD$ ja $\angle ABD = \angle FCD$. Kolmiot ABD ja FCD ovat siis yhdenmuotoisia. Yhdenmuotoisuudesta seuraa vastinosien verrannollisuus:

$$\frac{AB}{FC} = \frac{DB}{DC}.$$

Koska AD on kulman BAC puolittaja, on $\angle CAD = \angle BAD = \angle AFC$. Kolmiossa AFC on kaksi yhtä suurta kulmaa, joten se on tasakylkinen: $FC = AC$. Mutta tästä seuraa heti

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}.$$

Toinen kulmanpuolittajalauseen osa seuraa puolestaan sitä, että kolmiot ABE ja GCE ovat yhdenmuotoisia. Siis

$$\frac{AB}{CG} = \frac{EB}{EC}.$$

Mutta koska $\angle CAG = \angle GAH = \angle CGA$, kolmio GAC on tasakylkinen ja $CG = AC$. Siis myös

$$\frac{EB}{EC} = \frac{AB}{AC}.$$

Kuinka suuri on kulma DAE? Kolmion kulmien summa on sama kuin kahden suoran kulman summa, ja tästä seuraa, että $\angle CAH = \angle ABC + \angle BCA$: kolmion kulman vieruskulma on kolmion kahden muun kulman summa. Mutta tästä seuraa, että kulma DAE on itse asiassa kolmion ABC kaikkien kulmien puolikkaiden summa ja niin ollen suora kulma. Ja Thaleen lause eli kehäkulmalause suoraan kulmaan sovellettuna kertoo, että jos piirretään ympyrä, jonka halkaisija on DE, niin A on tämän ympyrän kehällä. Tuo DE-halkaisijainen ympyrä on juuri Apollonioksen ympyrä.

Analysoidaan tilannetta hiukan tarkemmin. Pisteet D ja E määrittyivät kolmion ABC perusteella. Ne olisi kuitenkin voitu määritellä vain tietyn ehdon toteuttavina suoran BC pisteinä, vetoamatta suoran ulkopuoliseen pisteeseen A. Jos nimittäin $k > 1$ on mielivaltainen luku, on janalla BC tasan yksi piste D, jolle pätee

$$\frac{BD}{DC} = k$$

ja puolisuoralla BC janan BC ulkopuolella on tasan yksi piste E, jolle

$$\frac{EB}{EC} = k.$$

Suhdeluku k riittää kiinnittämään pisteet D ja E ja myös ympyrän $\mathcal{A}$, jonka halkaisija on DE, Apollonioksen ympyrän.

Nyt pätee seuraava tulos: Kaikki ne tason pisteet X, joille

$$\frac{XB}{XC} = k \qquad (1)$$

ovat ympyrällä $\mathcal{A}$ ja kaikille ympyrän $\mathcal{A}$ pisteille X pätee (1).

Lauseen edellinen osa on jo todistettu. Muutetaan vain A X:ksi edellä suoritetussa päättelyssä. Toinen puoli vaatii vähän enemmän. Viimeiset kunnolliset geometrian oppikirjat, 1950-luvulla kirjoitetut *Niilo Kallion, Bruno Malmion* ja *Samuli Apajalahden Geometria* ja *Kalle Väisälän Geometria* sivuuttavat todistuksen, edellinen ehkä tahattomasti, jälkimmäinen asiasta eksplisiittisesti mainiten. Puoli vuosisataa vanhempi koulukirja, *L. Neovius-Nevanlinnan Alkeisgeometrian oppikirja*, esittää täydellisen todistuksen.

Todistetaan tuloksen jälkimmäinen osa epäsuorasti. Tehdään vastaoletus, jonka mukaan ympyrällä $\mathcal{A}$ on piste X, jolle

$$\frac{XB}{XC} = k' \neq k.$$

Oleteaan vielä, että $k' < k$. Kolmion BCX kulman BXC puolittaja leikkaa BC:n pisteessä D' ja kyseisen kulman vieruskulman puolittaja leikkaa BC:n jatkeen pisteessä E'. Piste X on $D'E'$-halkaisijaisella ympyrällä $\mathcal{A}'$. Tehdyn oletuksen nojalla

$$\frac{D'B}{D'C} = \frac{E'B}{E'C} = \frac{XB}{XC} = k' < \frac{DB}{DC} = \frac{EB}{EC}.$$

Tästä seuraa, että D' on lähempänä B:tä kuin D. Koska

$$\frac{EB}{EC} = \frac{BC}{EC} + 1$$

ja

$$\frac{E'B}{E'C} = \frac{BC}{E'C} + 1,$$

on oltava $E'C > EC$, eli E' on kauempana C:stä kuin E. Mutta tämä merkitsee, että jana DE sisältyy kokonaan janaan $D'E'$, ja edelleen $\mathcal{A}$ on kokonaan $\mathcal{A}'$:n sisäpuolella. Piste X ei voi olla kahdella toisiaan koskettamattomalla ympyrällä. Ristiriita osoittaa vastaoletuksen vääräksi, ja Apollonioksen ympyrää koskeva tuloksemme on kokonaan todistettu.

