

## Lukion matematiikkakilpailun alkukilpailun tehtävät ja ratkaisut 2009

Matemaattisten aineiden opettajien liiton lukion matematiikkakilpailu on kaksiportainen. Kilpailun ensimmäinen kierros on kolmisarjainen, ja sarjojen osallistumisoikeuden määrittelee kilpailijan ikä. Lukuvuoden 2009–10 kilpailun ensimmäinen kierros pidettiin 29. lokakuuta 2009.

Kilpailutehtävät olivat tällaiset:

### Perussarja

1. Marjoja myytiin rasioissa, jotka oli hinnoiteltu marjatyypin mukaan. 2 rasiaa vadelmia, 2 rasiaa herukoita ja 1 rasia mustikoita maksoi yhteensä 8 euroa, 1 rasia vadelmia, 3 rasiaa herukoita ja 1 rasia mustikoita maksoi 7,5 euroa ja annos, jossa oli 2 rasiaa vadelmia ja 3 rasiaa mustikoita, maksoi 7 euroa. Kuinka paljon maksoi yhteensä 3 rasiaa vadelmia, 2 rasiaa herukoita ja 3 rasiaa mustikoita?

2. Täydennä alla oleva ruudukko niin, että siinä esiintyvät kaikki luvut  $1, 2, \dots, 16$  jokaisen vaaka- ja pystyrivin lukujen summa on sama. Etsi kaikki eri tavat täydentää ruudukko.

4			
9			8
7	2	10	

3. Neliöpohjaisen laatikon pohjalle sijoitetaan kaksi ympyränmuotoista kiekkoa. Kiekkojen säde on  $r$ . Mikä on pienin mahdollinen laatikon sivu  $a$ ?

4. Määritä kaikki tavat lausua 2009 kahden positiivisen kokonaisluvun neliöiden (eli toisten potenssien) erotuksena.

### Välisarja

1. Sama tehtävä kuin perussarjan tehtävä 2.

2. Tasakylkisen kolmion korkeusjana halkaisijana piirretään ympyrä. Mihin suhteeseen sen kehä jakaa leikkaamansa sivut, kun kolmion kanta ja korkeus ovat yhtä suuret?

3. Viisi tasavahvaa pelaajaa pelaa keskenään yksinkertaisen sarjan pelejä, jotka päättyvät jommankumman pelaajan voittoon ja joissa molempien voittotodennäköisyys on  $\frac{1}{2}$ . Pelit ovat keskenään toisistaan riippumattomia. Mikä on todennäköisyys, että kukin voittaa kaksi peliä?

4. Määritä kaikki tavat lausua 2009 kahden positiivisen kokonaisluvun kuutioiden (eli kolmansien potenssien) erotuksena.

### Avoin sarja

1. Suorakulmaisen kolmion kateetit ovat 10 ja 24. Suuremmalla kateetilla oleva piste keskipisteenä piirretään

ympyräviiva, joka sivuaa toista kateettia ja hypotenuusaa. Laske ympyrän säde.

**2.** Kolmion sivujen pituudet muodostavat geometrisen jonon, jonka suhde on  $q$ . Osoita, että  $\sqrt{5} - 1 < 2q < \sqrt{5} + 1$ .

**3.** Sama kuin välisarjan tehtävä 4.

**4.** Osoita, että 10 suomalaista voi soittaa 10 ruotsalaiselle 30 puhelua niin, että

1) kukaan ei soita kellekään kahdesti ja

2) mitkään kaksi suomalaista eivät soita keillekään kahdelle ruotsalaiselle kaikkia mahdollista neljää puhelua.

## Tehtävien ratkaisut

Useimpiin tehtäviin löytyy useita ratkaisutapoja ja niiden muunnelmia.

