

Kontraharmonisesta keskiarvosta ja Pythagoraan luvuista

Erilaisia lukujen keskiarvoja on useita – tunnetuimmat ovat tavallinen eli *aritmeettinen keskiarvo* ja keskiverto eli *geometrinen keskiarvo*. Keskiarvoja tunsivat jo vanhalla ajalla *pythagoralaisien* koulukunta, Pythagoras ja hänen seuraajansa.

Pythagoraan kerrotaan omaksuneen Babyloniasta noiden kahden edellä mainitun lisäksi myös kahden luvun a ja b *harmonisen keskiarvon* $2ab : (a + b)$. Näitä kolmea keskiarvoa kutsuu saksalainen, Saarbrückenissä toimiva matematiikan historian tutkija Hischer [4] klassisiksi *babylonialaisiksi keskiarvoiksi*. Niiden lisäksi on pääteltävissä pythagoralaisilla olleen peräti seitsemän muuta kahden luvun keskiarvoa, mainitsee Hischer [4] nojautuen Cantorin [2] ja Boyerin [1] historiateoksiin. Pythagoralaisien *suhdeopissa* kuvataan ([1], [2], [4]) a :n ja b :n erilaiset keskiarvot m seuraavaan tapaan verrannoilla, esimerkkeinä geometrinen, harmoninen ja *kontraharmoninen keskiarvo*:

$$\frac{m-a}{b-m} = \frac{a}{m} \quad (\text{geometrinen keskiarvo})$$

$$\frac{m-a}{b-m} = \frac{a}{b} \quad (\text{harmoninen keskiarvo})$$

$$\frac{m-a}{b-m} = \frac{b}{a} \quad (\text{kontraharmoninen keskiarvo})$$

Kontraharmonisen keskiarvon lausekkeeksi saadaan verrannosta ratkaisemalla

$$m = \frac{a^2 + b^2}{a + b}.$$

Tämän mallin mukaan voidaan määritellä myös useamman positiivisen luvun $a_1, \dots, a_n$ kontraharmoninen keskiarvo osamääränä

$$C(a_1, \dots, a_n) = \frac{a_1^2 + \dots + a_n^2}{a_1 + \dots + a_n}.$$

Kontraharmonisen keskiarvon nimi (toisinaan *antiharmoninen keskiarvo*) johtunee siitä, että sen ja harmonisen keskiarvon pythagoralaisissa määrittelevissä verrannoissa ovat oikeat puolet päinvastaiset, toistensa käänteisarvot. Nimi esiintyy jo klassisessa d'Alembertin ja Diderot'n ensyklopediassa [3] (*contre-harmonique*: ilmaistaan lukujen a , m ja b olevan *kontraharmonisessa suhteessa*).

Vertailuja

Kahden positiivisen luvun kontraharmoninen keskiarvo on aina pienemmän ja suuremman luvun välissä. Tämä nähdään seuraavasti (oletetaan $a \leq b$):

$$a = \frac{a^2 + ab}{a + b} \leq \frac{a^2 + b^2}{a + b} \leq \frac{ab + b^2}{a + b} = b.$$

Jos verrataan positiivilukujen kontraharmonisen ja harmonisen keskiarvon suuruutta, todetaan niiden erotus

$$\frac{a^2 + b^2}{a + b} - \frac{2ab}{a + b} = \frac{(a - b)^2}{a + b}$$

aina epänegatiiviseksi, joten kontraharmoninen keskiarvo on vähintään yhtäsuuri kuin harmoninen. Kontraharmoninen keskiarvo onkin hyvin “suuri keskiarvo”, vähintään yhtäsuuri kuin suurin babylonialaisista keskiarvoista eli aritmeettinen keskiarvo ja jopa ainakin *neliöllisen keskiarvon* $\sqrt{(a^2 + b^2) : 2}$ suuruinen. Väittämien todenperäisyys käy ilmi identiteeteistä

$$\frac{a^2 + b^2}{a + b} - \frac{a + b}{2} = \frac{(a - b)^2}{2(a + b)}, \quad \left(\frac{a^2 + b^2}{a + b} \right)^2 - \left(\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \right)^2 = \frac{(a^2 + b^2)(a - b)^2}{2(a + b)^2}.$$

