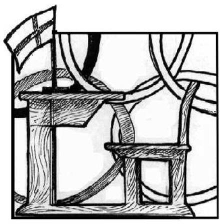


Derivaatan esittämisestä muutosnopeutena

Kyösti Tarvainen
Matematiikan yliopettaja
Metropolia Ammattikorkeakoulu

Tekniikan ja muiden alojen sovellutuksissa derivaatta esiintyy yleensä suureen muutosnopeutena (ajan tai jonkín toisen suureen suhteen). Yliopistojen matematiikan opinnoissa tämä derivaattojen käytännön sovellutuksiin liittyvä puoli ei juuri tule esille, mikä sitten heijastuu myös lukion matematiikan opetukseen. Joissain lukion oppikirjoissa on hyvällä tavalla pyritty tuomaan esiin derivaatta muutosnopeutena, mutta joissain kirjoissa asia sanotaan ikään kuin ilmoitusasiana, jota ei havainnollisesti perustella. Olen monta kertaa kysynyt uusilta opiskelijoilta, mitä derivaatta kertoo funktiosta. Vain muutama on osannut vastata, ja vastaus on yleensä se, että derivaatta on tangentin kulmakerroin. Jatkokysymykseen, mitä se kulmakerroin sitten kertoo funktiosta, ei osata vastata. Vain harva on tiennyt derivaatan muutosnopeudeksi.

Lukion jälkeisten jatko-opintojen kannalta olisi tärkeää, että niin lukion pitkässä kuin lyhyessä matematiikassa opittaisiin derivaatan merkitys muutosnopeutena. Tekniikan opinnoissa tämä asia tulee esiin muun muassa seuraavissa yhteyksissä:

- Monet suureet ovat suoraan toisen suureen derivaattoja (esimerkiksi kiihtyvyys on nopeuden muutosnopeus).
- Differentiaaliyhtälöt ovat erittäin tärkeitä tekniikassa. Ne ovat usein sellaista muotoa, jossa jonkin suureen muutosnopeus riippuu muiden suureiden arvoista (yksinkertaisessa esimerkissä veden korkeuden muutosnopeus [m/s] säiliössä, jossa on reikä pohjassa, riippuu säiliössä olevan veden korkeudesta).
- Yhä useammin käytännön järjestelmiä kuvataan osittaisdifferentiaaliyhtälöillä, jolloin suureet voivat riippua esimerkiksi kolmesta paikkakoordinaatista ja ajasta. Tällöin osittaisderivaatan havainnollistaminen tangentin kulmakertoimena on mahdotonta; sen sijasta on yksinkertaisesti tiedettävä, että osittaisderivaatta jonkin muuttujan suhteen on muutosnopeus tuon muuttujan suhteen, kun muiden muuttujien arvoja ei muuteta.
- Usean muuttujan funktion maksimointi tehdään usein numeerisesti, jolloin voidaan määrittää funktion muutosnopeudet kunkin muuttujan suhteen ja niistä muodostaa gradientti, joka näyttä suunnan, johon funktio kasvaa nopeimmin.
- Optimoinnissa on usein hyödyllistä määrittää, millä nopeudella maksimiarvo kasvaa, kun resursseja lisätään.
- Tekniikassa tarkastellaan laskutulosten sensitiivisyyttä mittausvirheiden suhteen. Tällöin on kyse siitä, miten laskutulos muuttuu, kun jokin mittausarvo muuttuu. Näissä laskuissa käytetään hyväksi derivaattoja ja osittaisderivaattoja.

Derivaatan esittäminen lukiossa tai yliopistossa muutosnopeutena ei ole helppo asia (tangentin kulmakerroin-juttu on paljon helpompi). Seuraavassa kerron, miten olen ammattikorkeakoulussa lähtenyt käsittelemään derivointia, jotta tämä muutosnopeus-merkitys tulisi heti selväksi. Asian esittämiselle on monta tapaa, mutta koska kyse on derivaatan soveltamiseen liittyvästä näkökohdasta, se varmaankin täytyy kertoa epämuodollisemmin kuin yliopistojen matematiikan kurssien formaaleissa esityksissä derivaattoja käsitellään. Joissain lukion kirjoissa onkin hyvällä tavalla johdateltu derivaattaan epämuodollisella tavalla, ennen täsmällisen määritelmän esittämistä.

Seuraavassa tekstissä, jonka toivotaan antavan virikkeitä asian esittämiselle lukiossa, on hieman sekaisin asiaa opettajille ja kopioita opiskelijoille kirjoitetusta esityksestä. Lähtökohtina ovat seuraavat seikat:

- Aluksi tehdään selväksi, että funktion muutosnopeus, kun funktion lauseke tunnetaan, on yllättävän vaikea asia määritellä matemaattisesti. (Vastaavanlaiset vaikeudet johtivat Zenonin nuoli-paradoksissa siihen, että liike sinänsä on mahdotonta.) Siksi muutosnopeus on esityksessä määritelty kolmessa vaiheessa: 1) kun funktion kuvaaja suora, 2) derivaatan likiarvo kun funktiosta tunnetaan erillisiä arvoja, 3) yleinen tapaus.

