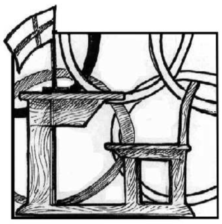


Matematiikkaolympialaiset 2009: vaikeatkin tehtävät ratkeavat

Matti Lehtinen
Helsingin yliopisto

Vuoden 2009 Kansainväliset matematiikkaolympialaiset olivat juhlakilpailu: järjestysnumero oli 50, ja ensimmäisistä Kansainvälisistä matematiikkaolympialaisista oli kulunut 50 vuotta (tämä paradoksaalinen tilanne selittyy sillä, että olympialaisia on pidetty joka vuosi lukuun ottamatta vuotta 1980). Juhlaa korosti tilaisuus, jossa kuusi matematiikan huippuasemiin kohonnutta entistä kilpailijaa, joukossa kolme matematiikan tavoitelluimman kunnianosoituksen eli Fieldsin mitalin saajaa, kertoi ennätykselliselle kilpailijajoukolle – 565 osallistujaa 104 maasta – matematiikastaan ja sen yhteydestä kilpailumatematiikkaan. Historia oli esillä 104-jäsenisen tuomaristonkin kokouksissa: edustajat oli istutettu siihen järjestykseen, missä maat olivat tulleet olympiaosanottajiksi. Suomen edustaja istui siis eturivissä Mongolian ja Ranskan edustajien välissä.

Olympialaisten ydin on kuitenkin kilpailu: kuusi vaikeaa tehtävää, yhdeksän tuntia ratkaisuaikaa kahdelle päivälle jaettuna. Tuomaristo valitsi tehtävät eri maista lähetetyistä ehdokkaista ja pyrki noudattamaan tasapuolisuutta tehtävien sisällön suhteen ja samalla saamaan eroja vaikeustasoon, jotta kaikki voisivat onnistua, mutta parhaat erottuisivat.

Lukuteoriasta helpoin tehtävä

Valituksi tuli kaksi geometrista, kaksi algebrallista, yksi lukuteoreettinen ja yksi kombinatorinen tehtävä. Tuomaristo arveli lukuteoreettisen tehtävän helpoimmaksi ja sijoitti sen numeroksi 1. Tuomaristo arvasikin oikein. Kaikkiaan 324 kilpailijaa sai tehtävästä täydet pisteet ja nollille jätettiin vain 83. Kun olympialaisten tehtävien arvosteluasteikko on 0–7, niin tämän tehtävän keskimääräinen pistemäärä oli 4,8, kaikista annetuista pisteistä melkein 32 % annettiin tästä tehtävästä ja 22 maata sai tehtävästä 42 pistettä eli suurimman mahdollisen määrän (yksi näistä maista oli Ruotsi).

Tehtävä oli seuraavanlainen:

Olkoon n positiivinen kokonaisluku ja olkoot $a_1, \ldots, a_k$ ($k \geq 2$) joukon $\{1, \ldots, n\}$ eri lukuja niin, että $a_i(a_{i+1} - 1)$ on jaollinen n:llä, kun $i = 1, \ldots, k - 1$. Osoita, että $a_k(a_1 - 1)$ ei ole jaollinen n:llä.

Tämä ei ollut tehtävän alkuperäinen muotoilu. Tuomaristo käsitteli sitä aluksi tällaisena:

Eräässä kerhossa on n jäsentä. Kullakin jäsenellä on oma jäsennumero 1, 2, ..., n. Ajoittain jäsenet lähettävät toisille jäsenille lahjoja, ja näiden joukossa voi olla jäsenten aikaisemmin toisilta jäseniltä saamia esineitä. Jottei jouduttaisi ikävään tilanteeseen, jossa jäsen saa takaisin aikaisemmin antamansa lahjan, kerhon vuosikokouksessa tehdään seuraava sääntöjen lisäys: "Jäsen, jonka numero on a saa lähettää lahjan jäsenelle b vain, jos n on luvun $a(b-1)$ tekijä." Osoita, että jos kaikki jäsenet noudattavat tätä sääntöä, kukaan *ei saa toiselta jäseneltä lahjaa, jonka itse on antanut jollekin jäsenelle.*

Tarinan keinotekoisuus johti valitsemaan abstraktimman esitysmuodon; saattaa olla, että tehtävästä näin tuli helpompikin.