**Perussarja 1.** Olkoot  $v$ ,  $h$  ja  $m$  vadelmien, herukoiden ja mustikoiden rasiahinnat euroina. Tehtävän ehdot voidaan kirjoittaa yhtälöryhmäksi

$$\begin{cases} 2v + 2h + m = 8 \\ v + 3h + m = 7,5 \\ 2v + 3m = 7 \end{cases}$$

Kun yhtälöt lasketaan puolittain yhteen, saadaan  $5(v + h + m) = 22,5$  eli  $v + h + m = 4,5$ . Tästä ja toisesta yhtälöstä saadaan  $2h = 7,5 - (v + h + m) = 7,5 - 4,5 = 3$ , joten  $h = 1,5$ . Toisesta yhtälöstä saadaan nyt  $3v + 2h + 3m = 3(v + h + m) - h = 3 \cdot 4,5 - 1,5 = 12$ .

**Perussarja ja välisarja 2.** Ruudukon lukujen summa on

$$1 + 2 + \dots + 16 = \frac{16 \cdot 17}{2} = 8 \cdot 17 = 4 \cdot 34,$$

joten kunkin vaakarivin ja pystysarakkeen lukujen summa on 34. Vasemman sarakkeen alimpaan ruutuun tulee siis luku 14 ja kolmannen rivin neljänteen ruutuun 15. Oikeanpuoleisen sarakkeen kahden tyhjän ruudun lukujen summa on 11. Lukuparit, joiden osien summa on 11, ovat (1, 10), (2, 9), (3, 8), (4, 7) ja (5, 6). Kaikkien muiden paitsi viimeisen parin luvuista ainakin toinen on jo käytetty. Jää siis selvitettäväksi kaksi mahdollisuutta: 5 on oikean sarakkeen ylin ja 6 alin luku tai 6 ylin ja 5 alin. Jos 5 on ruudukon oikeassa yläkulmassa, ylimmän rivin keskimmäisten lukujen summa on 25, ja luvut löytyvät pareista (9, 16), (10, 15), (11, 14) tai (12, 13). Jälleen vain luettelon viimeinen pari on mahdollinen. Luku 16 ei voi olla alimmassa rivissä, koska  $14 + 16 + 6 > 34$ . 16 on siis toisessa rivissä. 16 ei voi olla kolmannessa sarakeessa, koska  $12 + 16 + 10 > 34$ . Luku 16 on siis toisen rivin toisessa ruudussa. Silloin 1 on saman rivin kolmannessa ruudussa, joten alarivissä

keskimmäisissä ruuduissa ovat 2 ja 11. 12 ei voi olla ylärivin toisessa ruudussa, koska tällöin toisen sarakkeen lukujen summa olisi pariton. Ylärivissä on siis oltava järjestyksessä luvut 4, 13, 12 ja 5, ja kun alarivi on 14, 3, 11, 6, tehtävän ehto täyttyy. Yksi mahdollinen järjestys on siis

4	13	12	5
9	16	1	8
7	2	10	15
14	3	11	6

Toinen mahdollisuus on, että ruudukon oikeassa yläkulmassa on 6 ja oikeassa alakulmassa 5. Samoin kuin edellä päätellään, että ylärivin keskimmäisissä ruuduissa on oltava 13 ja 11, että luvun 16 on oltava toisen rivin toisessa ruudussa ja luvun 1 toisen rivin kolmannessa ruudussa, että luvun 12 on oltava alarivin kolmannessa ruudussa; tämän jälkeen lukujen 11, 13 ja 3 paikat määräytyvät, ja ruudukko on

