Yläkoulun geometriaa

Tämä tehtäväkokoelma antaa yläkoulun oppilaalle mahdollisuuden syventää koulussa opittavaa geometrian oppimäärää. Se on erityisen hyödyllinen niille, jotka aikovat lukiossa valita pitkän matematiikan. Kokoelman osiot kannattaa suorittaa numerojärjestyksessä, sillä ne rakentuvat loogisesti toistensa varaan. Kussakin osiossa on pieni johdanto, jossa perustellaan tai annetaan tehtävien ratkaisemisessa tarvittavat tiedot. Tehtävissäkin on teoriaa eteenpäin vieviä todistamisia. Osa tehtävistä voi aluksi tuntua vaikeilta, mutta tee ensin helpoimpia ja kysy tarvittaessa neuvoa opettajalta. Eräitä vaativampia tehtäviä on varustettu tähtimerkinnällä. Niiden suorittamatta jättäminen ei häiritse kokonaisuuden ymmärtämistä, mutta ne ovat erityisen hyödyllisiä matematiikan oppimisen kannalta. Pidempää pohdiskelua vaativat tehtävät kehittävät matematiikan oppimisessa vaadittavaa sitkeyttä!

Matematiikassa tarvitaan laskutaidon lisäksi myös päättelytaitoa[1]. Alkeisgeometria on oiva väline sen harjoittelemiseen. Koulumatematiikassa päättelyjen pohjaksi kelpaavat tietyt näköhavaintoon perustuvat asiat, jotka todistetaan myöhemmin eräistä geometrian perusoletuksista lähtien. Tässä pidetään perustana kaikki koulussa opittu suoriin, pisteisiin, kulmiin ja kolmioihin liittyvä tieto. On siis selvää, että *kulman ja sen vieruskulman summa on oikokulma*, *tasakylkisen kolmion kantakulmat ovat yhtäsuuret ja tämän kolmion kantaa vastaan piirretty korkeusjana puolittaa kannan sekä huippukulman*. Näihin asioihin palataan lukion pitkässä matematiikassa.

Joissakin harjoituksissa käytetään kirjaimia lukujen symboleina. Niillä lasketaan samoin säännöin kuin luvuilla. Näin saadaan kaavoja, jotka ovat voimassa kaikilla kirjainten tilalle sijoitetuilla tilanteen kannalta mielekkäillä luvuilla. Kirjaimilla laskemiseen voit perehtyä käymällä läpi Solmun diplomisivulta lausekkeita ja yhtälöitä sekä osittelulakia käsittelevät oheiskirjoitukset. Solmun diplomisivulta löytyvät Väisälän Geometria ja Algebra ovat erittäin suositeltavaa oheislukemistoa!

Tehtävien ratkaisemisessa tarvitaan perustiedot potensseista, neliöjuurista, lausekkeiden käsittelystä ja ensimmäisen asteen yhtälöistä. Myös vaihdantalakeja $a+b=b+a$, $ab=ba$, osittelulakia $a(b+c)=ab+ac$, ja niihin perustuvia *binomikaavoja*

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \quad \text{ja} \quad (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

tarvitaan muutamissa yhteyksissä.

Rakentavat kommentit ja parannusehdotukset ovat tervetulleita. Niitä voi lähettää Solmun toimituksen osoitteella. {050514℧}

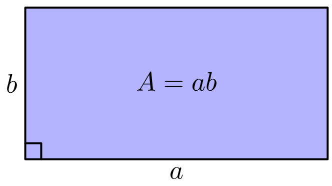
[1] Ks. myös `http://matematiikkalehtisolmu.fi/2008/diplomi/geomtodharj.pdf`

Sisällys:

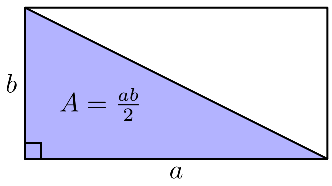
1. Pinta-aloista

Teoriaa

Suorakulmion pinta-ala on kannan ja korkeuden pituuksien tulo.



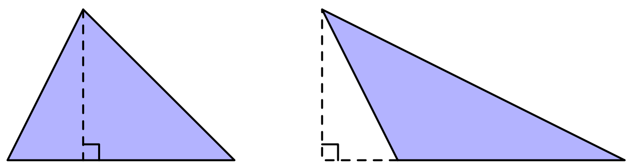
Lävistäjä puolittaa suorakulmion pinta-alan, joten *suorakulmaisen kolmion*



pinta-ala on kateettien pituuksien tulon puolikas. Tämän avulla johdetaan kolmion pinta-ala yleisesti (teht.1) kahden suorakulmaisen kolmion pinta-alan summana tai erotuksena. Kolmion pinta-alan avulla johdetaan edelleen (teht. 2 ja 3) suunnikkaan ja puolisuunnikkaan pinta-alojen kaavat. Teoria rakentuu näin muutamista perusasioista lähtien.

Harjoituksia

1. Todista, että kolmion pinta-ala on kannan ja korkeuden pituuksien

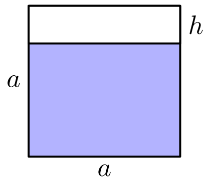


tulon puolikas. Ohje: Käsittele erikseen terävä- ja tylppäkulmainen kolmio. Merkitse kannan ja korkeusjanan pituuksia a:lla ja h:lla, ja tylppäkulmaisessa kolmiossa kannan jatketta c:llä. Merkitse teräväkulmaisessa kolmiossa u:lla ja v:llä osia, joihin korkeusjana jakaa kannan.

2. Johda suunnikkaan pinta-alan kaava. Ohje: Lävistäjä puolittaa suunnikkaan pinta-alan.

3. Osoita, että puolisuunnikkaan pinta-ala on sen kantojen pituuksien keskiarvon ja korkeuden pituuden tulo.

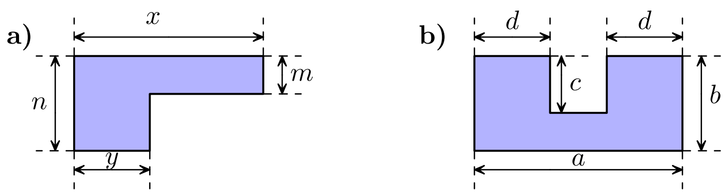
4. Neliön sivun pituus on a. Neliöstä leikataan pois suorakulmio, jonka



korkeus on h. Laske jäljelle jäävän osan pinta-ala.

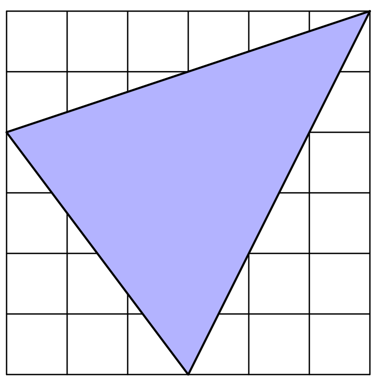
5. Osoita, että jos nelikulmion lävistäjät ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, niin sen pinta-ala on puolet lävistäjien pituuksien tulosta.
Ohje: Aloita apukuvion piirtäminen lävistäjistä.

6. Muodosta lauseke kuvassa



olevan kuvion pinta-alan laskemiseksi.

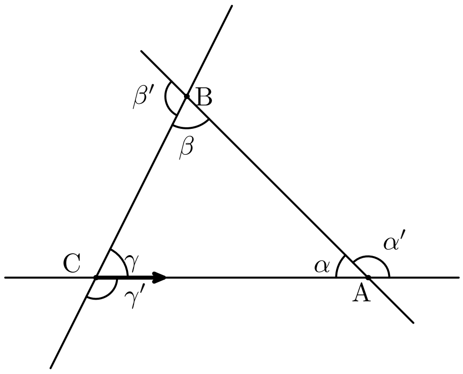
7. Kuinka monta prosenttia kolmio peittää ruudukon pinta-alasta?



2. Kolmion kulmien summa

Teoriaa

Kolmion ABC kulmat ovat α, β ja γ. Nokkaeläin (kuviossa nuoli) lähtee pisteestä C ja kiertää kerran vastapäivään kolmion ABC ympäri palaten



alkuasemaansa. Kärjessä A eläin kääntyy kulman α', kärjessä B kulman β' ja kärjessä C kulman γ'.