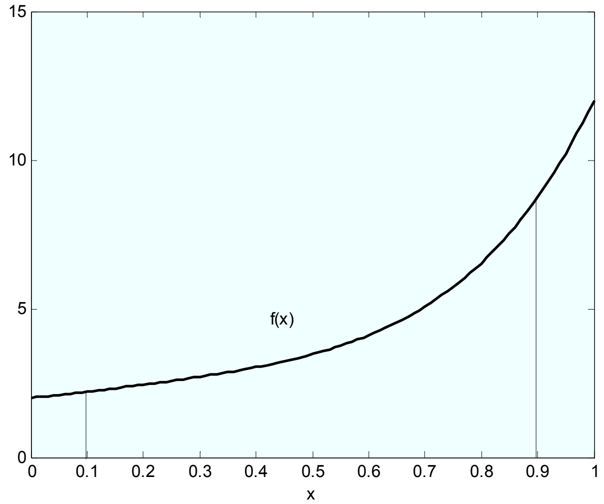
- Tässä toisessa vaiheessa esitetään, miten määritetään derivaatan approksimaatio, kun funktiosta tunnetaan vain erillisiä arvoja. Tällaisia tarkasteluja ei ole ollut tapana tehdä lukiossa. Mutta ne ovat helppoja ja antavat konkreettista kuvaa derivaatan käsitteestä. Nykyisin käytännön sovellutuksissa ei useinkaan ole funktion lausekkeita, joita derivoidaan, vaan meillä on tietokoneohjelma, joka laskee funktion arvoja, tai meillä on digitaalisesti saatuja näytteitä funktiosta. Useat differentiaaliyhtälöiden, osittaisdifferentiaaliyhtälöiden ja optimointitehtävien ratkaisumenetelmät perustuvat sille, että derivaattoja approksimoidaan erotusosamäärillä tai vastaavanlaisilla tarkemmilla numeerisilla lausekkeilla.

- Liikkeelle lähdetään siitä intuitiivisesta näkemyksestä, että jokaisessa kohdassa (eräitä erikoispisteitä lukuun ottamatta) funktiolla on muutosnopeus ja siitä lopulta päädytään derivaatan yleiseen määrittelyyn, eikä edetä päinvastoin. Nojaudutaan opiskelijan fysikaalisiin ja geometrisiin näkemyksiin (funktion muutosnopeus on sitä suurempi, mitä jyrkemmin funktion kuvaaja nousee; jos kuvaaja on suora, funktion muutosnopeus on vakio).

Seuraavanlainen johdatus derivaattoihin on esitetty niin lukion pitkän ja lyhyen matematiikan suorittaneille kuin myös ammattikoulusta valmistuneille. Sitä ennen on lyhyesti esitetty raja-arvon käsite ja merkintä. Derivaatan algebrallinen määritelmä on tekniikassa tärkeä, koska esimerkiksi monen differentiaaliyhtälön johtaminen tapahtuu algebrallisesti. Olen samaa mieltä Matti Lehtisen [1] kanssa, että derivaatan esittäminen graafisesti sekantti-tangenttitarkasteluilla ei ole hyvä näkökulma.

Muutosnopeuden matemaattisen määrittelyn vaikeus

Jokainen varmaan toteaa kuvasta 1, että muuttujan x arvon kasvaessa funktio $f(x)$ kasvaa nopeammin kohdassa $x = 0.9$ kuin kohdassa $x = 0.1$. Kun kerran tässä vaiheessa kysyin ammattikoulupohjaisella luokalla (jonka oppilaat eivät koskaan olleet kuulleet derivaatasta mitään), miten kasvunopeuden voisi määritellä, yksi opiskelija antoi hyvän ehdotuksen: mitataan se kulma, jossa funktio nousee.



Kuva 1. Funktion muutosnopeutta tarkastellaan intuitiivisesti kahdessa kohdassa.

Kun pyritään vielä käyttökelpoisempaan ja itse asiassa luonnollisempaan määrittelyyn, vaikeutena on se, että kun halutaan määritellä funktion muutosnopeus tietyssä pisteessä x, funktiolla on tietty arvo tässä pisteessä, eikä se ehdi siinä muuttua.