Kokonaislukuiset kontraharmoniset keskiarvot

Kahden positiivisen kokonaisluvun u ja v kontraharmoninen keskiarvo

$$(1) \quad c = C(u, v) = \frac{u^2 + v^2}{u + v}$$

voi sekin olla kokonaisluku, esimerkiksi luvuilla 2 ja 6 se on 5, mutta niin ikään luvuilla 3 ja 6:

$$\frac{2^2 + 6^2}{2 + 6} = \frac{40}{8} = 5 = \frac{45}{9} = \frac{3^2 + 6^2}{3 + 6}$$

Seuraavassa taulukossa on lisää esimerkkejä:

u	2	3	3	4	4	5	5	6	6	6	6	7	7	8	8	8	9	9	9
v	6	6	15	12	28	20	45	12	18	30	66	42	91	24	56	120	18	45	72
c	5	5	13	10	25	17	41	10	15	26	61	37	85	20	50	113	15	39	65

Kahden yhtäsuuren kokonaisluvun kontraharmoninen keskiarvo on tietysti kokonaisluku, mitä tapausta nimitän *triviaaliksi*. Tutkiessani ei-triviaaleja mahdollisuuksia tein kiinnostavia havaintoja, joita kirjaan seuraaviin lauseisiin. Niissä ovat u , v ja c aina positiivisia kokonaislukuja.

Lause 1. Jokaista kokonaislukua $u > 2$ kohden on olemassa ainakin kaksi suurempaa arvoa v siten, että $C(u, v)$ on kokonaisluku.

Todistus. Arvot $v = (u - 1)u$ ja $v = (2u - 1)u$ kelpaavat aina identiteettien

$$(2) \quad \frac{u^2 + ((u - 1)u)^2}{u + ((u - 1)u)} = u^2 - 2u + 2, \quad \frac{u^2 + ((2u - 1)u)^2}{u + ((2u - 1)u)} = 2u^2 - 2u + 1$$

perusteella, ja identiteettien oikeat puolet ovat erisuuret aina, kun $u \neq 1$. Arvo $u = 2$ on poikkeus, sillä suuremmista luvuista vain 6:n ja sen kontraharmoninen keskiarvo on kokonaisluku.

Yhtälöiden (2) antama v :n arvo on aina u :n monikerta, mutta kahden kokonaisluvun kontraharmoninen keskiarvo voi olla kokonaisluku muulloinkin; esim. tapauksessa $C(10, 15) = 13$. Aina on kuitenkin voimassa

Lause 2. Jos kokonaislukujen u ja v kontraharmoninen keskiarvo on kokonaisluku, niin luvuilla on yhteisiä tekijöitä.

Todistus. Olettakaamme positiiviset kokonaisluvut u ja v , joiden suurin yhteinen tekijä (syt) on vain 1. Nyt on oltava myös $\text{sy}(u+v, uv) = 1$, koska muutoin olisivat $u+v$ ja uv jaollisia jollain alkuluvulla p , ja niin myös ainakin toinen tulon uv tekijöistä. Silloin $u+v$:n jaollisuudesta p :llä seuraisi sekä u :n että v :n jaollisuus p :llä, joten u :n ja v :n suurin yhteinen tekijä olisikin vähintään p , vastoin oletustamme. Niinpä on voimassa

$$(3) \quad \text{sy}(u+v, uv) = 1.$$

Oletamme nyt lisäksi, että kontraharmoninen keskiarvo $C(u, v)$ on kokonaisluku eli että

$$u^2 + v^2 = (u+v)^2 - 2uv$$

on jaollinen $u+v$:llä. Siitä päätellään myös $2uv$:n olevan tällä summalla jaollinen, mutta (3):n nojalla on vain tulon ensimmäinen tekijä 2 jaollinen summalla $u+v$, jonka arvo on vähintään 2. Sen perusteella on vain mahdollisuus $u=v=1$. Johtopäätöksenä on siis, että vain "kaikkein triviaalein" tapaus $u=v=1$ mahdollistaa todistuksen lähtöoletuksen $\text{sy}(u, v) = 1$.