A: Kuinka monta astetta eläin kääntyy kaikkiaan, eli kuinka suuri on summa $\alpha' + \beta' + \gamma'$?

B: Täydennä: $\alpha' = 180° - \square$, $\beta' = 180° - \square$, $\gamma' = 180° - \square$.

C: Osoita edellisten kohtien avulla, että

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°.$$

Harjoituksia

8. Määritä suorakulmaisen kolmion terävien kulmien summa.

9. Osoita, että kolmiossa kahden kulman summa on yhtäsuuri kuin kolmannen kulman vieruskulma.

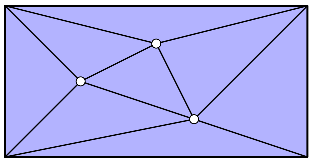
10. Kolmiossa on kaksi yhtäsuurta kulmaa ja kolmas kulma on neljäsosa yhtäsuurien kulmien summasta. Määritä kolmion kulmien asteluvut.

11. Todista, että kolmiossa on vähintään kaksi terävää kulmaa. Ohje: Osoita, että vastaoletus, jonka mukaan teräviä kulmia on enintään yksi, johtaa ristiriitaan.

12. Monikulmio on *kupera*, jos sen mitkä tahansa kaksi sisäpistettä yhdistävä jana on kokonaan monikulmion sisällä. **a)** Mikä kulmia koskeva ehto on voimassa, jos monikulmio on kupera? **b)** Määritä nokkaeläimen avulla kuperan **i)** 4-kulmion, **ii)** 5-kulmion, **iii)** n-kulmion kulmien summa. $\star$**c)** Miten nokkaeläimen avulla lasketaan ei-kuperan monikulmion kulmien summa?

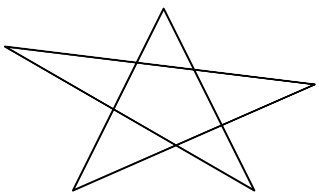
13. Missä monikulmiossa kaikkien kulmien asteluku on 156°?

14. Lasitehtaalla valmistetaan suorakulmion muotoisia lasiruutuja. Toisinaan ruudun sisään jää pieniä ilmakuplia, jolloin ruutu ei kelpaa alkuperäiseen tarkoitukseen. Vialliset ruudut paloitellaan *toisiaan leikkaamattomin viivoin* kolmioiksi siten, että ilmakuplat ja ruudun kärjet ovat kolmioiden kärkinä. Kuvassa olevasta ruudusta, jossa on kolme



ilmakuplaa, saadaan kahdeksan kolmiota kuvan leikkaustavalla. Tee kolmiointi jollakin muulla tavalla. Huomaat, että kolmioiden määrä pysyy samana, vaikka leikkaustapaa muutetaan. **a)** Päättele kokeilemalla yleinen sääntö kolmioiden lukumäärälle, kun ruudussa on n kuplaa. $\star$**b)** *Todista* löytämäsi sääntö oikeaksi.

$\star$**15.** Julkisten rakennusten seinille ilmestyy toisinaan viisisakaraisia tähtiä.

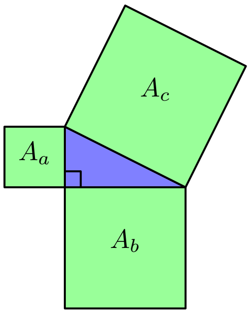


Tämän ja muun töhrimisen korjaaminen vie vuosittain yhteiskunnalta paljon verorahoja. Kuvioon ei luonnollisestikaan liity mitään mystisiä voimia. Se on kuitenkin sikäli mielenkiintoinen, että vaikka se voidaan piirtää äärettömän monella eri tavalla, niin sakarakulmien summa on aina sama vakio. Määritä tämä vakio. Ohje: Huomaa, että kuvion keskelle muodostuu viisikulmio ja että kuviossa on kolmioita, joiden kulmina on sekä sakarakulmia että viisikulmion kulmia.

3. Pythagoraan lause

Teoriaa

Pythagoraan lauseen mukaan suorakulmaisen kolmion kateeteille piirrettyjen neliöiden pinta-alojen summa on sama kuin kolmion hypotenuusalle piirretyn

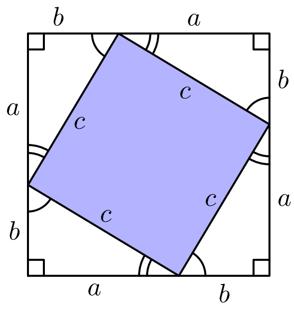


neliön pinta-ala. Siis

$$A_a + A_b = A_c.$$

Tämän lauseen tunsivat jo muinaiset babylonialaiset yli 4000 vuotta sitten, mutta tiettävästi Pythagoras oli ensimmäinen, joka pystyi sen todistamaan. Nettisivulta `www.cut-the-knot.org/pythagoras/index.shtml` löydät lauseelle 115 erilaista todistusta. Seuraavassa on eräs yksinkertaisimmista.

Olkoot suorakulmaisen kolmion kateetit ja hypotenuusa a, b ja c. Muodostetaan neljästä tällaisesta kolmiosta neliö, jonka sivun pituus on $a + b$. Hypotenuusista muodostuu neliön sisään nelikulmio.



A: Miksi c-sivuinen nelikulmio on neliö?

B: Laske ison neliön pinta-ala sivun pituuden $a + b$ avulla.

C: Laske ison neliön pinta-ala pienemmän neliön sekä kolmioiden avulla.

D: Merkitse edellisissä kohdissa laskemasi pinta-alat yhtäsuuriksi, ja johda näin saamastasi yhtälöstä Pythagoraan lause.

Lukion matematiikassa todistetaan myös Pythagoraan lauseen käänteislause, jonka mukaan kolmio on suorakulmainen, jos sen kahden sivun neliöiden summa on kolmannen sivun neliö. Tätä tulosta voit jo nyt käyttää kolmion suorakulmaisuuden toteamiseen.

Harjoituksia

16. Suorakulmaisen kolmion hypotenuusan pituus on 13 ja toisen kateetin pituus on 12. Laske toisen kateetin pituus.

17. Kolmion sivujen pituudet ovat $\sqrt{11}$, 2 ja $\sqrt{7}$. Onko kolmio suorakulmainen?

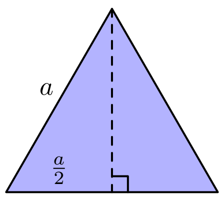
18. Piirrä ruutupaperille neliö, jonka kärjet ovat ruudukon viivojen leikkauspisteissä ja jonka ala on

a) 4, **b)** 2, **c)** 5, **d)** 10.

Vihje: Hyödynnä tarvittaessa Pythagoraan lausetta.

19. Miksi ruutupaperille ei voi edellisen tehtävän tapaan piirtää neliötä, jonka ala on 3?

20. Tasasivuisen kolmion sivun pituus on a. Laske kolmion ala. Ohje: Korkeusjanan ja kolmion sivun leikkauspiste puolittaa sivun.



21. Suorakulmaisen kolmion kateetit ovat **a)** 2 ja 3, **b)** a ja b. Laske hypotenuusaa vastaan piirretyn korkeusjanan pituus.

22. **a)** Janojen pituudet ovat a, b ja c. Mitkä kolme pituuksia koskevaa ehtoa tulee olla voimassa, jotta janoista voidaan muodostaa kolmio?

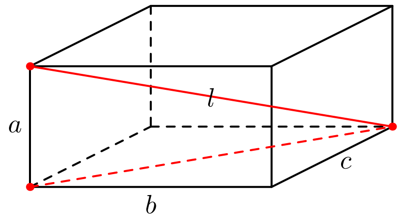
⋆**b)** Lukion geometrian kurssilla osoitetaan, että jokaisen kolmion sisällä on piste, joka on yhtä etäällä kolmion kaikista sivuista. Laske tämä etäisyys, kun kolmion sivujen pituudet ovat 5, 6 ja 7. Ohje: Laske aluksi kolmion pinta-ala.

⋆**23.** Suorakulmion kannan ja korkeuden summa on s ja lävistäjä on d. Laske suorakulmion pinta-ala.

4. Suorakulmainen särmiö

Teoriaa

Suorakulmaisen särmiön sivupintoja kutsutaan *tahkoiksi*, tahkojen leikkausviivoja *särmiksi* (kuviossa a, b ja c) ja särmien yhteisiä pisteitä *kärjiksi*.