Tehtävän ratkaisemiseksi kannattaa sen oletus kirjoittaa kongruenssimuotoon:

$$a_i a_{i+1} \equiv a_i \mod n,$$

kun $i = 1, 2, \ldots, k-1$. Siis $a_1 a_2 \equiv a_1$, $a_2 a_3 \equiv a_2$, joista $a_1 a_2 a_3 \equiv a_1$ ja niin edelleen, kunnes saadaan

$$a_1 \cdots a_{k-1} a_k \equiv a_1 \mod n.$$

Tehdään vastaoletus $a_k a_1 \equiv a_k \mod n$. Silloin voidaan tehtävän oletusta soveltaa uudestaan pudottamaan termejä tulon loppupäästä:

$$\begin{aligned} a_1 &\equiv a_1 \cdots a_{k-1} a_k = a_k a_1 \cdots a_{k-1} \\ &\equiv a_k a_1 \cdots a_{k-2} \equiv \cdots \equiv a_k a_1 \equiv a_k \mod n. \end{aligned}$$

Koska a_1 ja a_k ovat eri lukuja, niiden erotuksen on oltava ainakin n. Mutta tämä ei ole mahdollista, koska $a_1, a_k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Vastaoletus johti ristiriitaan, joten se on väärä.

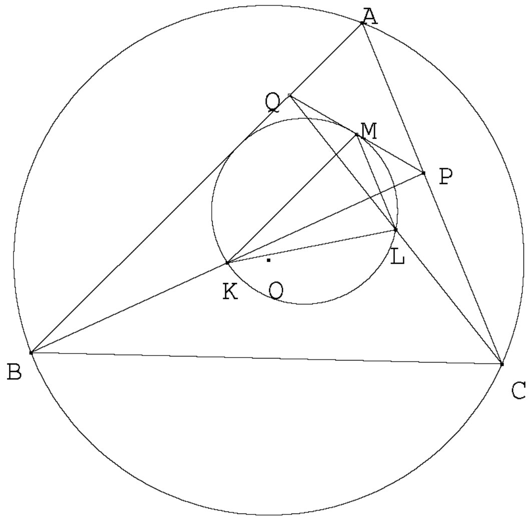
Geometria oli helpommasta päästä

Kaksi geometrian tehtävää arvioitiin vaikeudeltaan helpoiksi tai keskinkertaisiksi ja helpompi sijoitettiin toisen päivän ykköstehtäväksi. Tässä tuomariston arvio hiukan petti, sillä vaikeammaksi arvioitu tehtävä numero 2 tuotti pisteitä enemmän. Täydet pisteet annettiin 214 kilpailijalle, nolla 101:lle; pistekeskiarvo oli 3,7 ja tehtävä tuotti lähes 25 % kaikista annetuista pisteistä. Joukkueista kymmenen sai tehtävästä täyden pistepotin. Näistä Iran, Unkari, Romania ja Ukraina eivät kuitenkaan koko kilpailussa mahtuneet parhaaseen kymmenikköön.

Tehtävä on varsin perinteinen geometrinen todistustehtävä, jossa jonkin verran mutkikkaasti kuvaillusta tilanteesta on löydettävä olennainen.

Olkoon ABC kolmio ja O sen ympäri piirretyn ympyrän keskipiste. Piste P on sivun CA sisäpiste ja piste Q sivun AB sisäpiste. Pisteet K, L ja M ovat janojen BP, CQ ja PQ keskipisteet, tässä järjestyksessä, ja Γ on pisteiden K, L ja M kautta kulkeva ympyrä. Oletetaan, että suora PQ on ympyrän Γ tangentti. Osoita, että $OP = OQ$.