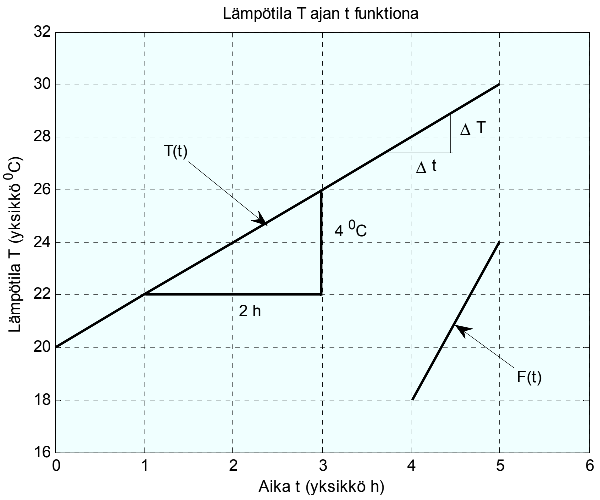
Vanha vitsi johdattaa tämän vaikeuden ratkaisuun. Poliisi pysäytti naisen, joka ajoi ylinopeutta kaupunkialueella: "Te ajoitte 60 kilometriä tunnissa." Nainen vastasi: "Se on täysin mahdotonta, minulla ei ole edes aikaa ajaa yhtä tuntia, sillä täytyy ehtiä 10 minuutissa kampaajalle."

Auton yhteydessä kohtaamme saman vaikeuden kun edellä: kuinka voimme puhua auton nopeudesta tietyllä hetkellä, kun sillä hetkellä auto on tietyssä paikassa eikä silloin ehdi liikkua ollenkaan. Ratkaisu tähän on se, että kun puhumme auton nopeudesta jollain hetkellä, esimerkiksi poliisin mittaamasta nopeudesta 60 km/h, niin tämä tarkoittaa sitä, että jos auto liikkuisi samalla nopeudella yhden tunnin, matkaa taittuisi 60 kilometriä.

Vastaavasti kun pyrimme määrittelemään matemaattisesti funktion muutosnopeuden jossain pisteessä, meidän on aloitettava tarkastelu siitä, kuinka funktio muuttuu pisteen x ympäristössä. Silloin helpoin tapaus on se, että funktion kuvaaja on suora eikä käyristy kuten kuvassa 1.

Muutosnopeus eli derivaatta, kun funktion kuvaaja on suora

Johdatteleva esimerkki. Kuva 2 esittää, miten lämpötila nousee aamulla. $T(t)$ on lämpötila hetkellä t tuntia vuorokauden alusta. Kuvaaja on suora, joten arkikielellä sanoisimme, että lämpötila kasvaa samalla vauhdilla koko ajan.



Kuva 2. Lämpötila T ajan t funktiona. Funktion $F(t)$ on toinen tapaus, jossa lämpötila kasvaa nopeammin.

On tärkeä huomata, että voimme puhua kolmesta eri asiasta:

1) **Lämpötila tietyllä hetkellä**. Esimerkiksi kello 1 lämpötila T on 22 °C eli $T(1) = 22\,°\mathrm{C}$.

2) **Lämpötilan muutos tietyllä aikavälillä**. Esimerkiksi kahden tunnin aikana kello 1:stä kello 3:een lämpötila nousee 4 °C, kun taasen esimerkiksi kello 1:stä kello 4:een lämpötila nousee 6 °C.

3) **Lämpötilan muutosnopeus**. Edellisen kohdan mukaan lämpötila T nousee kahden tunnin aikana 4 °C. Siten yhdessä tunnissa lämpötila nousee 2 °C. Koska lämpötila kuvan mukaisesti kasvaa samalla nopeudella koko ajan, sanomme, että lämpötilan muutosnopeus on 2 °C/h jokaisella ajanhetkellä t.

Merkintä. Yleisesti funktion $f(x)$ muutosnopeus eli derivaatta on erilainen muuttujan x eri arvoilla eli muutosnopeuskin on x:n funktio, jolle käytetään esimerkiksi merkintöjä $f'(x)$ tai $\frac{df}{dx}(x)$ tai $Df(x)$.

Lämpöesimerkin tapauksessa derivaatta on kuitenkin sama kaikilla t:n arvoilla:

$$T'(t) = 2\,°\mathrm{C/h}$$

tai toisin merkiten

$$\frac{dT}{dt}(t) = 2\,°\mathrm{C/h}.$$

On hyvä merkitä yksiköt, koska nekin muistuttavat siitä, että kyse on muutosnopeudesta.

Siirtyäksemme käsittelemään yleisempää tapausta ja yleisiä merkintöjä, todetaan kuvassa 1, että kolmioiden yhdenmuotoisuuden perusteella sama muutosnopeus 2 °C/h saadaan myös tarkastelemalla mielivaltaisen suuruista aikaväliä Δt ja sen aikana tapahtuvaa lämpötilan muutosta ΔT (katso kuva 1): muutosnopeus saadaan *erotusosamääränä* $\Delta T/\Delta t$.