Vastakkaisia kärkiä yhdistävä särmiön sisällä oleva jana (kuviossa l) on särmiön *avaruuslävistäjä*. Seuraavissa harjoituksissa käsitellään särmiöön ja sen osiin liittyviä perusasioita.

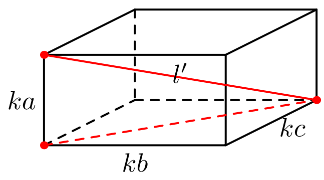
Harjoituksia

24. Miten särmiön tilavuus V lasketaan, kun särmät a, b ja c tunnetaan? Kertaa tarvittaessa nämä asiat Solmun diplomitehtävistä (diplomi V).

25. Määritä särmiön pinta-ala A, kun särmät ovat a, b ja c.

26. Suorakulmaisen särmiön särmät ovat a, b ja c. Laske särmiön avaruuslävistäjän l pituus. Ohje: Laske aluksi pohjatahkon lävistäjän pituuden neliö.

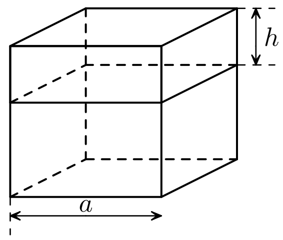
27. Yllä olevaa särmiötä venytetään (tai kutistetaan) kertomalla sen kaikki särmät positiivisella vakiolla k. Laske näin saadun särmiön tilavuus,



pinta-ala ja avaruuslävistäjä sekä niiden suhteet alkuperäisen särmiön vastaaviin suureisiin.

28. Kuution **a)** tahkon lävistäjän, **b)** avaruuslävistäjän pituus on 6 pituusyksikköä. Laske kuution tilavuus ja pinta-ala.

29. Kuution särmän pituus on a. Tästä kuutiosta on leikattu pois suora-



kulmainen särmiö, jonka korkeus on h. Laske jäljelle jääneen osan tilavuus.

30. Suorakulmaisen särmiön sivutahkojen alat ovat 2, 3 ja 6 pinta-alayksikköä. Laske särmiön tilavuus.

31. Suorakulmaisen särmiön muotoisen kymmenen metriä pitkän hallin päätyseinät ovat neliöitä, joiden sivun pituus on viisi metriä. Toisen päätyseinän keskikohdassa katonrajassa on piste A, ja toisen päätyseinän keskikohdassa lattianrajassa on piste B. Kuinka pitkä on muurahaisen lyhin reitti A:sta B:hen? Vihje: Oikea vastaus *ei ole* 15 m.

32. **a)** Olkoot a, b ja c ei-negatiivisia reaalilukuja. Miksi

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \leq a + b + c?$$

b) Olkoot a, b ja c ei-negatiivisia reaalilukuja. Milloin

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = a + b + c?$$

c) Keksi esimerkki luvuista a, b ja c, joille

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} > a + b + c$$

33. Onko olemassa suorakulmainen särmiö, jonka avaruuslävistäjän sekä särmien pituudet ovat kokonaislukuja?

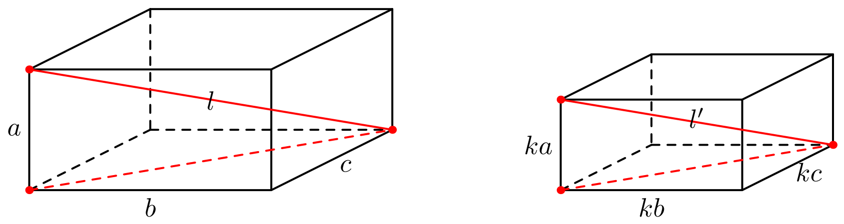
5. Yhdenmuotoisuudesta

Teoriaa

Rakennuksen pohjapiirros on usein tehty mittakaavassa $1 : 100$, mikä tarkoittaa sitä, että 1 cm piirroksessa vastaa 100 cm eli yhtä metriä rakennuksessa. Rakennuksen sivu- ja päätyseinät ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, ja nämä suorat kulmat ovat myös piirroksessa. Siis piirroksessa olevien janojen pituuksien suhde rakennuksessa oleviin vastinpituuksiin on aina sama $1 : 100$ ja näiden janojen väliset kulmat ovat samat piirroksessa ja rakennuksessa. Piirros ja rakennuksen pohja ovat *yhdenmuotoiset mittakaavassa* $1 : 100$ ja niiden pinta-alojen suhde on $1 : 10000$.

Yhdenmuotoisissa kuvioissa ja kappaleissa siis vastinsivujen pituuksien suhde on vakio ja vastinkulmat ovat yhtäsuuret. Jatkossa rajoitutaan tapauksiin, joissa yhdenmuotoisuus on ilmeistä.

Pallot, vaikka niissä ei kulmia olekaan, ovat keskenään yhdenmuotoisia, samoin ympyrät, neliöt ja kuutiot. Kuvion särmiöt ovat yhdenmuotoisia,



sillä niissä vastinpituuksien suhde on k ja vastinkulmat ovat samat.

Harjoituksia

34. Kuutioiden särmien pituudet ovat **a)** 3 m, ja 5 m, **b)** a ja b. Laske kuutioiden pohjien pinta-alojen suhde ja kuutioiden tilavuuksien suhde.

35. Kun A4-arkki puolitetaan pitempää sivua vastaan kohtisuoralla leikkauksella, saadaan alkuperäisen arkin kanssa yhdenmuotoinen A5-arkki. Laske A4:n lyhyempi sivu, kun pitemmän sivun pituus on a?

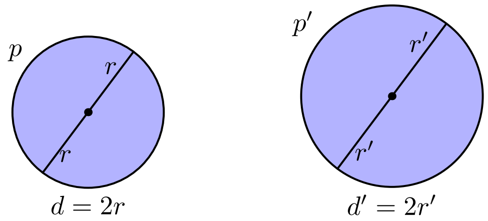
36. Kaksi A4-arkkia liitetään A3-arkiksi, joka on yhdenmuotoinen A4-arkin kanssa. Kuinka pitkiä ovat A3:n sivut, kun A4:n sivut ovat edellisessä tehtävässä annetut?

⋆**37.** Osoita, että kaikki paraabelit $y = ax^2$ $(a > 0)$ ovat yhdenmuotoisia paraabelin $y = x^2$ kanssa.

6. Ympyröistä

Teoriaa

Ympyrät ovat keskenään yhdenmuotoiset. Vastinpituuksia ovat esimerkiksi



halkaisijat d ja d' sekä kehien pituudet p ja p'. Jos mittakaava on k, niin

$$\frac{d'}{d} = k \qquad \text{ja} \qquad \frac{p'}{p} = k,$$

mistä seuraa

$$\frac{d'}{d} = \frac{p'}{p}, \quad \text{ja edelleen} \quad \frac{p}{d} = \frac{p'}{d'}. \quad \text{(ks. harjoitus 38. alla.)}$$

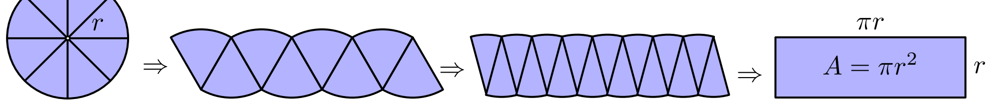
Näemme, että kehän pituuden suhde halkaisijaan yhdessä ympyrässä on sama kuin kehän pituuden suhde halkaisijaan toisessa ympyrässä, joten tämä suhde on ympyrän koosta riippumaton vakio eli se on sama kaikissa ympyröissä. Suhde merkitään kreikkalaisella π-kirjaimella (luetaan "pii"). Saamme yhtälön

$$\frac{p}{d} = \pi \quad \text{eli} \quad p = \pi d, \quad \text{ja koska} \quad d = 2r, \quad \text{on} \quad p = 2\pi r.$$

Ympyrän kehän pituus eli *piiri* on siis $p = 2\pi r$.

Nykyisin tiedetään, että π on irrationaaliluku ja se on laskettu miljardien desimaalien tarkkuudella. Yleisesti käytetty likiarvo on $\pi \approx 3{,}14$.