Tehtävän monista ratkaisutavoista hauskimmalta vaikuttaa seuraava, pisteen potenssia ympyrän suhteen hyödyntävä päättely. Palautetaan mieleen tarvittavat asiat pisteen potenssista. Pisteen X potenssi ympyrän $\mathcal{C}$ suhteenhan saadaan piirtämällä X:n kautta mielivaltainen suora, joka kuitenkin leikkaa $\mathcal{C}$:n pisteissä Y ja Z. Tällöin tulo $XY \cdot XZ$ on aina sama riippumatta siitä, miten suora asetetaan. Jos suora asetetaan $\mathcal{C}$:n keskipisteen kautta, ja X on $\mathcal{C}$:n sisällä, niin X:n potenssiksi tulee $(R+d)(R-d) = R^2 - d^2$, missä R on $\mathcal{C}$:n säde ja d on X:n etäisyys $\mathcal{C}$:n keskipisteestä. Potenssi riippuu siis vain etäisyydestä, ja pisteet, joilla on sama potenssi, ovat samalla etäisyydellä keskipisteestä.



Pyritään nyt osoittamaan, että P:llä ja Q:lla on sama potenssi kolmion ABC ympäri piirretyn ympyrän suhteen. Pyritään siis todistamaan, että $AP \cdot PC = AQ \cdot QB$. Kuvio tarjoaa eräitä ilmeisiä johtolankoja. Koska M ja L ovat kolmion CQP sivujen keskipisteet, $PC = 2 \cdot ML$ ja $ML \| PC$. Yhdensuuntaisuus antaa heti seurauksen $\angle LMP = \angle MPA$. On myös hyödynnettävä tietoa, jonka mukaan QP on ympyrän Γ tangentti. Melkein väistämättä tulee mieleen kehäkulmalause. Sen mukaan $\angle LMP = \angle MKL$. Siis $\angle MKL = \angle QPA$. Aivan samalla tavalla osoitetaan, että $QB = 2 \cdot MK$ ja $\angle MLK = \angle AQP$. Nyt onkin riittävästi tietoa, jotta voidaan todeta kolmiot AQP ja MLK yhdenmuotoisiksi. Siis

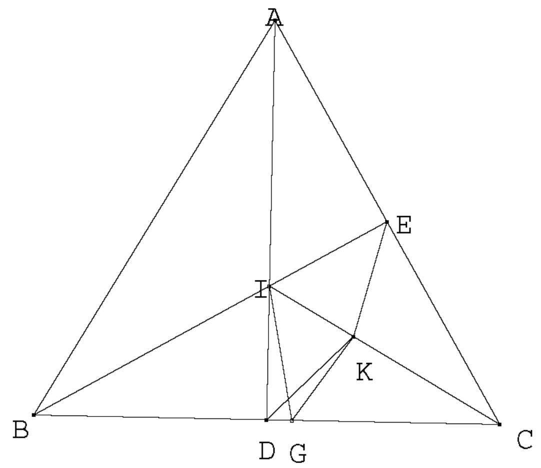
$$\frac{AP}{AQ} = \frac{MK}{ML} = \frac{QB}{PC}.$$

Mutta tämähän merkitsee, että $AP \cdot PC = AQ \cdot QB$, ja väite on todistettu.

Toinen geometrian tehtävä oli siis sarjan numero 4, toisen kilpailupäivän helpoimmaksi arvioitu tehtävä. Sellaiseksi se muodostuikin, ainakin pistekeskiarvolla 2,9 mitattuna. Jaetuista pisteistä 19 % tuli tästä tehtävästä. Täysiin pisteisiin pääsi vain 100 kilpailijaa ja vain kaksi joukkuetta, Kiina ja Venäjä, saivat puhtaan pistetilin. Tehtävä oli siis selvästi edellä käsiteltyä toista sarjan geometrista tehtävää vaikeampi.