Lause 3. Jos u on pariton alkuluku ja $C(u, v)$ on kokonaisluku, niin välttämättä on

$$(4) \quad \text{joko } v = (u-1)u \text{ tai } v = (2u-1)u.$$

Todistus. Olkoon u positiivinen pariton alkuluku. Lauseen v :n arvot (4) käyvät kaavojen (2) mukaan aina. Mitä tulee mahdollisiin muihin v :n arvoihin, niiden täytyy lauseen 2 nojalla olla alkuluvun u monikertoja: $v = nu$ (n on kokonaisluku). Tällöin on

$$c = \frac{u^2 + v^2}{u+v} = \frac{(n^2 + 1)u}{n+1}$$

siis kokonaisluku, joten on kaksi mahdollisuutta $u \mid n+1$ ja $n+1 \mid n^2 + 1$.

Edellisessä tapauksessa $n+1 = ku$ saadaan

$$c = \frac{(n^2 + 1)u}{n+1} = \frac{(k^2 u^2 - 2ku + 2)u}{ku} = ku^2 - 2u + \frac{2}{k},$$

joka on kokonaisluku vain k :n arvoilla 1 ja 2, vastaten siis arvoja (4).

Jälkimmäisessä tapauksessa on olemassa positiivinen alkuluku p , joka jakaa sekä $n+1$:n että $n^2 + 1$:n, muttei n :ää. Siitä seuraa yhtälön $n^2 + 1 = (n+1)^2 - 2n$ perusteella, että $p \mid 2n$ ja siis välttämättä $p = 2$. Mikäli olisi lisäksi

$$4 \mid n+1 \text{ ja } 4 \mid n^2 + 1,$$

niin voitaisiin kirjoittaa $n+1 = 4m$, josta seuraisi mahdottomuus

$$n^2 + 1 = (4m-1)^2 + 1 = 16m^2 - 8m + 2 \equiv 2 \pmod{4}.$$

Siis on oltava $\text{sy}(n+1, n^2 + 1) = 2$. Mutta koska on toisaalta $n+1 \geq 3$ ja $n+1 \mid n^2 + 1$, niin $\text{sy}(n+1, n^2 + 1) \geq 3$. Syntynyt ristiriita osoittaa, ettei jälkimmäinen tapaus voi esiintyä.

Lause 4. Jos (u_1, v, c) on yhtälön (1) ei-triviaali ratkaisu, jossa $u_1 < c < v$, niin on aina olemassa toinenkin ei-triviaali ratkaisu (u_2, v, c) , missä $u_2 < c$. Sitä vastoin ei yksi ratkaisu (u, v_1, c) , jossa $u < c < v_1$, salli koskaan toista ratkaisua (u, v_2, c) .

Todistus. 1°. Yhtälö (1) voidaan kirjoittaa muotoon

$$(4) \quad u^2 - cu + (v^2 - cv) = 0,$$

josta saadaan juuret

$$(5) \quad u = \frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4(v^2 - cv)}}{2},$$

jolloin (4):n diskriminantti on epänegatiivinen reaalijuuren u_1 olemassaolon vuoksi. Jos se olisikin nolla eli jos olisi voimassa yhtälö $4v^2 - 4cv - c^2 = 0$, tästä seuraisi v :lle irrationaalinen arvo $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{2})c$. Niinpä diskriminantti on positiivinen, ja miinusvaihtoehdolla saatava (4):n pienempi juuri voidaan laventaa muotoon

$$\frac{c - \sqrt{c^2 - 4v^2 + 4cv}}{2} = \frac{c^2 - (c^2 - 4v^2 + 4cv)}{2(c + \sqrt{c^2 - 4v^2 + 4cv})} = \frac{2(v - c)v}{c + \sqrt{c^2 - 4v^2 + 4cv}},$$

jossa osoittajakin on positiivinen. Yhtälöllä on siis aina kaksi erisuurta positiivijuurta u . Koska toinen juuri (u_1) on kokonaisluku, on toisenkin oltava, sillä kokonaislukujen summa ja erotus (5):n oikean puolen osoittajassa ovat kumpikin yhtäaikaaisesti parillisia lukuja. Näin on päätelty u_2 :n olemassaolo.

2°. Ratkaistaessa (1) vastaavasti suureen v suhteen todetaan pienempi juuri

$$\frac{c - \sqrt{c^2 - 4u^2 + 4cu}}{2} = \frac{2(u - c)u}{c + \sqrt{c^2 - 4u^2 + 4cu}}$$

negatiivisen osoittajan tähden negatiiviseksi, joten positiivista v_2 :ta ei ole eikä yhtälöllä (1) ole kuin yksi ei-triviaali ratkaisu.