Leikkaamalla ympyrä parilliseksi määräksi *sektoreita* ja kokoamalla näin saatu palapeli kuvasarjan mukaisesti, saadaan sitä tarkemmin suorakulmio, mitä pienempiin sektoreihin ympyrä jaetaan. Tämän suorakulmion korkeus



on r ja kanta on puolet ympyrän kehästä, siis πr. Niinpä ympyrän ala on $A = r \cdot \pi r = \pi r^2$. Arkhimedes[1] päätteli ympyrän alan tällä tavalla noin 2200 vuotta sitten!

[1]Ks. `http://matematiikkalehtisolmu.fi/2000/mathist/html/kreikka/`

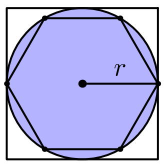
Harjoituksia

38. Osoita, että verranto

$$\frac{d'}{d} = \frac{p'}{p} \quad \text{voidaan kirjoittaa muotoon} \quad \frac{p}{d} = \frac{p'}{d'}.$$

39. Piirrä ympyrä. Valitse kehältä piste ja siitä alkaen säteen mittaisia jänteitä vastaavia kaaria. Kuinka moneen osaan ympyrän kehä jakautuu?

40. **a)** Osoita kuviossa olevien *ympyrän sisään piirretyn säännöllisen kuusi-*



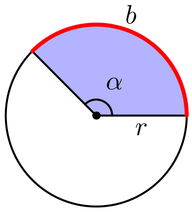
kulmion ympyrän ja *ympyrän ympäri piirretyn neliön* piirejä vertailemalla, että $3 < \pi < 4$.

⋆b) Osoita, että jos yksikköympyrän (säde on 1) sisään piirretyn säännöllisen n-kulmion sivun pituus on a_n, niin saman ympyrän sisään piirretyn $2n$-kulmion sivun pituus on

$$a_{2n} = \frac{a_n}{\sqrt{2+\sqrt{4-a_n^2}}}.$$

Miten tästä saadaan menetelmä π:n likiarvon määrittämiseksi?

41. Päättele *keskuskulmaa* α vastaavan r-säteisen sektorin ala A_s ja tätä

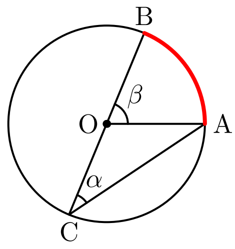


keskuskulmaa vastaavan kaaren pituus b. Osoita, että $A_s = \frac{1}{2}br$.

7. Kehä- ja keskuskulmista

Teoriaa

Kuviossa α ja β ovat samaa kaarta AB vastaavat *kehäkulma* ja *keskuskulma*



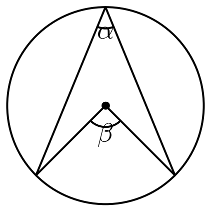
ja BC on ympyrän halkaisija. *Kaaren AB asteluku* on sama kuin kaarta vastaavan keskuskulman asteluku. Tehtäväsi on perustella, miksi kehäkulman asteluku on puolet vastaavan keskuskulman (kaaren) asteluvusta. Mieti ensin,

A: miksi yllä olevassa erikoistapauksessa kulma $\angle OAC = \alpha$,

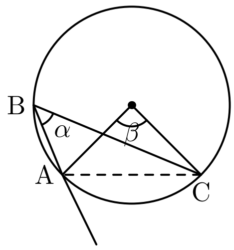
B: ja miksi $\beta = 2\alpha$?

Harjoituksia

42. Perustele ylläolevan erikoistapauksen avulla, miksi $\beta = 2\alpha$.



43. Miksi $\beta = 2\alpha$ allaolevassa kuviossa? Mitä tapahtuu kulmalle α



ja sen kyljille, kun piste B liukuu pisteen A päälle?

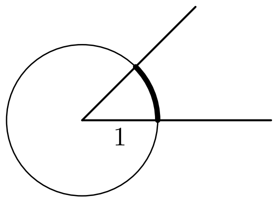
44. Olkoon AB erään ympyrän halkaisija ja P ($\neq A, B$) kehäpiste. Osoita, että $PA \perp PB$.

8. Mikä on aste?

Teoriaa

Edellä on käytetty astetta kulman suuruuden mittana, mutta tätä yksikköä ei ole vielä määritelty. Se määritellään ympyrän kaaren avulla.

Kulman kärki keskipisteenä piirretyn 1-säteisen ympyrän eli *yksikköympyrän* kaaresta jää osa kulman kylkien väliin. Tämän osan pituus sopii hyvin



kulman mittaluvuksi. Historiallisista syistä (muinainen Babylonia, jossa käytettiin 60-järjestelmää) yksikköympyrä on tapana jakaa 360:een osaan, ja yksi tällainen osa on *aste*, joka merkitään 1°. Koska yksikköympyrän kehän pituus on 2π, on siis

$$360^\circ = 2\pi, \quad \text{eli} \quad 1^\circ = \frac{\pi}{180}.$$

Kulman kylkien väliin jäävän yksikköympyrän kaaren pituutta sanotaan kulman *radiaaniluvuksi*, mikä toisinaan lyhennetään rad.

Harjoituksia

45. Täydennä taulukko annettujen kulmien radiaaniluvuilla.

180°	90°	45°	30°	60°	120°

46. Täydennä taulukko annettujen kulmien asteluvuilla.

$\pi/8$	$3\pi/4$	$3\pi/2$	$\pi/10$	1	0,0625

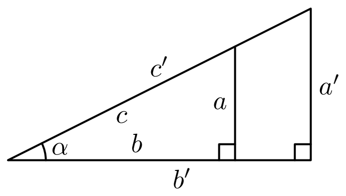
47. Kuinka monta **a)** astetta, **b)** radiaania kellon tuntiosoitin kääntyy seitsemässä minuutissa?

9. Trigonometriaa

Teoriaa

Pidetään selvänä, että jos kahdessa kolmiossa vastinkulmat ovat samat, niin kolmiot ovat yhdenmuotoiset. Kahden vastinkulmaparin yhtäsuuruus tietenkin riittää, sillä kolmannet kulmat ovat tällöin yhtäsuuret kulmasummalauseen perusteella. Tämä tulos on nimeltään *kolmioiden yhdenmuotoisuuslause kk*.

Kuvion suorakulmaiset kolmiot ovat yhdenmuotoiset, sillä niillä on suorat



kulmat ja yhteinen terävä kulma α. Koska

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} \quad (= \text{suurennussuhde}),$$

saadaan verrannot

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b}, \qquad \frac{a'}{a} = \frac{c'}{c} \quad \text{ja} \quad \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c},$$

mistä seuraa

$$\frac{a'}{b'} = \frac{a}{b}, \qquad \frac{a'}{c'} = \frac{a}{c} \quad \text{ja} \quad \frac{b'}{c'} = \frac{b}{c}.$$

Siis esimerkiksi kulman vastaisen kateetin suhde viereiseen kateettiin on kolmion koosta riippumaton. Se riippuu vain kulman suuruudesta. Jos pidetään kulman viereinen kateetti vakiona ja vaihdellaan vastaisen kateetin pituutta, niin kulmakin muuttuu.

Vastaavasti kulman vastaisen kateetin suhde hypotenuusaan ja kulman viereisen kateetin suhde hypotenuusaan ovat kolmion koosta riippumattomia, yksinomaan kulmalle ominaisia lukuja.

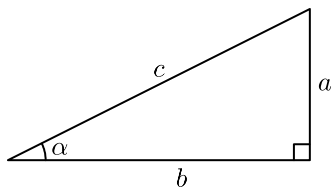
Nämä kolmion koosta riippumattomat suhteet nimetään seuraavasti:

$$\sin\alpha = \frac{\text{vastainen kateetti}}{\text{hypotenuusa}},$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{viereinen kateetti}}{\text{hypotenuusa}},$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{vastainen kateetti}}{\text{viereinen kateetti}}.$$

Kuvion



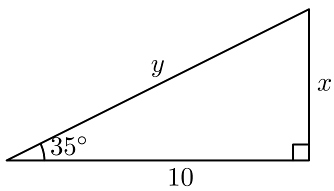
kolmiossa siis

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}, \qquad \cos\alpha = \frac{b}{c} \quad \text{ja} \quad \tan\alpha = \frac{a}{b}.$$

Suhteiden nimet ovat suomeksi sini, kosini ja tangentti. Niitä sanotaan kulman α *trigonometrisiksi funktioiksi*, ja niiden (liki)arvot saadaan laskimesta.