Tehtävän muotoilu oli kysymys, ei todistus. Ratkaisu on hiukan yllättävä.

Olkoon ABC kolmio, jossa $AB = AC$. Kulmien CAB ja ABC puolittajat leikkaavat sivut BC ja CA pisteissä D ja E, tässä järjestyksessä. Olkoon K kolmion ADC sisään piirretyn ympyrän keskipiste. Oletetaan, että $\angle BEK = 45°$. Määritä $\angle CAB$:n kaikki mahdolliset arvot.



Tehtävän kuvioon on helppo sijoittaa tuntemattomaksi kulmaksi $\angle CAB$, sen puolikas tai neljännes, ja ruveta laskemaan muita kuvion kulmia siinä toivossa, että löytyisi yhtälö, josta tuntematon olisi ratkaistavissa. Tämä ei kuitenkaan onnistu, ellei käytetä hiukan muutakin geometrista päättelyä. Merkitään kolmion ABC sisään piirretyn ympyrän keskipistettä I:llä. Koska kolmio ABC on tasakylkinen, kulman puolittaja AD on kohtisuorassa BC:tä vastaan. Koska K on kulman ADC puolittajalla, niin $\angle IDK = 45°$. Peilataan nyt CA yli kulman ACB puolittajan CI. Silloin puolisuora CA peilautuu puolisuoraksi CB ja piste E peilautuu tämän puolisuoran pisteeksi G. Nyt saattaa olla niin, että $G = D$. Tällöin jana EI on peilautunut janaksi DI, joten $\angle IEC = \angle IDC = 90°$. Mutta silloin kolmion ABC B:stä piirretyt korkeusjana ja kulmanpuolittaja yhtyvät. Tämä on mahdollista vain, jos kolmio on tasakylkinen eli $BC = BA$. Mutta silloin kolmion ABC kaikki sivut ovat yhtä pitkiä, joten $\angle BAC = 60°$.

Voi myös käydä niin, että $G \neq D$ ja että G on D:n ja C:n välissä. Nyt $\angle IGK = \angle IEK = \angle BEK$. Jos $\angle BEK = 45°$, niin $\angle IGK = \angle IDK$. Pisteet I, D, G ja K ovat samalla ympyrällä. Tällöin $\angle EIK = \angle GIK = \angle GDK = 45°$, $\angle BIC = 180° - \angle EIK = 135°$, $2 \cdot \angle BCI = 45°$, $2 \cdot \angle BCA = 90°$ ja $\angle BAC = 90°$.

Kolmas mahdollisuus olisi, että G olisi B:n ja D:n välissä. Silloin olisi samoin $\angle EIK = \angle KIG = \angle KDC = 45°$, $\angle BIC = 135°$ ja saataisiin $\angle BAC = 90°$. Itse asiassa tämä tilanne on kuitenkin mahdoton, esimerkiksi koska olisi $\angle GIE = \angle GIK + \angle EIK = 90°$, jolloin kolmiossa BGI olisi suora kulma BIG ja tylppä kulma BGI.

Kulman $\angle BAC$ ainoat mahdolliset arvot ovat siis 60° ja 90°. Ratkaisu tulee kuitenkin täydelliseksi vasta, kun varmistetaan, että näillä arvoilla todellakin $\angle BEK = 45°$. (Tämän osion puuttumisesta sakotettiin 2 pistettä.) Olkoon siis $\angle BAC = 60°$. Silloin $BE \perp AC$ ja peilaus yli IC:n kuvaa D:n E:lle. Koska $\angle IDK = 45°$, on $\angle IEK = 45°$, ja asia on kunnossa. Olkoon sitten vielä $\angle BAC = 90°$. Silloin $\angle AIE = \angle BID = \angle BEA = 90° - 22{,}5°$ ja $\angle EIK = 180° - 2 \cdot \angle BID = 45°$. Kolmio AIE on tasakylkinen, joten peilauksessa yli AK:n I ja E vastaavat toisiaan. Siis $\angle IEK = \angle EIK = 45°$.