Yleinen tapaus, jossa kuvaaja on suora

Muissakin tapauksissa [katso kotitehtävät jäljempänä] funktiolle $f(x)$, *jonka kuvaaja on suora*, on luonnollista määritellä muutosnopeus eli derivaatta $f'(x)$ seuraavasti erotusosamääränä, jolloin lasketaan kuinka paljon funktio $f(x)$ muuttuu yhtä x:n yksikköä kohti:

$$f'(x) = \frac{\Delta f}{\Delta x} \quad \text{(huom. kuvaaja suora)}$$

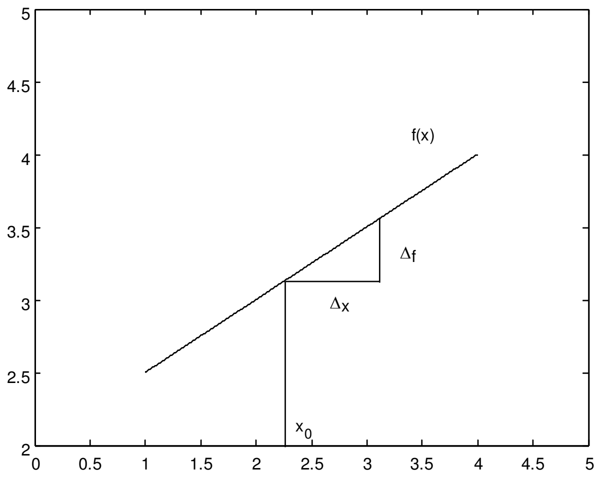
jossa Δf on funktion arvon muutos, kun muuttujassa x tapahtuu muutos Δx, eli matemaattisesti:

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \quad \text{(uusi funktion arvo miinus aiempi arvo)},$$

jossa x_0 on jokin x:n arvo. Tässä, kuten lämpöesimerkissä, kaikilla kohdan x_0 ja x:n muutoksen Δx valinnoilla saadaan sama derivaatan arvo. Kuva 3 havainnollistaa merkintöjä.

Tässä on käytetty sanontaa, että erotusosamäärä $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ ilmaisee funktion $f(x)$ muutoksen muuttujan x ”yhtä yksikköä kohti”: esimerkiksi lämpöesimerkissä lämpötilan muutos on 2 °C tuntia kohti ja autoesimerkissä matkamittarin lukeman muutos on 60 kilometriä tuntia kohti (vaikka tunnin verran ei ajettaisikaan).

Yleensä ajatellaan ja käytetään positiivista Δx:n arvoa, mutta sama derivaatan arvo saadaan negatiivisellakin Δx:lla, sillä silloin myös funktion muutoksen Δf merkki muuttuu.

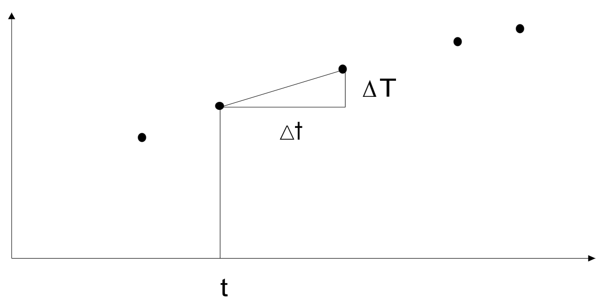


Kuva 3. Funktion $f(x)$ kuvaaja on suora. Kohdassa x_0 muuttujaan x on tehty muutos Δx, josta aiheutuu funktion arvoon muutos Δf.

Derivaatan likiarvo, kun funktiosta tunnetaan tai lasketaan vain erillisiä arvoja

Nykyään lämpötila ja muut suureet mitataan yleensä digitaalisesti ottamalla suureesta näytteitä erillisinä (diskreetteinä) ajankohtina, jolloin funktiosta tunnetaan vain joukko arvoja. Tällöin meillä ei ole edellisten kuvien mukaista kuvaajaa funktiolle eikä mitään algebrallista lauseketta funktiolle.

Myös monissa tietokonesovellutuksissa funktiolle ei ole käytössä kuvaajaa tai algebrallista lauseketta, vaan tilanne on se, että tietokoneohjelmalla voidaan laskea kutakin muuttujan x arvoa kohti funktion $f(x)$ arvo. Jos olemme tällaisessa tapauksessa laskeneet funktion $f(x)$ arvoja joillain x:n arvoilla, tilanne on oleellisesti sama kuin kuvassa 4, jossa on erillisinä ajankohtina mitattuja lämpötilan T arvoja.