Harjoituksia

48. Laske kolmion



tuntemattomiksi merkityt osat.

49. Kolmion sivujen pituudet ovat 3, 4 ja 5. Osoita, että kolmio on suorakulmainen ja määritä sen terävät kulmat asteen tarkkuudella. (Tutustu laskimen ohjekirjasta trigonometristen funktioiden käänteiseen käyttöön.)

50. Neliön lävistäjä puolittaa suoran kulman ja tasasivuisen kolmion korkeusjana puolittaa kolmion kulman ja sen vastaisen sivun. Täydennä tämän perusteella (laskimetta) taulukko *tarkoilla arvoilla*, esim. $\sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

	sin	cos	tan
30°			
45°			
60°			

51. Olkoot kolmion $\triangle$ terävän kulman α kyljet a ja b. Osoita, että

$$A_\triangle = \tfrac{1}{2}ab\sin\alpha.$$

52. Piirrä ympyrä. Valitse sen kehältä piste ja piirrä se keskipisteenä ympyrän keskipisteen kautta kulkeva kaari, joka leikkaa ympyrän kehää kahdessa pisteessä. Toista menettely käyttäen nyt keskipisteinä äsken piirtämäsi kaaren ja ympyrän kehän leikkauspisteitä. Jatkamalla näin saat lopulta alkuperäisen ympyrän sisään kuusiterälehtisen kukan. Kuinka monta prosenttia se peittää ympyrän alasta? (Tarkka arvo ja likiarvo.)

53. Suorakulmaisen kolmion kateetit ovat a ja b. Kolmion sisään asetetaan neliö, jonka kaksi sivua yhtyvät kateetteihin ja yksi kärki on hypotenuusalla. Laske neliön ala.

54. Neliön kärjen kautta on piirretty kaksi suoraa, jotka jakavat neliön alan kolmeen yhtäsuureen osaan. Laske suorien välinen kulma asteen tarkkuudella.

55. Olkoot α ja γ kolmion terävät kulmat ja a sekä c niiden vastaiset sivut. Osoita, että

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

56. Laske laskimella summa

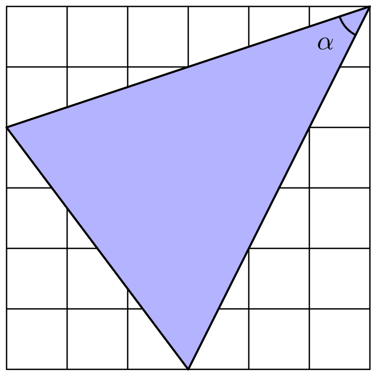
$$(\sin 39°)^2 + (\cos 39°)^2.$$

57. Edellisen tehtävän tulos ei ollut sattuma, vaan yhtälö

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

on voimassa kaikilla kulmilla α. Todista tämä väite teräville kulmille. Ohje: Sovella Pythagoraan lausetta. (Trigonometristen funktioiden potensseja merkitään lyhyesti $\sin^2\alpha$, $\cos^7 2t$, $\tan^n 4z$ jne... .)

58. Määritä kulma α asteen tarkkuudella.



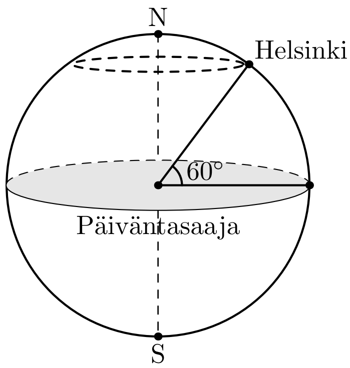
59. Osoita, että

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

60. Tiedetään, että $\sin\alpha = \frac{1}{4}$. Määritä (laskimetta) $\cos\alpha$ ja $\tan\alpha$.

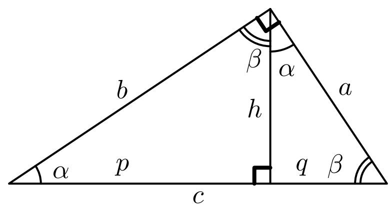
⋆**61.** Tiedetään, että $\tan\alpha = 7$. Määritä (laskimetta) $\sin\alpha$ ja $\cos\alpha$.

62. **a)** Helsinki sijaitsee 60:llä (pohjoisella) leveyspiirillä, eli maapallon keskipisteestä Helsinkiin piirretty jana muodostaa 60°:een kulman Päiväntasaajan tason kanssa. Kuinka pitkä tämä leveyspiiri on? Maapallon ympärysmitta on 40000 km.



b) Lentokone lentää erästä pohjoista leveyspiiriä pitkin auringonlaskua kohti nopeudella 780 km/h. Millä leveyspiirillä lennetään, kun Aurinko pysyy koko ajan horisontissa?

63. Olkoot suorakulmaisen kolmion kateetit ja hypotenuusa a, b ja c, sekä terävät kulmat α ja β kuvion mukaisesti. Hypotenuusaa vastaan



piirretty korkeusjana h jakaa kolmion kahdeksi alkuperäisen kolmion kanssa yhdenmuotoiseksi kolmioksi. Korkeusjanan ja hypotenuusan yhteinen piste jakaa hypotenuusan osiin p ja q. Täydennä yhtälöketjut

a) $\sin\alpha = \dfrac{a}{c} = \dfrac{\square}{\square} = \dfrac{\square}{\square},$

b) $\cos\alpha = \dfrac{b}{c} = \dfrac{\square}{\square} = \dfrac{\square}{\square},$

c) $\tan\alpha = \dfrac{a}{b} = \dfrac{\square}{\square} = \dfrac{\square}{\square},$

d) $\sin\beta = \dfrac{b}{c} = \dfrac{\square}{\square} = \dfrac{\square}{\square},$

e) $\cos\beta = \dfrac{a}{c} = \dfrac{\square}{\square} = \dfrac{\square}{\square},$

f) $\tan\beta = \dfrac{b}{a} = \dfrac{\square}{\square} = \dfrac{\square}{\square}.$

g) Osoita kohtien a – f avulla, että $h = \sqrt{pq}$.

h) Todista kohtien a – f avulla Pythagoraan lause.

64. Kulman α kotangentti $\cot\alpha$ on α:n tangentin käänteisluku. Osoita, että

$$\tan\alpha + \cot\alpha = \frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}.$$

10. Avaruusgeometriaa

Teoriaa

Yläkoulussa kappaleiden tilavuuksien ja osin pinta-alojenkin kaavat annetaan valmiina. Niiden matemaattisiin johtamisiin päästään vasta lukion integraalilaskennan yhteydessä. Niinpä otamme tässä lähtökohdiksi valmiit tilavuus- ja pinta-alakaavat. Merkitään seuraavassa suoran lieriön ja kartion pohjan pinta-alaa A:lla ja korkeutta h:lla. Pallon säde olkoon r. Seuraavat kaavat ovat voimassa:

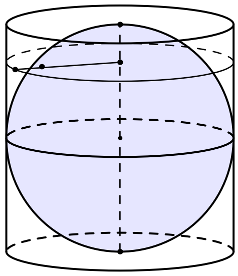
$$V_{\text{lieriö}} = Ah, \quad V_{\text{kartio}} = \frac{1}{3}Ah, \quad V_{\text{pallo}} = \frac{4}{3}\pi r^3, \quad A_{\text{pallo}} = 4\pi r^2.$$

Suoran lieriön vaippa suoristuu tasoon suorakulmioksi, kun se leikataan auki pohjaa vastaan kohtisuoraa viivaa pitkin. Suoran ympyräpohjaisen kartion vaippa suoristuu tasoon ympyräsektoriksi. Pallon pinta ei suoristu tasoon. Vaikka siitä leikkaisi kuinka pienen osan tahansa, osassa säilyy aina pallolle ominainen kuperuus. Siitä huolimatta pallon pinta-ala on voitu määrittää. Pinta-alakaava johdetaan jakamalla pallon pinta äärettömään määrään äärettömän pieniä palasia ja laskemalla palasten lähes tasomaiset pinta-alat yhteen. Tämä vaikeasti ymmärrettävä ajatus toteutunee alustavasti lukion integraalilaskennassa. Se täsmentyy myöhemmin yliopistollisilla matemaattisen analyysin kursseilla.