Kokonaislukuisilla kontraharmonisilla keskiarvoilla on yllättävä yhteys *Pythagoraan lukuihin* eli kokonaislukuisiin lukukolmikoihin, jotka voivat esiintyä suorakulmaisen kolmion sivujen pituuksina:

Lause 5. Kukin kahden erisuuren kokonaisluvun kokonaislukuinen kontraharmoninen keskiarvo on jonkin Pythagoraan lukukolmikon hypotenuusan pituus ja kääntäen.

Todistus. 1°. Olkoon (a, b, c) mielivaltainen Pythagoraan lukukolmikko, siis ehdon $a^2 + b^2 = c^2$ täyttävä kolmen positiivisen kokonaisluvun yhdelmä. Pythagoraan kolmikkoa sanotaan *primitiiviseksi*, jos sen lukujen suurin yhteinen tekijä on 1. Jos kolmikko on primitiivinen, niin toinen luvuista a ja b on parillinen sekä toinen ja c on parittomia; jos kolmikko ei ole primitiivinen, niin tilanne on samoin taikka kaikki kolme lukua ovat parillisia (ks. [6] 40-§). Tarkastelkaamme positiivisia rationaalilukuja

$$u := \frac{c + b + a}{2}, \quad v := \frac{c + b - a}{2}.$$

Koska osoittajat $c + b \pm a$ ovat äskeisen nojalla aina parillisia, niin u ja v ovat kokonaislukuja. Havaitsemme oikeaksi myös ehdon $u + v = c + b$. Laskelmasta

$$\begin{aligned} u^2 + v^2 &= \frac{c^2 + b^2 + a^2 + 2ab + 2bc + 2ca + c^2 + b^2 + a^2 - 2ab + 2bc - 2ca}{4} = \\ &= \frac{2c^2 + 2(a^2 + b^2) + 4bc}{4} = \frac{4c^2 + 4bc}{4} = (c + b)c = (u + v)c \end{aligned}$$

päättelemme luvun c olevan erisuuruisten kokonaislukujen u ja v kontraharmoninen keskiarvo.

2°. Olkoon c positiivisten kokonaislukujen u ja v kontraharmoninen keskiarvo (1) ja esim. $u < v$. Koska $u + v \mid u^2 + v^2 = (u + v)^2 - 2uv$, on oltava $u + v \mid 2uv$. Positiiviset kokonaisluvut

$$a := v - u = \frac{v^2 - u^2}{u + v}, \quad b := \frac{2uv}{u + v}$$

toteuttavat silloin ehdon

$$a^2 + b^2 = \frac{(v^2 - u^2)^2 + (2uv)^2}{(u + v)^2} = \frac{u^4 + 2u^2v^2 + v^4}{(u + v)^2} = \left(\frac{u^2 + v^2}{u + v} \right)^2 = c^2,$$

joten (a, b, c) on Pythagoraan lukukolmikko.

Lähteitä

- [1] Carl B. Boyer: “A history of mathematics”. Wiley & Sons, New York (1968).
Suomennos: “Tieteiden kuningatar: Matematiikan historia”. Osat 1 ja 2. Suomentanut Kimmo Pietiläinen. Art House, Helsinki (1994).
- [2] Moritz Cantor: “Vorlesungen über Geschichte der Mathematik”. Erster Band. 2. Auflage. Teubner (1894).
- [3] Diderot & d'Alembert: “Encyclopédie”. Paris (1751–1777). Verkkoversio:
“L’Encyclopédie de Diderot et d’Alembert” (<http://obliques.free.fr/encyclotexte/>).
- [4] Horst Hischer: “Viertausend Jahre Mittelwertbildung”
(<http://hischer.de/uds/forsch/preprints/hischer/Preprint98.pdf>) – *Mathematica didactica* **25** (2002).
- [5] Horst Hischer: “Mittelwertfunktionen und Strophoiden” (<http://www.math.uni-sb.de/PREPRINTS/preprint126.pdf>) Universität des Saarlandes. Preprint Nr. 126. Saarbrücken (2005).
- [6] K. Väisälä: “Lukuteorian ja korkeamman algebran alkeet”. Otava, Helsinki (1950).