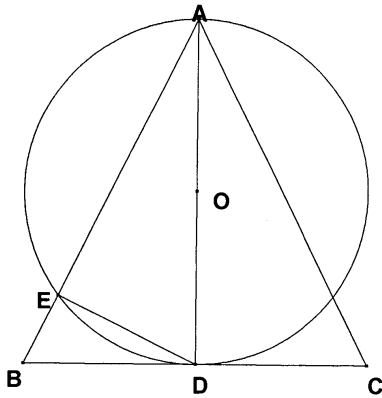
4	13	11	6
9	16	1	8
7	2	10	15
14	3	12	5

**Perussarja 3.** Kiekot voidaan aina asettaa kiinni toisiinsa. Voidaan siis rajoittaa tutkimaan tapausta, jossa kiekot sivuavat toisiaan. Jos kiekkojen keskipisteitä yhdistävä suora muodostaa kulman  $\alpha$  toisen neliön sivun, sanokaamme vaakasivun kanssa, niin pystysivujen etäisyyden on oltava ainakin  $r + 2r \cos \alpha + r = 2r(1 + \cos \alpha)$  ja vaakasivujen etäisyyden on oltava ainakin  $r + 2r \sin \alpha + r = 2r(1 + \sin \alpha)$ . Laatikon sivun on oltava suurempi luvuista  $2r(1 + \cos \alpha)$ ,  $2r(1 + \sin \alpha)$ . Kun  $\alpha = 45^\circ$ , molemmat luvut ovat  $2r(1 + \sqrt{2}/2)$ . Kun  $\alpha < 45^\circ$ , niin  $\cos \alpha > \cos 45^\circ$  ja kun  $\alpha > 45^\circ$ , niin  $\sin \alpha > \sin 45^\circ$ . Etäisyyksistä suurempi on siis pienin mahdollinen, kun  $\alpha = 45^\circ$ , joten pienin mahdollinen  $a$  on  $2r(1 + \sqrt{2}/2)$ .

**Perussarja 4.** Etsitään positiivisia kokonaislukuja  $x$  ja  $y$ , joille  $2009 = x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$ . Lukujen  $x + y$  ja  $x - y$  on oltava luvun 2009 tekijöitä. Mutta  $2009 = 7 \cdot 287 = 7^2 \cdot 41$ , ja koska  $x + y > x - y$ , on  $x$ :n ja  $y$ :n toteutettava jokin seuraavista yhtälöpareista:

$$\begin{cases} x + y = 2009 \\ x - y = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x + y = 287 \\ x - y = 7 \end{cases}, \quad \begin{cases} x + y = 49 \\ x - y = 41 \end{cases}.$$

Yhtälöparien ratkaisuksi saadaan helposti  $(x, y) = (1005, 1004)$ ,  $(147, 140)$  ja  $(45, 4)$ .



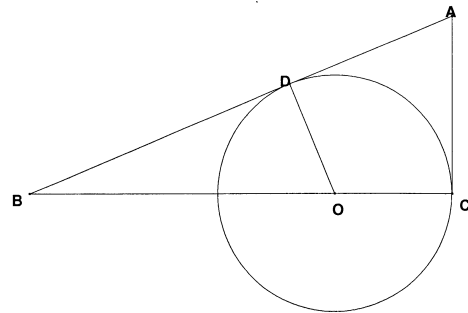
**Välisarja 2.** Olkoon kolmio  $ABC$  tasakylkinen, olkoot  $BC = 2r$  ja  $AD = 2r$  kolmion korkeusjana. Olkoon  $O$   $AD$ :n keskipiste ja leikatkaa  $O$ -keskinen  $r$ -säteinen ympyrä sivun  $AB$  pisteessä  $E$ . Valitaan mittayksikkö niin, että  $EB = 1$ . Olkoon  $AE = x$ . Thaleen lauseen perusteella  $\angle AED = 90^\circ$ , joten  $DE = h$  on kolmion  $ABD$  korkeusjana. Suorakulmaisen kolmion tunnetun ominaisuuden (tai yhdenmuotoisten suorakulmaisten kolmioiden  $AED$  ja  $DEB$  perusteella) tiedetään, että  $h^2 = AE \cdot EB = x$ . Suorakulmaisesta kolmiosta  $BDE$  nähdään, että  $x = h^2 = r^2 - 1$  eli  $r^2 = 1 + x$ . Suorakulmaisesta kolmiosta  $AED$  puolestaan saadaan  $x^2 + h^2 = 4r^2$ . Siis  $x^2 + x = 4(x + 1)$  eli  $x^2 - 3x - 4 = 0$ . Tämän toisen asteen yhtälön ainoa positiivinen ratkaisu on  $x = 4$ . Jakosuhte on siis  $4 : 1$ .