Harjoituksia

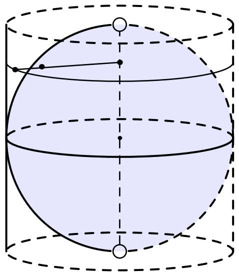
65. Osoita, että jos suoran ympyräpohjaisen lieriön vaippa ja pohjat sivuavat palloa, niin lieriön vaipan ja pallon pinta-alat ovat yhtäsuuret.

66. Maapallo voidaan projisoida lieriön pinnalle. Näin saadaan yksilehtinen



kartta koko pallosta. Mitkä osat pallosta kuvautuvat lähes oikein? Mitkä osat vääristyvät pahasti. Miten kuvautuvat navat, meridiaanit ja leveyspiirit?

67. Poistamalla pallosta navat ja niitä yhdistävä isoympyrän kaari saadaan

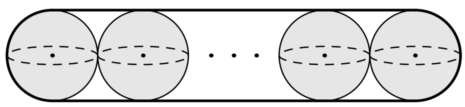


yksi-yhteen kuvaus pallon pinnalta reunattomalle suorakulmiolle. Yksi-yhteen tarkoittaa sitä, että jokaista aukileikatun pallopinnan pistettä vastaa täsmälleen yksi reunattoman suorakulmion piste ja kääntäen, jokaista reunattoman suorakulmion pistettä vastaa täsmälleen yksi aukileikatun pallopinnan piste. Molemmilla pinnoilla on siis yhtä paljon pisteitä. Voisi kuvitella, että tällainen vastaavuus johtuisi siitä, että pallolla ja sitä ympäröivällä lieriön vaipalla on sama pinta-ala. Totea, että näin ei kuitenkaan ole osoittamalla, että kaikilla pallopinnoilla on sama määrä pisteitä.

68. Reaalilukuakselin avoin väli $]a\,,b[$ sisältää kaikki reaaliluvut x, joille $a < x < b$. Osoita sopivalla geometrisella konstruktiolla, että kaikissa väleissä $]0, r[$ on yhtä paljon reaalilukuja.

69. Olkoot n palloa suorassa ympyräpohjaisessa lieriössä, jonka vaippa sivuaa palloja ja pohjat päätypalloja. Kuinka suuren osuuden pallot täyttävät lieriöstä?

70. Sama kysymys kuin edellisessä tehtävässä, mutta nyt lieriön päät on



n palloa

pyöristetty päätypallojen pintoja myötäileviksi. Mitä tilavuuksien suhteelle tapahtuu, kun n kasvaa suureksi?

Liite 1: Toiminnallista matematiikkaa

Pallon tilavuus

Pallon tilavuus on verrannollinen säteen kuutioon ja kertoimena on myös π samalla tavalla kuin ympyrän pinta-alan kaavassa. Voimme siis olettaa, että

$$V_{\text{pallo}} = k \cdot \pi r^3, \tag{1}$$

missä k on toistaiseksi tuntematon vakio. Sen määrittämiseksi täytyy tehdä mittauksia. Otetaan siis tarkasteltavaksi sopivan kokoinen pallo, vaikkapa isohko kuulalaakerin kuula. Mitataan työntömitalla sen halkaisija. Tilavuus määritetään katsomalla pallon mittalasissa syrjäyttämä vesimäärä. Koska sekä tilavuus että säde nyt tunnetaan, saadaan k ratkaistua yhtälöstä (1).

Pallon pinta-ala

Pallon pinta-alan määrittäminen kokeellisesti onnistuisi parhaiten pingispallon avulla, jos olisi saatavilla samasta materiaalista tasomaista levyä. Mitataan aluksi pingispallon halkaisija d työntömitalla. Leikataan sitten levymäisestä materiaalista suorakulmio, jonka sivut ovat d ja πd. Jos mittaukset on tehty huolella, niin pallo ja suorakulmio painavat yhtä paljon. Niiden pinta-alat ovat siis samat. Suorakulmion pinta-ala on $\pi d^2 = 4\pi r^2$, mikä siis on myös pallon pinta-ala.

Perusalgebraa

Kun pallon tilavuus tunnetaan, voidaan sen pinta-ala johtaa myös peruskoulun algebraa soveltaen. Tarkastellaan samankeskisiä palloja, joiden säteiden erotus on h. Olkoon isompi pallo r-säteinen jolloin pienemmän pallon säde on $r-h$. Pienemmän pallon pinta-ala A_h lähestyy isomman pallon pinta-alaa A, kun h lähestyy nollaa. Pallojen tilavuuksien erotus on pallon kuori, jonka paksuus on h. Ajatellaan kuori jaetuksi moneen hyvin pieneen osaan, jotka levitetään tasoon. Koska osat ovat pieniä, ne ovat lähes tasomaisia. Ne ovat h:n korkuisia lieriöitä, joiden tilavuuksien summa on $A_h \cdot h$. Toisaalta tämä tilavuus on myös $\frac{4}{3}\pi r^3 - \frac{4}{3}\pi(r-h)^3$. Niinpä

$$A_h = \tfrac{4}{3}\pi\frac{r^3-(r-h)^3}{h} = \tfrac{4}{3}\pi\frac{3r^2h-3rh^2+h^3}{h} = \tfrac{4}{3}\pi\Big(3r^2-3rh+h^2\Big).$$

Selvästi

$$A_h \longrightarrow \frac{4}{3}\pi \cdot 3r^2 = 4\pi r^2, \quad \text{kun} \quad h \to 0.$$

Liite 2: Vastauksia ja ratkaisuohjeita

1. Ohjeessa annetuin nimityksin vasemmanpuoleisessa tapauksessa pinta-ala on

$$\tfrac{1}{2}uh + \tfrac{1}{2}vh \;=\; \tfrac{1}{2}(u+v)h \;=\; \tfrac{1}{2}ah$$

ja oikeanpuoleisessa tapauksessa pinta-ala on

$$\tfrac{1}{2}(a+c)h - \tfrac{1}{2}ch \;=\; \tfrac{1}{2}ah + \tfrac{1}{2}ch - \tfrac{1}{2}ch \;=\; \tfrac{1}{2}ah.$$

2. Lävistäjä jakaa suunnikkaan kahdeksi kolmioksi, joiden yhteinen korkeus on yhdensuuntaisten sivujen välinen etäisyys h. Näiden kolmioiden kannat ovat myös yhtäsuuret, sillä suunnikkaan vastakkaiset sivut ovat yhtä pitkät. Jos tämä pituus on a, niin suunnikkaan ala

$$A \;=\; 2 \cdot \tfrac{1}{2}\,ah \;=\; ah.$$

3. Olkoot puolisuunnikkaan yhdensuuntaiset sivut a ja b sekä niiden välinen etäisyys h. Lävistäjä jakaa puolisuunnikkan kahdeksi kolmioksi, joiden alojen summa on kysytty pinta-ala. Siis

$$A \;=\; \tfrac{1}{2}ah + \tfrac{1}{2}bh \;=\; \tfrac{a+b}{2}\,h.$$

4. $A \;=\; a^2 - ah \;=\; a(a-h)$.

5. Lävistäjien u ja v leikkauspiste jakaa v:n osiin h ja $v-h$. Lävistäjä u jakaa nelikulmion kahdeksi kolmioksi, joiden yhteinen kanta on u ja korkeudet h ja $v-h$. Pinta-ala on siis

$$A \;=\; \tfrac{1}{2}uh + \tfrac{1}{2}u(v-h) \;=\; \tfrac{1}{2}u(h+v-h) \;=\; \tfrac{1}{2}uv.$$

6. **a)** $mx + (n-m)y$, **b)** $ab - c(a-2d)$.

7. $41\tfrac{2}{3}\%$. (Vähennä neliön alasta kolmen suorakulmaisen kolmion alat.)

8. $90°$.

9. Olkoot kolmion kulmat α, β ja γ ja γ:n vieruskulma δ. Tällöin $\delta + \gamma = 180°$. Toisaalta myös $(\alpha+\beta)+\gamma = 180°$. Siis $\alpha + \beta = \delta$.