Geometrian tehtävät tuottivat vastaajille noin 44 % kaikista pisteistä. Suomen kuudelle kilpailijalle geometria antoi vain 16 % pisteistä. Geometrian osaamisvaje, jota tämän kirjoittaja on monesti valitellut, merkitsee huomattavaa tasoitusta muille joukkueille. Jossitellen: pelkästään "keskimääräisellä" geometrian osaamisella Suomen sijoitus olisi noussut noin 15 pykälää.

Algebraa kokonaislukujonoilla

Tehtäväsarjaan valikoitui kaksi algebrallista tehtävää. Kummassakin oli kyse kokonaislukujonoista, vaikka toinen tehtävistä tuli funktionaaliyhtälötehtävän kaavussa. Tätä pidettiin etukäteen tehtävistä helpompana, ja se sijoitettiin numeroksi 5 eli toisen kilpailupäivän "keskinkertaiseksi" tehtäväksi. Sellaiseksi se muodostuikin. Tehtävän ratkaisi oikein useampi kilpailija, nimittäin 153, kuin saman päivän ensimmäisen tehtävän. Toisaalta kokonaan ilman pisteitä tehtävä jätti 270 kilpailijaa ja tehtävän pistekeskiarvo oli 2,5. Peräti kahdeksalle joukkueelle tehtävä onnistui täydellisesti. Yksi joukkueista oli Puola, jonka kokonaissijoitus oli 25.

Tehtävässä on lievä geometrinen sivumaku, käsitelläänhän siinä lukuja, jotka voivat olla kolmion sivujen pituuksia:

Määritä kaikki sellaiset positiivisten kokonaislukujen joukossa määritellyt funktiot f, joiden arvot ovat positiivisia kokonaislukuja ja joilla on seuraava ominaisuus: kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla a ja b on olemassa (ei-surkastunut) kolmio, jonka sivujen pituudet ovat

$$a, \quad f(b) \quad \text{ja} \quad f(b + f(a) - 1).$$

Tehtävän ratkaisu on hiukan mielikuvitukseton: osoittautuu nimittäin, että ainoa ratkaisu on identtinen funktio $f(x) = x$. Varmistutaan ensin, että tämä funktio kelpaa. Olkoon siis $f(x) = x$ ja olkoot a ja b positiivisia kokonaislukuja. Kolmion sivujen pituuksiksi ovat tarjolla a, b ja $c = a + b - 1$. Nyt $c < a + b$, mutta $c \geq a \geq 1$ ja $c \geq b \geq 1$. Silloin $c > |a - b|$, joten kolmio, jonka sivut ovat a, b ja c on olemassa.

Osoitetaan sitten, että $f(x) = x$ on ainoa ratkaisu. Tähän päästään soveltamalla toistuvasti kolmioepäyhtälöä, jonka mukaan kolmion kahden sivun pituuksien summa on aidosti suurempi kuin kolmas sivu. Osoitetaan ensin, että $f(1) = 1$. Jos olisi $f(1) = 1 + m > 1$, muodostaisi kaikilla a kolmikko 1, $f(a)$, $f(a + m)$ kolmion sivujen pituudet. Silloin olisi $f(a) - 1 < f(a + f(1) - 1) < f(a) + 1$. Koska f:n arvot ovat kokonaislukuja, on välttämättä $f(a + f(1) - 1) = f(a)$ kaikilla a. Jos olisi $f(1) - 1 = m > 0$, f voisi saada enintään m eri arvoa $f(1)$, $f(2)$, $\ldots$, $f(m)$, ja jokin niistä olisi suurin; olkoon tämä suurin M. Mutta silloin ei olisi kolmiota, jonka sivut olisivat $2M$, $f(b)$ ja $f(b+f(2M)-1)$. Onkin oltava $m = 0$ eli $f(1) = 1$.