**Välisarja 3.** Kukin pelaaja pelaa neljä peliä ja peliä on yhteensä  $\binom{5}{2} = 10$ . Olkoon  $P_1$  yksi pelaajista. Todennäköisyys, että  $P_1$  voittaa tasan kaksi peliä, on  $\binom{4}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$ . Oletamme, että  $P_1$  voittaa  $P_2$ :n ja  $P_3$ :n ja että  $P_2$  voittaa  $P_3$ :n ja että  $P_1$  häviää pelaajille  $P_4$  ja  $P_5$  ja että  $P_4$  voittaa  $P_5$ :n. On käsitelty kuusi peliä. Loppujen neljän pelin on kaikkien päädyttävä määrättyyn lopputulokseen: Kaksi peliä hävinneen  $P_3$ :n on voitettava  $P_4$  ja  $P_5$ , tämän jälkeen kaksi peliä hävinneen  $P_5$ :n on voitettava  $P_2$  ja kaksi peliä hävinneen  $P_2$ :n on voitettava  $P_4$ . Todennäköisyys, että nämä neljä peliä päättyisivät juuri näin on  $\frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$ . Todennäköisyys, että jokainen pelaaja voittaisi juuri kaksi peliä on siten  $\frac{3}{8} \cdot \frac{1}{16} = \frac{3}{128}$ .

**Välisarja 4 ja avoin sarja 3.** Koska ratkaistavana on yhtälö  $2009 = x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$  ja  $2009 = 7^2 \cdot 41 = 7 \cdot 287$ , kokonaislukujen  $x$  ja  $y$ ,  $x > y$ , on toteutettava jokin yhtälöpareista

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x^2 + xy + y^2 = 2009 \end{cases}, \quad \begin{cases} x - y = 7 \\ x^2 + xy + y^2 = 287 \end{cases}, \quad \begin{cases} x - y = 41 \\ x^2 + xy + y^2 = 49 \end{cases}.$$

Ensimmäinen pari johtaa yhtälöön  $x^2 + x(x - 1) + (x - 1)^2 = 2009$  eli  $3x^2 - 3x = 2008$ . Koska 2008 ei ole jaollinen kolmella, yhtälö ei toteudu millään kokonaisluvulla  $x$ . Vastaavasti toinen yhtälöpari johtaa yhtälöön  $x^2 + x(x - 7) + (x - 7)^2 = 287$  eli  $3x^2 - 21x + 49 = 7 \cdot 41$ . Siis  $x^2$  on jaollinen 7:llä. Mutta silloin  $x$  on jaollinen 49:llä samoin kuin  $21x$ :kin. Yhtälön oikea puoli ei ole jaollinen 49:llä, joten yhtälöllä ei ole kokonaislukuratkaisua. Jos viimeisellä yhtälöparilla olisi ratkaisu, jossa  $x$  on positiivinen kokonaisluku, niin  $x \geq 41$  ja  $x^2 + xy + y^2 \geq 41^2 > 49$ . Ratkaisua ei siis ole. Tehtävässä kysytyjä tapoja kirjoittaa luku 2009 ei siis ole olemassa.



**Avoin sarja 1.** Olkoon suorakulmaisessa kolmiossa  $ABC$   $C$  suoran kulman kärki ja  $AC = 10$ ,  $BC = 24$ . Silloin  $AB^2 = 4 \cdot (5^2 + 12^2) = 4 \cdot 169 = 26^2$ , joten  $AB = 26$ . Olkoon  $O$  sivun  $BC$  piste ja sivutetaan  $r$ -säteinen  $O$ -keskinen ympyrä  $\Gamma$   $AC$ :tä ja  $AB$ :tä. Koska  $BC \perp AC$ ,  $\Gamma$  sivuaa  $AC$ :tä pisteessä  $C$ . Olkoon  $D$   $\Gamma$ :n ja  $AB$ :n yhteinen piste. Silloin  $OD \perp AB$ . Tangenttien leikkauspisteen ja sivuamispisteiden väliset jannot ovat yhtä pitkät, joten  $AD = AC = 10$ . Siis  $BD = 26 - 10 = 16$ . Suorakulmaiset kolmiot  $ABC$  ja  $BOD$  ovat yhdenmuotoiset. Siis  $\frac{r}{BD} = \frac{AC}{BC} = \frac{5}{12}$  ja  $r = \frac{16 \cdot 5}{12} = \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}$ .