Kuva 4. Funktiosta $T(t)$ on näytteitä. Kun siirrytään ajankohdasta t seuraavaan ajankohtaan, aikaväli on Δt ja lämpötilan muutos on ΔT.

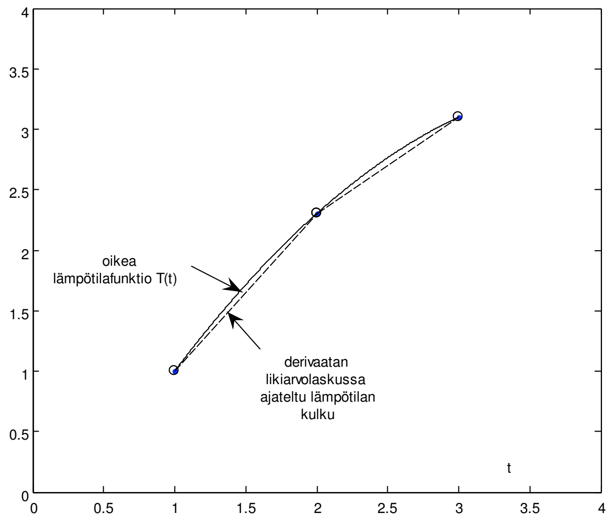
Lämpötila T on tässä ajan t funktio $T(t)$, mutta meillä on tiedossa siitä vain erillisiä arvoja. Lämpötiloissa ei yleensä tapahdu äkillisiä muutoksia, vaan lämpötila muuttuu lyhyellä aikavälillä lähes suoraviivaisesti – sitä tarkemmin mitä lyhyempi aikaväli on. Oletetaan, että lämpötilaa on mitattu lyhyin aikavälein ja että siten lämpötilafunktion $T(t)$ kuvaaja on lähes suoraviivainen mittausarvojen välillä.

Jos kuvaaja olisi täysin suoraviivainen aikapisteen t ympäristössä ja koko aikavälillä $[t, t+\Delta t]$, edellisen kohdan mukaisesti lämpötilan derivaatta ajanhetkellä t olisi $\Delta T/\Delta t$, jossa ΔT on lämpötilan muutos kyseisellä aikavälillä (katso kuva 4). Todennäköisempää on, että lämpötila ei ole muuttunut aivan suoraviivaisesti, tasaisella nopeudella. Yleisesti erotusosamäärä $\Delta T/\Delta t$ antaa siten likiarvon derivaatalle ajanhetkellä t eli

$$T'(t) \approx \frac{\Delta T}{\Delta t},$$

jossa ΔT on siis lämpötilan muutos ajanhetkestä t ajanhetkeen $t+\Delta t$.

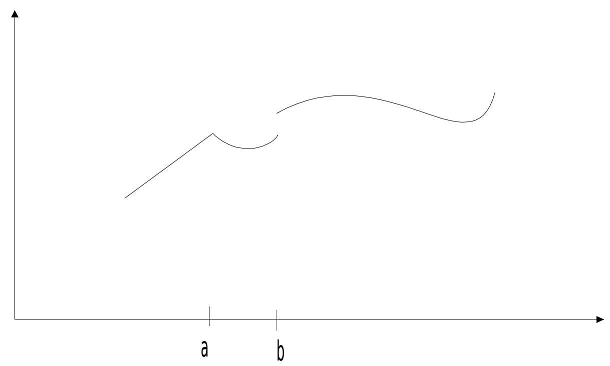
Kuva 5 havainnollistaa tätä likiarvon laskentaa. Jatkuva käyrä on lämpötilan kuvaaja; pallot ovat mittausarvoja, jotka ovat käytettävissä. Edellä oleva derivaatan likiarvo on saatu ajattelemalla, että lämpötila muuttuisi tasaisella nopeudella mittausarvojen välillä (katkoviivat). Kuvasta nähdään, että ajanhetkellä $t=1$ oikea lämpötila nousee hieman jyrkemmin kuin katkoviiva, joten likiarvolasku antaa oikeaa arvoa hieman pienemmän derivaatan arvon tässä esimerkissä. Kuvasta voi hahmottaa, että jyrkkyysero pienenee ja likiarvo paranee, jos seuraava t:n arvo (joka kuvassa on 2), on lähempänä pistettä $t=1$, jossa derivaattaa määrätään.



Kuva 5. Lämpötilafunktio $T(t)$ ja derivaatan likiarvon laskemisessa ajateltu lämpötilan kulku (katkoviiva).

Derivaatan yleinen matemaattinen määritelmä

Matematiikassa voidaan määritellä hyvinkin erikoisia funktioita, mutta käytännössä esiintyvät funktiot ovat kahta tapausta lukuun ottamatta sellaisia, että ne pienellä muuttujan välillä muuttuvat lähes suoraviivaisesti – sitä tarkemmin mitä pienempää muuttujan väliä tarkastellaan, jolloin lyhyesti voi sanoa, että funktio muuttuu paikallisesti suoraviivaisesti. Kuvassa 6 näkyvät esimerkit näistä poikkeustapauksista.