10. Kulmat ovat α, α ja $\frac{1}{4}(\alpha+\alpha)$. Saadaan yhtälö

$$\alpha+\alpha+\tfrac{1}{4}(\alpha+\alpha) \;=\; 180^\circ,$$

josta $\alpha = 72^\circ$. Kolmas kulma on 36°.

11. Jos teräviä kulmia on enintään yksi, niin suoria tai tylppiä kulmia on vähintään kaksi. Niiden summa on vähintään oikokulma, joten saadaan ristiriita. Siis kolmiossa on vähintään kaksi terävää kulmaa.

12. **a)** Jokainen kulma on oikokulmaa pienempi. **b)** Kuperan n-kulmion vieruskulmien summa on 360°, mistä seuraa, että sisäkulmien summa on $(n-2)\cdot 180^\circ$. $\star$**c)** Sovitaan vastapäivään tapahtuvat kierrot positiivisiksi ja myötäpäivään tapahtuvat negatiivisiksi. Jos monikulmiossa on kovera kulma α, niin eläimen suorittama kääntö on negatiivinen $180^\circ-\alpha$. Kiertojen summa on edelleen 360°, joten n-kulmion kulmien summaksi saadaan $(n-2)\cdot 180^\circ$ samalla tavalla kuin kuperan kulmion tapauksessa.

13. Olkoon kyseessä säännöllinen n-kulmio. Saamme yhtälön

$$\frac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n} \;=\; 156^\circ,$$

jonka ratkaisu $n = 15$.

14. Kaikkien kolmioiden kaikkien kulmien summa on

$$n\cdot 360^\circ + 4\cdot 90^\circ \;=\; (n+1)\cdot 360^\circ \;=\; (2n+2)\cdot 180^\circ,$$

joten kolmioita on $2n+2$ kappaletta.

15. Sakarakulmat ovat vastapäiväisessä kiertojärjestyksessä α_k, $k = 1, 2, 3, 4, 5$, ja Σ niiden summa. Kuvion sisään jäävän kuperan 5-kulmion kulmat olkoot vastapäiväisessä kiertojärjestyksessä A, B, C, D, ja E siten, että kuviossa on kolmio, jonka kulmat ovat α_1, A ja α_4. Saamme yhtälöryhmän

$$\begin{cases} \alpha_1 + A + \alpha_4 &= 180^\circ \\ \alpha_2 + B + \alpha_5 &= 180^\circ \\ \alpha_3 + C + \alpha_1 &= 180^\circ \\ \alpha_4 + D + \alpha_2 &= 180^\circ \\ \alpha_5 + E + \alpha_3 &= 180^\circ, \end{cases}$$

jonka yhtälöiden summa

$$2\Sigma + (A + B + C + D + E) \;=\; 5 \cdot 180^\circ.$$

Koska $A + B + C + D + E = 3 \cdot 180^\circ$, saadaan tästä $\Sigma = 180^\circ$.

16. Olkoon a kysytty kateetti. Pythagoraan lauseen mukaan

$$a^2 + 12^2 \;=\; 13^2,$$

joten

$$a^2 \;=\; 13^2 - 12^2 \;=\; (13 + 12) \cdot (13 - 12) \;=\; 25 \cdot 1 \;=\; 25.$$

Siis $a^2 = 25$ ja $a = \pm 5$. Koska $a > 0$, vain $a = 5$ kelpaa vastaukseksi.

17. Sivujen pituudet toteuttavat Pythagoraan yhtälön,

$$2^2 + \sqrt{7}^{\,2} \;=\; 4 + 7 \;=\; 11 \;=\; \sqrt{11}^{\,2},$$

joten kolmio on suorakulmainen.

18. Jotta neliön pinta-ala olisi 5 ruutua, olisi sivun pituuden oltava $\sqrt{5}$. Siirtymällä yhdestä leikkauspisteestä yksi ruutu oikealle ja kaksi ruutua ylös päädyt toiseen leikkauspisteeseen, ja näin saatujen pisteiden välinen etäisyys on $\sqrt{5}$. Vaadittu neliö löytyy nyt helposti. Lisäkysymys: Ruutupaperille on helppo piirtää viivaston leikkauspisteet kärkinä oleva neliö, jonka pinta-ala on 100 ruutua. Miten piirretään neliö, jonka kärjet ovat leikkauspisteitä ja pinta-ala on 101 ruutua?

19. Tiedetään, että $\sqrt{2} < \sqrt{3} < 2$. Piirrä leikkauspiste keskipisteenä ympyrä, jonka säde on 2. Sen sisään ei selvästikään jää yhtään leikkauspistettä, jonka etäisyys keskipisteestä olisi $\sqrt{3}$.

20. $\frac{1}{4}\, a^2 \sqrt{3}$.

21. **a)** $\frac{6}{\sqrt{13}}$, **b)** $ab/\sqrt{a^2 + b^2}$.

22. **a)** On oltava $a + b > c$, $b + c > a$, $c + a > b$.

⋆b) Pituudet 5, 6, 7 toteuttavat a-kohdan ehdot. Lasketaan aluksi kolmion pisintä sivua vastaavan korkeusjanan pituus soveltamalla Pythagoraan lausetta korkeusjanan alkuperäisestä kolmiosta erottamiin osakolmioihin. Kolmion pinta-ala on $6\sqrt{6}$. Kysytty etäisyys r toteuttaa yhtälön

$$\frac{5r}{2}+\frac{6r}{2}+\frac{7r}{2} = 6\sqrt{6}, \quad \text{joten} \quad r=\tfrac{2}{3}\sqrt{6}.$$

23. Olkoot suorakulmion sivujen pituudet u ja v, jolloin pinta-ala $A=uv$. Tehtävässä annetujen tietojen mukaan $u+v=s$ ja $u^2+v^2=d^2$. Niinpä saamme

$$s^2=(u+v)^2=u^2+v^2+2uv = d^2+2A, \quad \text{joten} \quad A = \tfrac{1}{2}(s^2-d^2).$$

24. $V=abc$.

25. $A=2(ab+bc+ca)$.

26. $l=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

27. $V':V=k^3, \quad A':A=k^2 \quad$ ja $\quad l':l=k$.

28. **a)** Jos sivutahkon lävistäjän pituus on 6, niin särmän pituus on $6/\sqrt{2}=3\sqrt{2}$. Pinta-ala

$$A = 6\cdot(3\sqrt{2})^2 = 108.$$

Tilavuus

$$V = \left(3\sqrt{2}\right)^3 = 27\cdot 2\sqrt{2} = 54\sqrt{2}.$$

b) Jos avaruuslävistäjän pituus on 6, niin särmän pituus on $6/\sqrt{3}=2\sqrt{3}$. Pinta-ala

$$A=6\cdot(2\sqrt{3})^2=72.$$

Tilavuus

$$V = \left(2\sqrt{3}\right)^3 = 8\cdot 3\sqrt{3} = 24\sqrt{3}.$$

29. $a^3-a^2h = a^2(a-h)$.

30. Olkoot särmien pituudet u, v ja w. Tällöin $V = uvw$. Sivutahkojen pinta-ala

$$uv = 2, \quad vw = 3, \quad wu = 6.$$

Kertomalla nämä yhtälöt keskenään saadaan

$$2 \cdot 3 \cdot 6 = uv \cdot vw \cdot wu = (uvw)^2 = V^2,$$

josta seuraa $V = 6$.

31. 14,58 m. Ohje: Leikkaa huone auki ja levitä se tasoon.

32. **a)** Suorakulmaisessa särmiössä avaruuslävistäjän pituus on pienempi kuin särmien pituuksien summa.

b) Yhtäsuuruus vallitsee, jos luvuista a, b, c enintään yksi on positiivinen.

c) Epäyhtälö on voimassa, jos $a + b + c < 0$.

33. Jos esimerkiksi särmien pituudet ovat 2, 3 ja 6, niin avaruuslävistäjän pituus on 7.

34. **a)** $A_3 : A_5 = (\frac{3}{5})^2$ ja $V_3 : V_5 = (\frac{3}{5})^3$.

b) $A_a : A_b = (\frac{a}{b})^2$ ja $V_a : V_b = (\frac{a}{b})^3$.

35. $a/\sqrt{2}$.

36. $a\sqrt{2}$.

