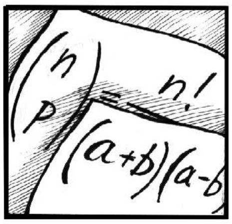


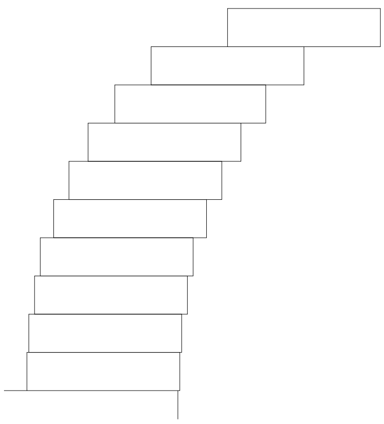
Tiiliä pinoon

Pekka Alestalo
Matematiikan laitos, Aalto-yliopisto

Reunan yli

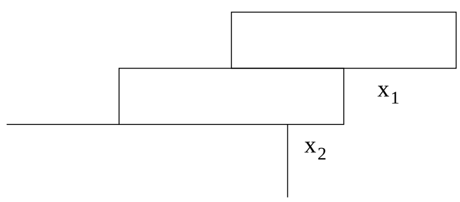
Pöydällä on n kappaletta samanlaisia tiiliä: Kuinka korkea pino niistä voidaan koota, jos jokaisen tiilen tulee olla normaaliasennossa eli suurin pinta alaspäin?

Omituinen kysymys, sillä vastaus on selvästi nh, missä h on yhden tiilen korkeus. Sen sijaan kysymys siitä, kuinka kauas ylin tiili voisi tasapainossa ulottua pöydän reunan yli, onkin jo hankalampi selvittää ilman tarkempaa laskemista. Se on tämän kirjoituksen aiheena.



Kannattaa aloittaa yhden tiilen tapauksella. Selvästi tiili voidaan asettaa niin, että korkeintaan puolet sen omasta pituudesta jää pöydän reunan ulkopuolelle. Sen sijaan jo kahden tiilen tapaus vaatii enemmän pohdintaa: onko edes selvää, että kahdella tiilellä päästään kauemmas pöydän reunasta kuin yhdellä?

Tasapainoehto koostuu nyt kahdesta osasta: ylin tiili ei saa pudota alemman päältä eikä koko systeemi saa kiepsahtaa pöydältä. Oletetaan, että tiilten pituus on 1 pituusyksikkö[1] ja merkitään tiilten ulkonemia symboleilla x_1 ja x_2 kuten alla olevassa kuviossa. Systeemin tasapainoa voidaan tutkia momenttien avulla ja tarvitsemme sen vuoksi fysiikasta seuraavan tiedon: suorakulmaisen särmiön synnyttämän momentin (= voima $\times$ varsi) pystysuora komponentti tietyn tukipisteen suhteen on $mg \cdot \Delta x$, missä m on särmiön massa, $g \approx 9{,}81$ m/s^2 ja Δx särmiön keskipisteen ja tukipisteen välinen vaakasuora etäisyys. Tämä ei ole totta yleisesti, mutta se pätee ainakin niille kappaleille, jotka ovat symmetrisiä peilauksessa massakeskipisteen suhteen.



Sovitaan, että momentin positiivinen suunta on myötäpäivään. Ylemmän tiilen tasapainoehdoksi saadaan

[1] Näin rohkeasta vedosta voi ylioppilaskokeessa menettää yhden pisteen . . .

tällöin $mg \cdot (x_1 - 1/2) \le 0$, josta seuraa jo yllä todettu tulos $x_1 \le 1/2$.

Koko systeemin tasapainossa täytyy ottaa huomioon molempien tiilien momentit pöydän reunan suhteen. Koska ylemmän tiilen keskipisteen vaakasuora etäisyys pöydän reunasta on $x_1 + x_2 - 1/2$, niin saadaan ehto

$$\underbrace{mg \cdot (x_2 - 1/2)}_{\text{alempi}} + \underbrace{mg \cdot (x_1 + x_2 - 1/2)}_{\text{ylempi}} \le 0.$$

Sievennys muotoon

$$x_1 + 2x_2 \le 2 \cdot \frac{1}{2}$$

auttaa jatkossa yleisen ehdon hahmottamiseen, ja siitä saadaan ratkaisuksi

$$x_2 \le \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_1.$$

Valitsemalla $x_1 = 1/2$ saadaan $x_2 \le 1/2 - 1/4 = 1/4$, joten kahden tiilen avulla päästään vähintään $x_1 + x_2 = 1/2 + 1/4 = 3/4$ pöydän reunan ulkopuolelle. Ainakin kauemmas kuin yhdellä tiilellä!

Tehtävä 1. Osoita, että samalla periaatteella saadaan kolmen tiilen systeemin tasapainoehdoksi

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 3 \cdot \frac{1}{2}.$$

Ratkaise suurin mahdollinen x_3, kun $x_1 = 1/2$ ja $x_2 = 1/4$. Mikä on silloin $x_1 + x_2 + x_3$?

Voisimme jatkaa tällä tavalla lisäämällä yhden tiilen kerrallaan, mutta siirrytään kuitenkin rohkeasti yleiseen tapaukseen. Olkoon siis annettuna n tiiltä, joiden pituus on 1 pituusyksikkö. Oletetaan, että tiiliä ladotaan kuvion 3 esittämällä tavalla päällekkäin niin, että jokainen tiili ulottuu hieman alempana olevan oikealle puolelle. Merkitään ulkonemia ylhäältä laskettuna symboleilla $x_1, x_2, \dots, x_n$. Tarkoituksena on selvittää, kuinka suuria arvoja summa $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ voi saada silloin, kun rakennelma on tasapainossa.

