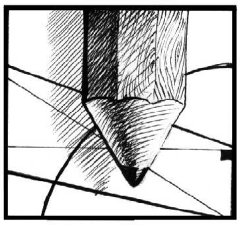
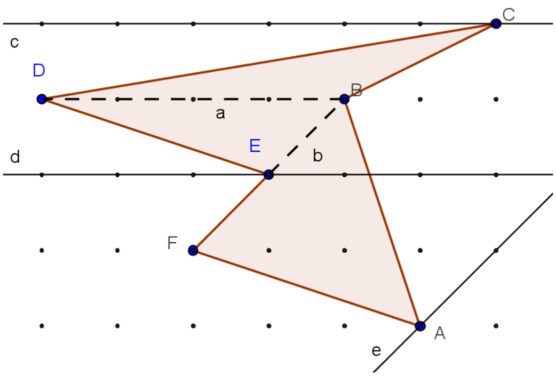


Lisäys monikulmion pinta-alan laskemiseen

Hannu Korhonen
Lehtori emeritus, Orimattila

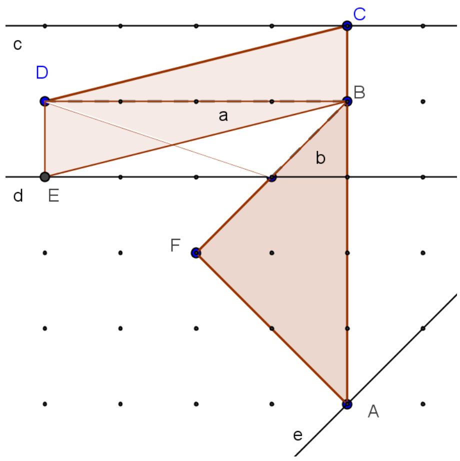
Mika Koskenojan kirjoitukset monikulmion pinta-alasta Solmun numeroissa 1/2009 ja 3/2009 herättivät huomaamaan matematiikan hienouden. Yksinkertaiselle tehtävälle on monen monia ratkaisuja. Ensi katsannolta ei ole aina aivan selvää, mikä niistä sopisi opetuksessa esitettäväksi.

Tehtävän ratkaiseminen on useimmille oppilaille ad hoc -tilanne. Pyrkimyksenä on useimmiten vain yksittäisen tehtävän ainutkertainen ratkaiseminen. Opettajan työ alkaa jo tehtävän valinnasta, sillä tehtävä voi antaa oppilaalle paljon yksityiskohtiaan enemmän. Keskeiseksi valintaperusteeksi nousee ratkaisun merkitys oppilaalle: onko se helppo ymmärtää, harjoitellaanko siinä jo opittua, opitaanko siinä jokin uusi asia tai idea, jota voidaan soveltaa myöhemmin, antaako se uusia näkökulmia aikaisemmin opittuun tai uusia yhteyksiä aikaisemmin opittujen asioiden välille jne.



Kuva 1: Kuusikulmion jako kolmioiksi ja apusuorat.

Koskenojan ensimmäisen artikkelin ratkaisut ja samoin hänen tehtävänsä edustavat perinteistä laskennollista geometriaa. Numerossa 1/2009 esiintyneen kuusikulmion pinta-ala voidaan laskea myös seuraavasti. Ratkaisun dynaaminen näkökulma palauttaa mieleen ja antaa mahdollisuuden käyttää monia keskeisiä geometrian totuuksia (määritelmiä, lauseita ja laskusääntöjä).



Kuva 2: Kuusikulmion osien muuntaminen helposti laskettaviksi.

Jaetaan kuusikulmio (kuva 1) kolmeksi kolmioksi janoilla a ja b. Piirretään näiden janojen suuntaiset apusuorat $c, d \parallel a$ ja $e \parallel b$. Siirretään pistettä C ylimmän kolmion kannan suuntaista suoraa c pitkin (kuva 2). Kolmion korkeus ei muutu eikä siis sen pinta-alakaan, koska yhdensuuntaisten suorien yhdensuuntaiset välijanat ovat yhtä pitkät. Vastaavasti siirretään pistettä E. Kolmiot muodostavat suunnikkaan, jonka kanta $= 1$ ja korkeus 4, pinta-ala siis 4 (p.a.y).

Siirretään pistettä A alimmaisen kolmion kannan BF suuntaista suoraa e pitkin niin, että saadaan suorakulmainen kolmio. Sen pinta-ala $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 = 4$ (p.a.y) on sama kuin alkuperäisen kolmion ABF. Kuusikulmion pinta-ala on siis $4 + 4 = 8$ (p.a.y).

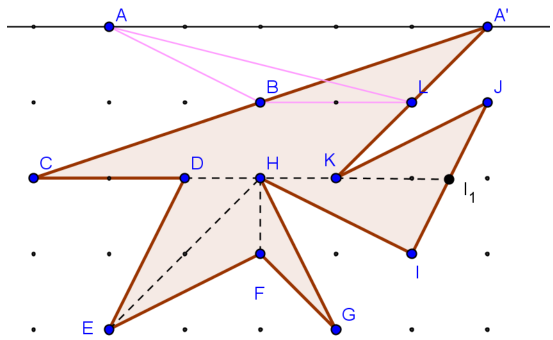
Ad hoc -ratkaisun ongelma on yleisyyden puute, mutta toisaalta ratkaisu voi olla hyvin yksinkertainen. Numerossa 3/2009 tehtäväksi annetun 12-kulmion pinta-ala saadaan siirtämällä vain yhtä pistettä A (kuva 3). Monikulmio on sitten ositettu kolmioiksi niin, että kaikkien kolmioiden kannat ovat akselien suuntaiset. Pinta-ala on

$$\frac{1}{2} \cdot (4 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 2\tfrac{1}{2} \cdot 1 + 1\tfrac{1}{2} \cdot 1) = \frac{1}{2} \cdot 17 = 8\tfrac{1}{2},$$

missä kolmiot kiertävät ylimmästä isosta kolmiosta lähtien vastapäivään.

Vieläkin alkeellisempi ratkaisu on. Ei ole tarpeen siirtää yhtään pistettä. Kaksitoistakulmio on jaettavissa akselien suuntaisilla janoilla yhdeksi neliöksi ja kahdeksaksi kolmioksi!

Siinäpä miettimistä opettajalle, minkä näistä ratkaisuista ottaisi oppilaidensa kanssa pohdittavaksi. (Jotta kenellekään ei tulisi sellaista mielikuvaa, että matematiikassa on vain yksi tai edes ensisijaisesti jokin muita parempi ratkaisu, jonka paremmuuden joku viisas auktoriteetti aina tietää, sanon, että mielestäni kaikki ratkaisut ansaitsevat tulla oppilaiden kanssa käsitellyiksi, tosin eri syistä ja eri vaiheessa opetusta, kaksitoistakulmion alkeellinen ratkaisu jo perusopetuksen alaluokilla.) Useinkaan ei siis ole tärkeää se, mitä opetetaan, vaan miten opetetaan. Koskenoja on tärkeän asian äärellä. Vaikka hänen lähtökohtansa ei ehkä olekaan opetuksen suunnittelu, niin artikkeleillaan hän tulee korostaneeksi sitä, että yksinkertaisestakin lähtökohdasta opettaja saa pientä vaivaa nähden rakennetuksi mitä monipuolisimpia opetustilanteita.



Kuva 3: Kaksitoistakulmion pinta-ala kolmioiksi jakamalla ja yhtä pistettä siirtämällä.