Osoitetaan seuraavaksi, että f on niin sanottu *involuutio* eli että $f(f(a)) = a$ kaikilla a. Tämä seuraa siitä, että a, $1 = f(1)$ ja $f(1 + f(a) - 1) = f(f(a))$ ovat kolmion sivut. Involuutiokuvaukset ovat niin sanottuja injektioita: ne saavat eri pisteissä eri arvot. Jos nimittäin $f(a) = f(b)$, niin $a = f(f(a)) = f(f(b)) = b$. Käytetään hyväksi tätä ominaisuutta.

Koska f on injektio, $f(2) \neq 1$, joten $f(2) = 1 + c$, missä $c \geq 1$. Jos b on mielivaltainen positiivinen kokonaisluku, niin 2, $f(b)$ ja $f(b + f(2) - 1) = f(b + c)$ ovat kolmion sivut, joten $f(b) - 2 < f(b + c) < f(b) + 2$ tai $f(b) - 1 \leq f(b + c) \leq f(b) + 1$. Koska $f(b + c) \neq f(b)$, niin $f(b+c) = f(b) \pm 1$. Koska $f(1 + c) = f(f(2)) = 2$, $f(1+2c) = f(1+c) \pm 1 = 2 \pm 1$. Injektiivisyyden vuoksi ei voi olla $f(1 + 2c) = 1$. Siis $f(1 + 2c) = 3$. Induktiolla nähdään helposti, että $f(1 + kc) = k + 1$ kaikilla luonnollisilla luvuilla k. Jos olisi $c > 1$, olisi $f(c) = f(1+kc)$ jollain luonnollisella luvulla k. Tämä on mahdotonta, joten on oltava $c = 1$. Tästä seuraa, että $f(1+k) = 1+k$ kaikilla $k \geq 0$.

Osoitetaan sitten induktiolla, että $f(x) = x$ kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla x. Tiedämme jo, että $f(1) = 1$. Oletamme, että $f(k) = k$, kun $1 \leq k \leq n$. Koska 1, $n + 1$ ja $f(n + 1 + f(1) - 1) = f(n + 1)$ ovat kolmion sivut, $f(n + 1) < n + 2$ eli $f(n + 1) \leq n + 1$. Jos olisi $f(n + 1) = k \leq n$, olisi $f(n + 1) = f(k)$, mikä olisi ristiriidassa f:n injektiivisyyden kanssa. Siis $f(n + 1) = n + 1$, induktioaskel on otettu ja todistus on valmis.

Toinen algebrallinen tehtävä oli ennakkoarvioissa vaikea. Se sijoitetiin ensimmäisen kilpailupäivän viimeiseksi tehtäväksi. Ei tehtävä helpoksi osoittautunutkaan. Sen ratkaisi oikein 51 kilpailijaa, pistekeskiarvo oli 1,0 ja tehtävä tuotti alle 7 % jaetuista pisteistä. Kokonaan pisteittä tehtävä jätti 357 kilpailijaa. Kiina oli ainoa joukkue, jonka jäsenille myös tämä tehtävä tuotti täyden potin.

Tehtävä koski kokonaislukujonoa, johon oli ovelasti upotettu kaksi aritmeettista osajonoa. Tehtävän tulosta voi pitää yllättävänä ja kauniinakin.

Oletetaan, että s_1, s_2, s_3, $\ldots$ on aidosti kasvava positiivisten kokonaislukujen jono ja että molemmat osajonot

$$s_{s_1},\, s_{s_2},\, s_{s_3},\, \ldots \qquad \text{ja} \qquad s_{s_1+1},\, s_{s_2+1},\, s_{s_3+1},\, \ldots$$

ovat aritmeettisia jonoja. Osoita, että myös jono s_1, s_2, s_3, $\ldots$ on aritmeettinen jono.