Analyyttisen geometrian avulla helpommin

Edellä klassisin, synteettisin menetelmin saatu tulos on johdettavissa varsin helposti laskemalla. Olkoot edellä käsitellyt pisteet B ja C x-akselin pisteet $(-1, 0)$ ja $(1, 0)$. Piste $X = (x, y)$ toteuttaa ehdon

$$\frac{XB}{XC} = k > 1$$

jos ja vain jos

$$(x+1)^2 + y^2 = k^2\left((x-1)^2 + y^2\right).$$

Yhtälö on yhtäpitävä yhtälöiden

$$(k^2-1)(x^2+y^2) - 2(k^2+1)x + k^2 - 1 = 0$$

ja

$$\left(x - \frac{k^2+1}{k^2-1}\right)^2 + y^2 = \frac{4k}{(k^2-1)^2}$$

kanssa. Viimeinen yhtälö on sellaisen ympyrän yhtälö, jonka keskipiste on x-akselin piste

$$\left(\frac{k^2+1}{k^2-1}, 0\right)$$

ja säde

$$\frac{2k}{k^2-1}.$$

Ympyrä leikkaa x-akselin pisteissä

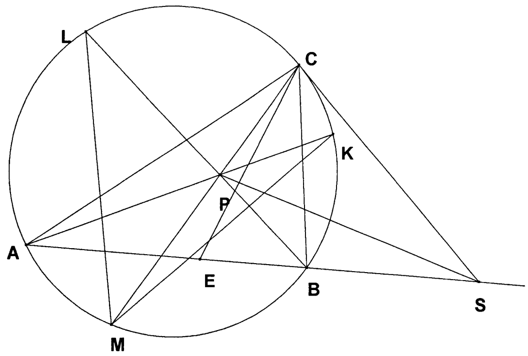
$$\left(\frac{k^2+1}{k^2-1} \pm \frac{2k}{k^2-1}, 0\right),$$

jotka ovat

$$\left(\frac{k-1}{k+1}, 0\right) \quad \text{ja} \quad \left(\frac{k+1}{k-1}, 0\right).$$

Helppo lasku osoittaa, että juuri nämä pisteet jakavat janan BC sisä- ja ulkopuolisesti suhteessa k.

Apollonioksen ympyrän määrittävät jana BC ja suhdeluku k. Kun k:ta vaihdellaan, saadaan ääretön joukko ympyröitä, ns. *ensimmäisen lajin Steinerin ympyräparvi*. Sen mielenkiintoiset ominaisuudet ovat jo toisen pakinan aihe. Mutta entä lähtökohta, olympiatehtävä ja sen littyminen Apollonioksen?



Tehtävän ratkaisu voisi mennä suunnilleen näin: Voidaan olettaa, että $AC > BC$, jolloin S on puolisuoralla AB. Kehäkulmia tarkastelemalla huomataan, että kolmiot PKM ja PCA ovat yhdenmuotoiset. Siis $\frac{PM}{MK} = \frac{PA}{AC}$. Samoin kolmiot PLM ja PCB ovat yhdenmuotoiset, joten $\frac{PM}{ML} = \frac{PB}{BC}$. Väitteen todistamiseksi riittää, että osoitetaan $\frac{PA}{AC} = \frac{PB}{BC}$ eli

$$\frac{PA}{PB} = \frac{CA}{CB}. \tag{1}$$

Olkoon E kulman ACB puolittajan ja sivun AB leikkauspiste. Ne pisteet X, joille $\frac{XA}{XB} = \frac{CA}{CB}$ ovat Apolloniuksen ympyrällä eli ympyrällä, joka kulkee pisteiden C ja E kautta ja jonka keskipiste on suoralla AB. Osoitetaan, että S on tämän ympyrän keskipiste. Koska $\angle CAB = \angle BCS$ (kehäkulma ja jänteen ja tangentin välinen kulma) ja $\angle ACE = \angle ECB$, niin $\angle CES = \angle CAE + \angle ACE = \angle BCS + \angle ECB = \angle ECS$ eli kolmio SCE on tasakylkinen. Siis S on Apolloniuksen ympyrän keskipiste. Koska $SP = SC$, P on Apolloniuksen ympyrällä ja (1) toteutuu.