Kuva 6. Kohdat a ja b, joissa funktio ei muutu paikallisesti suoraviivaisesti.

Pisteessä a funktion kuvaajassa on kulma. Esimerkiksi jos kyseessä on vesisäiliön vedenkorkeus, vedenpinta on noussut hetkeen a mennessä, mutta hetkellä a vettä on alettu poistaa säiliöstä ja vedenpinta on alkanut laskea.

Pisteessä b taasen funktiossa on hyppäyksellinen epäjatkuvuus. Tällaista epäjatkuvuutta ei voi tapahtua vedenpinnan korkeudessa, mutta esimerkiksi jos kyseessä on lämmönjohtavuus paikan funktiona, epäjatkuvuus lämmönjohtavuuteen tulee materiaalin vaihtuessa toiseen.

Lukuun ottamatta tämäntapaisia kulmatapauksia ja epäjatkuvuustapauksia, käytännön sovellutuksissa esiintyvät funktiot ovat sellaisia, että paikallisesti ne muuttuvat suoraviivaisesti (vertaa siihen, että maapallo näyttää paikallisesti pannukakulta). Seuraava esimerkki havainnollistaa asiaa.

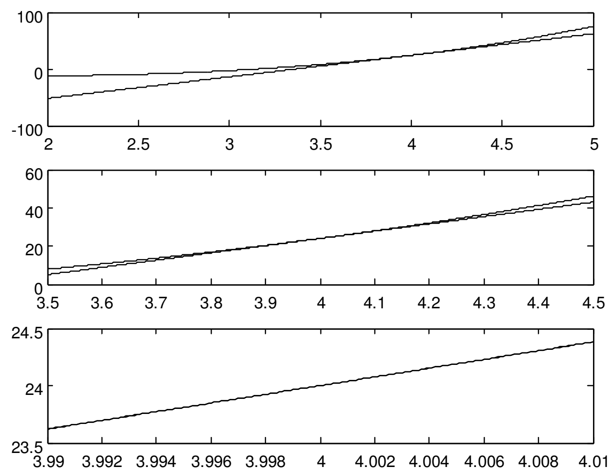
Esimerkki. Tarkastellaan funktiota $f(x) = x^3 - 10x$. Tehtävänä on määrittää sen derivaatta kohdassa $x = 4$ eli $f'(4)$. Oheisen kuvasarjan ylimmässä kuvassa funktion kuvaaja on piirretty välillä $[2, 5]$. Kuvaan on piirretty myös tangentti, kun $x = 4$. Näemme funktion kuvaajan kaartumisesta ylöspäin, että funktion muutosnopeus kasvaa kuvan alueella.

Seuraavassa osakuvassa funktion kuvaaja on piirretty pisteen $x = 4$ pienemmässä ympäristössä $[3.5, 4.5]$. Kuvassa on myös sama tangentti. Tällä välillä funktion muutosnopeuden lisäys on varsin vähäistä, muutosnopeus on lähes vakio.

Alimmassa osakuvassa funktio ja tangentti on piirretty vielä pienemmässä pisteen $x = 4$ ympäristössä $[3.99, 4.01]$: nyt funktion kuvaaja on niin suora, että tässä kuvassa sitä ei voi erottaa tangentista. Funktion muutosnopeus kasvaa tällä välillä niin vähän, että piirtämistarkkuuden rajoissa se ei tule esiin. Toisin sanoen tällä pienellä välillä funktion muutosnopeus on lähes sama joka pisteessä, ja tapaus on melkein sama kuin aluksi tarkasteltu tapaus, jossa funktion kuvaaja on suora. Siten hyvän likiarvon muutosnopeudelle välin joka pisteessä, ja erityisesti kohdassa $x = 4$, saa kun laskee suoran tapauksen mukaisesti, kuinka paljon funktio muuttuu yhtä x:n yksikköä kohti, kun siirrytään esimerkiksi pisteestä $x = 4$ esimerkiksi pisteeseen $x = 4.001$, jolloin x:n muutos $\Delta x = 0.001$. Siis

$$\begin{aligned} f'(4) &\approx \frac{f(4.001) - f(4)}{0.001} \\ &= \frac{(4.001^3 - 10 \cdot 4.001) - (4^3 - 10 \cdot 4)}{0.001} \\ &= 38.012 \end{aligned}$$

Tätä sanotaan *keskimääräiseksi muutosnopeudeksi* välillä $[4, 4.001]$.