Ensimmäinen tärkeä havainto on se, että ylimpien tiilien tasapainoehdot ovat samat kuin aikaisemmissa tapauksissa, joissa tiiliä on vähemmän. Ainoa uutuus on koko systeemin kiepsahtamista koskeva ehto, jossa momentteja tutkitaan pöydän reunan suhteen. Koska ylhäältä lukien k:nnen tiilen keskipisteen etäisyys pöydän reunasta on $x_n + x_{n-1} + \cdots + x_k - 1/2$, niin aikaisemmista tapauksista mallia ottaen tasapainoehdoksi saadaan (mg supistuu pois)

$$\begin{aligned}(x_n - 1/2) &+ (x_n + x_{n-1} - 1/2) \\ &+ (x_n + x_{n-1} + x_{n-2} - 1/2) + \dots \\ &+ (x_n + x_{n-1} + \cdots + x_1 - 1/2) \le 0,\end{aligned}$$

joka sievenee muotoon

$$x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n \le \frac{n}{2}.$$

Näin ollen

$$nx_n \le n/2 - (x_1 + 2x_2 + \cdots + (n-1)x_{n-1})$$

ja edelleen

$$x_n \le \frac{1}{2} - \frac{1}{n}(x_1 + 2x_2 + \cdots + (n-1)x_{n-1}).$$

Tuloksena on siis palautuskaava, jonka avulla annetun pinon ja pöydän väliin voidaan lisätä yksi tiili niin, että tasapaino säilyy. Aloitetaan arvosta $x_1 = 1/2$ ja lasketaan palautuskaavan ylärajan avulla

$$\begin{aligned}x_2 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot x_1 = \frac{1}{4}, \\ x_3 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot (x_1 + 2x_2) = \frac{1}{6}, \\ x_4 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \cdot (x_1 + 2x_2 + 3x_3) = \frac{1}{8}, \\ x_5 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{5} \cdot (x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4) = \frac{1}{10},\end{aligned}$$

jne. Näyttää siltä, että $x_k = 1/2k$ kaikilla $1 \le k \le n$. Tämä voidaan todistaa esimerkiksi vähentämällä kaksi peräkkäistä palautuskaavaa puolittain toisistaan, jolloin summan termejä kumoutuu joukoittain: koska

$$\begin{aligned}kx_k &= k/2 - (x_1 + 2x_2 + \dots \\ &\qquad + (k-2)x_{k-2} + (k-1)x_{k-1}) \\ (k-1)x_{k-1} &= (k-1)/2 - (x_1 + 2x_2 + \dots \\ &\qquad + (k-2)x_{k-2}),\end{aligned}$$

niin

$$\begin{aligned}kx_k - (k-1)x_{k-1} &= k/2 - (k-1)/2 - (k-1)x_{k-1} \\ &= 1/2 - (k-1)x_{k-1},\end{aligned}$$

josta edelleen $x_k = 1/2k$.

Tehtävä 2. Montako tiiltä tarvitaan, jotta ylin tiili olisi kokonaan pöydän ulkopuolella, ts. $x_1 + x_2 + \cdots + x_n > 1$?

Huomattakoon, että valittaessa kaikki ulkonemat mahdollisimman suuriksi, ei syntyvä tasapainotila ole vakaa (stabiili): pienikin häiriö kuten ylimmän tiilen päähän laskeutuva hyttynen rikkoo tasapainon ja romahduttaa koko pinon. Tämä voidaan korjata pienentämällä jokaista ulkonemaa hiuskarvan verran, jolloin saadaan vakaa tasapainotila aavistuksen pienemmällä ulkonemalla.

Vinoon menee

Mutta kuinka kauas pöydän ulkopuolelle voidaan tällä tavalla päästä? Koska

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \approx \frac{1}{2} \ln n$$

ja $\lim_{n\to\infty} \ln n = \infty$, niin mitään kiinteää ylärajaa ei ole, jos vain käytettävissä on riittävän paljon tiiliä (ja sekä pöytä että alimmat tiilet kestävät paineen).

Tehtävä 3. Arvioi yllä olevaa approksimaatiota käyttämällä, kuinka monta 30 cm pitkää tiiltä tarvitaan, jotta ulkonema olisi a) 1 m, b) 10 m, c) 100 m, d) 1 km.

Voidaan osoittaa, että yllä laskettu tapa tiilten latomiseksi tuottaa optimaalisen tuloksen, jos latomisvaiheessa kukin tiili saa koskettaa vain yhtä alempana olevaa. Vasta äskettäin osoitettiin, että tästä vaatimuksesta luopumalla voidaan latoa n tiiltä rykelmäksi niin, että uloin tiili (ei välttämättä ylin) yltää ainakin $c \cdot \sqrt[3]{n}$ verran reunan ulkopuolelle (sopivalla vakiolla $c < 6$, joka ei riipu luvusta n) ja ettei tätä tulosta voida enää parantaa. Koska

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^{1/3}} = 0,$$

niin parannus yllä käsiteltyyn ns. harmoniseen pinoon on huomattava suurilla n. Esimerkiksi kuviossa 4 päästään kolmen tiilen avulla etäisyydelle 1, joka on suurempi kuin harmonisen kolmen tiilen pinon ulkonema $11/12 \approx 0{,}92$. Näitä uusimpia tuloksia selvitetään tarkemmin alla olevissa viitteissä.

Viitteet

Barry Cipra: The Joys of Longer Hangovers. Science 323, Feb. 2009, s. 875.

M. Paterson, Y. Peres, M. Thorup, P. Winkler, U. Zwick. Maximum Overhang. The American Mathematical Monthly, Vol. 116, Nr. 9, Nov. 2009, ss. 763–787.