Jono (s_n) on aritmeettinen jono, jos sen peräkkäisten termien erotus on vakio. Merkitään siis $d_n = s_{n+1} - s_n$ ja pyritään osoittamaan (d_n) vakiojonoksi. Ensimmäinen askel tähän suuntaan on osoittaa jono rajoitetuksi. Olkoon aritmeettisen jonon (s_{s_n}) peräkkäisten termien erotus D. Siis $D = s_{s_{n+1}} - s_{s_n}$. Termien s_{s_n} ja $s_{s_{n+1}}$ välissä on ainakin d_n askelta, joista jokainen on ainakin 1. Siis $d_n \leq D$. Rajoitetussa kokonaislukujonossa on pienin ja suurin termi. Olkoon siis

$$\begin{aligned} m &= \min\{d_n \mid n = 1, 2, \ldots\}, \\ M &= \max\{d_n \mid n = 1, 2, \ldots\}. \end{aligned}$$

Väite tulee todistetuksi, jos osoitetaan, että $m = M$. Osoitetaan ensin, että $mM = D$. Jollain n on $m = d_n = s_{n+1} - s_n$. Nyt

$$\begin{aligned} D &= s_{s_{n+1}} - s_{s_n} = s_{s_n+m} - s_{s_n} \\ &= d_{s_n} + d_{s_n+1} + \cdots + d_{s_n+m-1} \leq mM, \end{aligned} \tag{1}$$

koska summassa on m termiä ja niistä jokainen on $\leq M$. Toisaalta jollain n' on $d_{n'} = M$. Samoin kuin edellä saadaan

$$\begin{aligned} D &= s_{s_{n'}+M} - s_{s_{n'}} \\ &= d_{s_{n'}} + d_{s_{n'}+1} + \cdots + d_{s_{n'}+M-1} \geq Mm. \end{aligned} \tag{2}$$

Siis $D = mM$. Epäyhtälöistä (1) ja (2) nähdään nyt lisäksi, että jos $d_n = m$, niin $d_{s_n} = d_{s_n+1} = \cdots = d_{s_{n+1}-1} = M$ ja vastaavasti jos $d_n = M$, niin $d_{s_n} = d_{s_n+1} = \cdots = d_{s_{n+1}-1} = m$.

Tehdään vastaoletus $m < M$. Kaikille n pätee $s_n \geq s_1 + (n - 1) \geq n$. Jos $d_n = m$, niin $d_{s_n} = M$. Tällöin on myös oltava $s_n > n$. Jos nimittäin olisi $s_n = n$, olisi $m = d_n = d_{s_n} = M$, mikä olisi ristiriidassa oletuksen $m < M$ kanssa. Samoin, jos $d_n = M$, niin $d_{s_n} = m$ ja $s_n > n$. On siis olemassa aidosti kasvava jono n_1, n_2, $\ldots$, jolle $d_{s_{n_1}} = M$, $d_{s_{n_2}} = m$, $d_{s_{n_3}} = M$, $d_{s_{n_4}} = m$ jne. Mutta jono d_{s_1}, d_{s_2}, $\ldots$ on aritmeettisten jonojen s_{s_1+1}, s_{s_2}, $\ldots$ ja s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, $\ldots$ termien erotusjono ja siis myös aritmeettinen jono. Sillä voi olla osajono, joka ei ole aidosti kasvava eikä aidosti vähenevä vain, jos se on vakiojono. Ei siis voi olla $m < M$, ja todistus on valmis.

Kombinatorinen tehtävä oli vaikein

Tehtäväksi 6, toisen kilpailupäivän ja koko olympialaisten viimeiseksi tehtäväksi on yleensä pyritty saamaan vaikein tehtävä. Tällä kertaa valinta osui tehtävään, joka luokiteltiin kombinatoriseksi. Kokonaislukujonosta siinäkin on kysymys.