Kuva 7. Funktion $f(x) = x^3 - 10x$ kuvaajan zoomauksia kohdan $x = 4$ ympäristössä.

Kun tarkasteluväliä vielä pienennetään, funktion muutosnopeus ehtii muuttua vielä vähemmän, jolloin äskeisen kaltainen lasku antaa vielä tarkemman likiarvon funktion muutosnopeudelle välin jokaisessa pisteessä ja erityisesti pisteessä $x = 4$.

Jos esimerkiksi tarkastelemme funktion muutosta, kun x muuttuu arvosta 4 arvoon 4.0000001, jolloin x:n muutos $\Delta x = 0.0000001$, saamme samanlaisella laskulla kuin edellä derivaatan $f'(4)$ likiarvoksi:

$$f'(4) \approx 38.0000012$$

Edelleen vielä tarkemmin muutosnopeuden pisteessä $x = 4$ saamme, kun tarkastelemme vielä pienempiä x:n muutoksia Δx. Derivaatta määritelläänkin matemaattisesti sinä keskimääräisen muutosnopeuden raja-arvona, jota lähestytään, kun x:n muutos Δx lähestyy 0:aa.

Derivaatan matemaattiseen määritelmään sisältyy se, että tämä raja-arvo on sama muutoksen Δx sekä positiivisilla että negatiivisilla arvoilla. Tämä vaatimus on fysikaalisestikin ajatellen selvä: esimerkiksi edellä kuvassa 6, jossa kohdassa a kuvaajassa on kulma, on sen vasemmalla puolella eri muutosnopeus kuin oikealla puolella eikä fysikaalisesti sen takia ole mielekästä puhua muutosnopeudesta pisteessä a. Samanlainen tilanne on kuvan 6 erikoispisteessä b.

Näin on havainnollisesti perusteltu derivaatan määritelmää, joka matematiikassa on otettu käyttöön:

Määritelmä. Jos funktio $f(x)$ on määritelty pisteen x_0 ympäristössä, derivaatta pisteessä x_0 määritellään raja-arvona:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x},$$

jossa $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, edellyttäen että raja-arvo on olemassa ja äärellinen (raja-arvo voi olla ääretön, mutta sitä ei hyväksytä derivaataksi, koska se sotkisi derivointisäännöt).

Kun tätä määritelmää sovelletaan edellisen esimerkkitapauksen funktioon $f(x) = x^3 - 10x$, saadaan suoraviivaisilla laskuilla: $f'(4) = 38$. Kuten edellä nähtiin, erotusosamäärän avulla saadut likiarvot lähestyivät tätä tarkkaa arvoa.

Derivaatan geometrinen tulkinta

Derivaatan tulkinta tangentin kulmakertoimena on joskus hyödyllinen. Tämä tulkinnan näemme kuvasta 7 (etenkin alin osakuva): funktio jossain pisteessä ja pisteeseen piirretty tangentti kasvavat samalla vauhdilla. Tangentin kulmakerroin on itse asiassa määritelty samalla tavalla kuin derivaatta (tai tämä ominaisuus voidaan johtaa), joten pätee, että funktion derivaatta jossain pisteessä on yhtä suuri kuin vastaavaan kuvaajan pisteeseen piirretyn tangentin kulmakerroin. Kuvan 6 erikoispisteissä a ja b, joissa ei ole derivaattaa, ei myöskään ole yksikäsitteisiä tangentteja.

Fysikaalinen perustelu derivaatan määritelmälle

Edellä derivaatan yleinen määritelmä raja-arvona perusteltiin geometrisesti. Asiaan voidaan liittää myös fysikaalisia perusteluita, jotka on havainnollisinta esittää nopeuden avulla. Olkoon $f(x)$ matka, jonka auto on kulkenut jostain alkuajasta ajanhetkeen x. Tällöin erotusosamäärä $(f(x_0 + \Delta x) - f(x_0))/\Delta x$ on auton keskinopeus aikavälillä $[x_0, x_0 + \Delta x]$. Ajatellaan esimerkiksi tapausta, jossa aikavälin pituus Δx on 100 sekuntia ja auton nopeus kasvaa tällöin arvosta 50 km/h arvoon 52 km/h. Keskinopeus on silloin näiden nopeuksien välillä, suuruusluokkaa 51 km/h. Pidetään ajanhetkeä x_0, jolla hetkellä auton nopeus on siis 50 km/h, koko ajan samana, mutta ajatellaan pienempiä aikavälejä Δx. Esimerkiksi, jos se on 1 sekunti, auton nopeus on ehtinyt kasvaa arvosta 50 km/h esimerkiksi vain arvoon 50.02 km/h, jolloin keskinopeus on suuruusluokkaa 50.01 km/h. Edelleen jos tarkastellaan 0.001 sekunnin pituista aikaväliä Δx, auton nopeus on ehtinyt kasvaa vielä vähemmän, ehkä arvoon 50.00002 km/h, jolloin keskinopeus tällä aikavälillä on suuruusluokkaa 50.00001 km/h. Näin näemme fysikaalisesti, että kun aikavälin pituus Δx lähenee nollaa, keskinopeus tällä välillä lähenee auton nopeutta hetkellä x_0. Siten jos tunnemme auton ajaman matkan $f(x)$, auton nopeus eli ajetun matkan muutosnopeus saadaan samanlaisena keskimääräisen muutosnopeuden raja-arvona kuin edellä geometrisin perusteluin.