**Avoin sarja 2.** Kolmion sivut ovat  $a$ ,  $qa$  ja  $q^2a$ . Oletetaan ensin, että  $q \geq 1$ . Kolmion pisin sivu on lyhempi kuin kahden muun summa. Siis  $aq^2 < a + aq$  eli  $q^2 - q - 1 < 0$ . Epäyhtälössä on yhtälö, kun  $q = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$ , joten epäyhtälö on voimassa, vain kun  $1 \leq q < \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ . Siis  $2 \leq 2q < 1 + \sqrt{5}$ . Oletetaan sitten, että  $0 < q < 1$ . Nyt  $a$  on kolmion pisin sivu, joten  $a < aq + aq^2$  eli  $q^2 + q - 1 > 0$ . Epäyhtälössä on yhtälö, kun  $q = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{5})$ , joten epäyhtälö on voimassa vain kun  $\frac{1}{2}(-1 + \sqrt{5}) < q < 1$  eli  $-1 + \sqrt{5} < 2q < 2$ . Luku  $q$  toteuttaa siis tehtävässä ilmoitetun kaksoisepäyhtälön.

**Avoin sarja 4.** Riittää, että kuvailee jonkin tavan järjestää soitot niin, että tehtävän ehto toteutuu. Olkoon suomalaiset  $S_0, S_2, \dots, S_9$  ja ruotsalaiset  $R_0, R_1, \dots, R_{10}$ . Soittakoon suomalainen  $S_i$  ruotsalaisille  $R_i, R_{i+1}$  ja  $R_{i+3}$ , missä indeksit luetaan mod 10. Puheluja on

$3 \cdot 10 = 30$ , eikä kukaan suomalainen soita kellekään ruotsalaiselle kahdesti, joten ehto 1) täyttyy. Ehdon 2) voimassaolon todistamiseksi riittää, kun tarkastellaan kaaviota, johon on merkitty kaikki puhelut:

	$S_0$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$S_5$	$S_6$	$S_7$	$S_8$	$S_9$
$R_0$	$x$	$x$		$x$						
$R_1$		$x$	$x$		$x$					
$R_2$			$x$	$x$		$x$				
$R_3$				$x$	$x$		$x$			
$R_4$					$x$	$x$		$x$		
$R_5$						$x$	$x$		$x$	
$R_6$							$x$	$x$		$x$
$R_7$	$x$							$x$	$x$	
$R_8$		$x$							$x$	$x$
$R_9$	$x$		$x$							$x$

Jos jotkin kaksi suomalaista  $S_i$  ja  $S_k$  soittaisivat kahdelle ruotsalaiselle  $R_m$  ja  $R_n$  kaikki neljä mahdollista puhelua, kaaviossa olisi rivien  $m$  ja  $n$  sekä sarakkeiden  $i$  ja  $k$  määrittämän suorakaiteen kaikissa kärjissä  $x$ . Kaaviota riveittäin tarkastamalla näkee kuitenkin, että siinä ei ole yhtään sellaista suorakaidetta, jonka kaikissa kärjissä olisi  $x$ .

Lehdessä Tiedetoimittaja 4/08 kerrotaan, mitä professori Phillipp Slusallek, Saksan tekoälyn tutkimuskeskuksen tiedejohtaja ja tietokonegrafiiikan professori Saarlandin yliopistossa ajattelee alan opiskelijoista ja heidän menestyksensä yhteydestä menestykseen matematiikan opinnoissa. ”Slusallekin mukaan uusia opiskelijoita riittää. Ongelma vain on se, että toisena vuonna ainoastaan osa jatkaa alan opiskelua. Olemme huomanneet, että hyvä menestys matematiikan opinnoissa kertoo hyvästä menestyksestä tietojenkäsittelytieteen opinnoissa, Slusallek sanoo. Esimerkiksi taitava tietokoneiden kanssa näprääjä ei välttämättä ole hyvä alan teorian opiskelija. Matemaattisesti lahjakkaiden opiskelijanuorukaisten lisäksi Slusallek kaipaa alalle enemmän nuoria naisopiskelijoita. Tuntuu kuin menettäisimme kokonaan puolet ikäluokasta, Slusallek valitti.”