Olkoot $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *keskenään eri suuria positiivisia kokonaislukuja ja olkoon* M *joukko, jonka alkiot ovat* $n-1$ *positiivista kokonaislukua, joista mikään ei ole* $s = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$*. Heinäsirkka hyppelee reaaliakselilla. Se lähtee origosta ja tekee* n *hyppyä oikealle. Hyppyjen pituudet ovat* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *jossain järjestyksessä. Osoita, että heinäsirkka voi järjestää hyppynsä niin, ettei se milloinkaan osu pisteeseen, jonka koordinaatti on joukossa* M*.*

Tehtävä osoittautui vaikeaksi. Vain kolme kilpailijaa, Saksan *Lisa Sauermann*, Japanin *Makoto Soejima* ja Kiinan *Dongyi Wei* ansaitsivat täydet pisteet, tehtävän pistekeskiarvo oli 0,17 ja se tuotti noin yhden prosentin jaetuista pisteistä. Tiettävästi vain kerran aikaisemmin matematiikkaolympialaisten tehtävä on näillä kriteereillä mitaten osoittautunut vaikeammaksi. Yritetään kuitenkin tehtävän ratkaisua induktiolla heinäsirkan hyppyjen lukumäärän suhteen.

Väite on ilmeisen tosi, kun $n = 1$. Oletetaan sitten, että $n > 1$ ja että väite on tosi kaikilla n:ää pienemmillä kokonaisluvuilla. Voidaan olettaa, että annetut hypyn pituudet toteuttavat ehdon $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$. Lukujen $1, 2, \ldots, n$ permutaatio $i_1, i_2, \ldots, i_n$ yksilöi silloin hyppysarjan. Olkoon d joukon M pienin luku. Luonnollisesti vain tapaus $M < s$ on mielenkiintoinen. Tarkastellaan tilannetta sen mukaan, onko $d < a_n$ vai $d \geq a_n$.

Oletetaan ensin, että $d < a_n$. Induktio-oletuksen mukaan heinäsirkka pystyy hyppimään $n-1$:llä hypyllä, joiden pituudet ovat $a_1, \ldots, a_{n-1}$ pisteestä a_n pisteeseen s. Kun sarjaan liitetään hyppy origosta a_n:ään, saadaan vaadittu hyppysarja.

Olkoon sitten $a_n = d$. Tarkastellaan $n-1$:tä joukkoa, joista jokaisella kahdella on tyhjä leikkaus: $\{a_1, a_1 + a_n\}$, $\{a_2, a_2 + a_n\}$, $\ldots$, $\{a_{n-1}, a_{n-1} + a_n\}$. Koska $M \setminus \{d\}$:ssä on $n-2$ alkiota, ainakin yksi joukoista ei sisällä yhtään M:n alkiota. Olkoon se $\{a_i, a_i + a_n\}$. Joukossa $M \cap [a_i + a_n, s]$ on enintään $n-3$ alkiota, koska $d, a_n < a_i + a_n$. Induktio-oletuksen perusteella heinäsirkka voi hypellä pisteestä $a_i + a_n$ pisteeseen s käyttäen kaikkia muita hypyn pituuksia kuin a_i ja a_n. Jos nyt ensimmäinen hyppy on a_i ja toinen a_n ja sitten tehdään mainitut $n-2$ hyppyä, saadaan vaadittu sarja.

On vielä käsiteltävä tapaus $d > a_n$. Olkoon $M' = M \setminus \{d\}$. Induktio-oletuksen perusteella heinäsirkka voi hyppiä pisteestä a_n pisteeseen s käymättä joukon M' pisteissä. Olkoon hyppyjärjestys $(i_1, \ldots, i_{n-1})$. Jos tämä reitti ei käy pisteessä d, niin $(n, i_1, \ldots, i_{n-1})$ on kelvollinen hyppyjärjestys. Muussa tapauksessa voidaan olettaa, että heinäsirkka osuu d:hen hypyllä i_j. Nyt $(i_1, i_2, \ldots, i_j, n, i_{j+1}, \ldots, i_{n-1})$ on myös hyppyjärjestys, joka välttää muut M:n pisteet kuin d:n. Koska $a_{j+1} < a_n$, järjestys $(i_1, i_2, \ldots, i_j, i_{j+1}, n, \ldots, i_{n-1})$ välttää myös d:n. Todistus on valmis.