Kotitehtäviä

Edellä käsiteltyihin kohtiin voidaan liittää esimerkiksi seuraavantapaisia kotitehtäviä.

Kuvaaja suora. Voidaan antaa kuvan 2 mukaisia tapauksia:

1) Auton matkamittarin lukema [km] ajan [h] funktiona. Pyydetään määrittämään derivaatta ja kysytään, miksi sitä arkielämässä sanotaan (nopeus; $v(t) = s'(t)$).
2) Auton nopeus [m/s] ajan [s] funktiona. Pyydetään määrittämään derivaatta ja kysytään, miksi sitä arkielämässä sanotaan (kiihtyvyys; $a(t) = v'(t)$).
3) Verojen määrä [euroja] tulojen [euroja] funktiona (kuvaaja voi olla paloittain suoraviivainen, kuten muissakin esimerkeissä). Pyydetään määrittämään derivaatta suurimmilla tuloilla ja kysytään, miksi sitä 100:lla kerrottuna arkielämässä sanotaan (marginaaliveroprosentti).
4) Talon energiamittarin lukema [kWh] ajan funktiona [h]. Pyydetään määrittämään derivaatta ja kysytään, miksi sitä arkielämässä sanotaan (teho [W]).
5) Säiliössä on vettä ja sitä tulee lisää putkesta. Annetaan säiliössä olevan veden määrä [m^3] ajan [h] funktiona. Pyydetään määrittämään derivaatta ja kysytään, miksi sitä arkielämässä sanotaan (virtaama [m^3/h]).

Derivaatan likiarvo. Voidaan antaa kuvan 4 mukaisia tapauksia, jotka voivat olla samanlaisia sovellutuksia kuin suoran tapauksessa, nyt vain funktion arvot on annettu erillisillä argumentin arvoilla. Toinen tärkeä tehtävätyyppi on sellainen, jossa annetaan funktion lauseke, joka voi olla varsin monimutkainenkin useita alkeisfunktioita sisältävä, ja pyydetään laskemaan jossain pisteessä derivaatan likiarvo, kuten edellä laskettiin likimäärin funktion $f(x) = x^3 - 10x$ derivaattaa $f'(4)$. Tällöin voidaan tehdä kokeiluja, mikä vaikutus käytetyllä Δx:n suuruudella on. Periaatteessa on sitä parempi, mitä pienempi Δx on. Mutta sen takia, että laskimet ja tietokoneet esittävät luvut vain tietyllä tarkkuudella, liian pieni Δx:n arvo heikentää laskentatarkkuutta pyöristysvirheiden takia. Lopulta jos esimerkiksi $x_0 = 1$ ja $\Delta x = 10^{-16}$, niin $x_0 + \Delta x = 1.0000000000000001$. Jos laskimen tai tietokoneen muistipaikkoihin mahtuvat vain 16 ensimmäistä numeroa, niin viimeinen ykkönen ei sovi muistiin, ja tämä luku pyöristyy 1:ksi, jolloin derivaatan approksimaatioksi tulee 0. Nyrkkisäännön mukaan tietokoneohjelmissa yleensä tarkimman derivaatan arvon saa, kun käyttää Δx:n arvoa 10^{-8} . Laskimissa, joissa lasketaan noin 12 numerolla, vastaava optimaalinen arvo on luokkaa 10^{-6}. Laskimissa, joissa on numeerinen derivointi, voi saada valita Δx:n arvon, mutta laskimet käyttävät erotusosamäärää tarkempaa menetelmää (esim. ns. keskeisdifferenssiä), jolloin paras Δx:n arvo on yleensä paljon suurempi (esim. 10^{-4}).

Derivaatan geometrinen tulkinta. Tähän kohtaan voi liittää samanlaisia käytännön sovellutuksia kuin edellä on mainittu, nyt vain kuvaajat eivät ole suoria. Tehtävänä on määrätä derivaatan likiarvo jossain pisteessä piirtämällä tangentti ja määrittämällä sen muutosnopeus, kulmakerroin.

Viitteet

M. Lehtinen: Neljä tietä derivaattaan. *Solmu* 1/2009.