⋆**37.** Kertomalla yhtälö $y = ax^2$, (a > 0), a:lla saadaan $ay = (ax)^2$. Merkitsemällä $x' = ax$ ja $y' = ay$ yhtälö tulee muotoon $y' = x'^2$.

38. Tavoite saavutetaan kertomalla verranto

$$\frac{d'}{d} = \frac{p'}{p}$$

nimittäjien tulolla ja jakamalla näin saatu yhtälö halkaisijoiden tulolla.

39. Ympyrän kehä jakaantuu kuuteen yhtäsuureen osaan. Tämän tunsivat mm. muinaiset Babylonialaiset yli 4000 vuotta sitten.

40. **a)** Kuvion merkinnöillä saamme piireistä kaksoisepäyhtälön

$$6r < 2\pi r < 8r,$$

mistä väite seuraa.

$\star$**b)** Piirrä säde, joka on kohtisuorassa n-kulmion sivua a_n vastaan. Leikkauspiste puolittaa sivun a_n sekä tätä sivua vastaavan kaaren. Yhdistä sivun a_n ja säteen päätepisteet janalla. Sen pituus on a_{2n}. Säde jakautuu osiin x ja $1-x$. Sovella Pythagoraan lausetta kuvion suorakulmaisiin kolmioihin ja eliminoi yhtälöistä x. Lähtemällä arvosta $n = 6$ saat kaavasta 12-kulmion sivun pituuden ja siitä edelleen 24-, 48- ja 96-kulmion sivut. Arkhimedes laski tähän asti, mutta voit jatkaa laskimella pidemmällekin. π:n likiarvoja ovat monikulmioiden piirien puolikkaat eli $\pi \approx n \cdot a_{2n}$.

41. Selvästi

$$A_s = \frac{\alpha}{360°}\pi r^2 \quad \text{ja} \quad b = \frac{\alpha}{360°}2\pi r.$$

Eliminoimalla näistä yhtälöistä α saadaan $A_s = \frac{1}{2}br$.

42. Ohje: Piirrä α:n kärjen kautta ympyrän halkaisija.

43. Ks. edellisen tehtävän ohje.

44. Väite seuraa edellä johdetusta tuloksesta: Kehäkulma on puolet vastaavasta keskuskulmasta. Tässä tapauksessa keskuskulma on oikokulma, joten kehäkulma on suora.

45. Koska täysi kulma on sekä 360° että 2π, saamme

180°	90°	45°	30°	60°	120°
π	$\pi/2$	$\pi/4$	$\pi/6$	$\pi/3$	$2\pi/3$

46. Kuten edellä saamme

$\pi/8$	$3\pi/4$	$3\pi/2$	$\pi/10$	1	0,0625
22,5°	135°	270°	18°	$180°/\pi$	$11{,}25°/\pi$

47. **a)** 3,5°, **b)** $\frac{3{,}5\pi}{180}$.

48. $x = 10 \cdot \tan 35° \approx 0{,}7$ ja $y = \frac{10}{\cos 35°} \approx 12{,}2$.

49. Luvut 3, 4, 5 toteuttavat Pythagoraan yhtälön. Terävien kulmien asteluvut ovat noin 36,9° ja 53,1°.

50. Näitä kolmioita kutsutaan *muistikolmioiksi*.

	sin	cos	tan
30°	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{3}$
45°	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	1
60°	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$

51. Ohje: Piirrä toisen kyljen vastainen korkeusjana.

52. Kukan pinta-ala on $(2\pi - 3\sqrt{3})r^2$ ja prosenttiosuus ympyrän alasta

$$\frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{\pi} \cdot 100\% \approx 34{,}6\%.$$

53. Neliön ala

$$A = \left(\frac{ab}{a+b}\right)^2.$$

54. 23°.

55. Ohje: Sovella tehtävän 51 tulosta.

56. Summa on 1.

57. Pythagoraan lauseen mukaan

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Jakamalla tämä yhtälö luvulla c^2 saadaan

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1,$$

mikä on kysytty yhtälö.

58. $\alpha = 45°$.

59. Jos α:n vastainen kateetti on a, viereinen kateetti b ja hypotenuusa c, niin

$$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{a/c}{b/c} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

60. $\cos\alpha = \frac{1}{4}\sqrt{15}$, $\tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{15}}$.

61. Koska $\tan\alpha = 7$, on $\sin\alpha = 7\cdot\cos\alpha$. Yhtälöparista

$$\begin{cases} \sin\alpha &= 7\cos\alpha \\ \sin^2\alpha + \cos^2\alpha &= 1 \end{cases}$$

seuraa ($\sin\alpha > 0$, $\cos\alpha > 0$)

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{50}} = \frac{1}{5\sqrt{2}} \quad \text{ja} \quad \sin\alpha = \frac{7}{5\sqrt{2}}.$$

62. **a)** 20000 km, **b)** 62° pohjoista leveyttä.

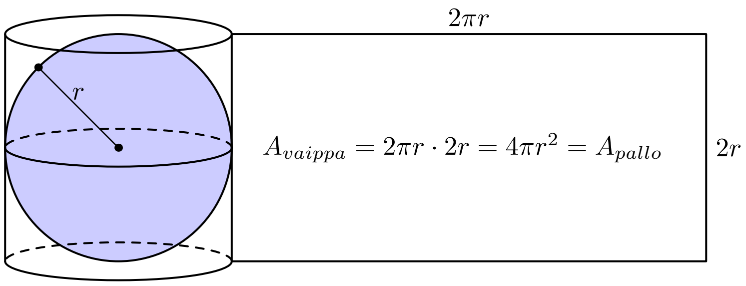
63. Laskemalla $\tan\alpha$ pienistä kolmioista saadaan verranto, josta seuraa $h^2 = pq$ ja edelleen $h = \sqrt{pq}$. Laskemalla $\sin\alpha$ oikeanpuoleisesta pikkukolmiosta sekä alkuperäisestä saadaan verranto, josta seuraa $a^2 = qc$. Laskemalla $\cos\alpha$ vasemmanpuoleisesta pikkukolmiosta sekä alkuperäisestä saadaan verranto, josta seuraa $b^2 = pc$. Niinpä

$$a^2 + b^2 = qc + pc = (q+p)c = cc = c^2.$$

64.

$$\begin{aligned} \tan\alpha + \frac{1}{\tan\alpha} &= \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \\ &= \frac{\sin^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} \\ &= \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}. \end{aligned}$$

65. Lieriön vaipan ja pallon pinta-alat ovat yhtäsuuret:



66. Päiväntasaajan seutu kuvautuu lähes oikein, napa-alueet litistyvät pystysuunnassa ja levenevät vaakasuunnassa. Meridiaanit kuvautuvat aukileikatulle vaipalle tasavälisiksi pystysuoriksi ja leveyspiirit ala- ja yläreunaa kohti tiheneviksi vaakasuoriksi. Navat kuvautuvat aukileikatun vaipan ala- ja yläreunaksi.

67. Aseta (mielessäsi) kaksi erikokoista palloa samankeskisiksi ja piirrä (mielessäsi) isommalle pallolle säteitä. Ne leikkaavat pienemmän pallon pinnan, jolloin jokaista isomman pallon pinnan pistettä vastaa yksikäsitteisesti määrätty pienemmän pallon pinnan piste ja kääntäen, jokaista pienemmän pallon pinnan pistettä vastaa yksikäsitteisesti määrätty isomman pallon pinnan piste. Säteet siis määrittävät yksi-yhteen kuvauksen pintojen välille, joten niillä on sama määrä pisteitä, vaikka pallojen pinta-alat ovat erisuuret.

68. Osoitetaan, että on olemassa yksi-yhteen kuvaus väliltä $]0{,}1[$ välille $]0{,}r[$ kaikilla $r \in \mathbb{R}_+$. Jos $r = 1$, niin asia on selvä. Jos $r \neq 1$, niin pisteiden $(0{,}1)$ ja $(1{,}r)$ määräämä suora ei ole x-akselin suuntainen vaan leikkaa sen eräässä pisteessä. Tämän pisteen kautta piirretyt y-akselin välin $]0{,}1[$ kohtaavat puolisuorat määrittelevät vaaditun kuvauksen.

69. $V_{\text{pallot}} : V_{\text{lieriö}} = 2 : 3.$

70. Tässä tapauksessa tilavuuksien suhde ei ole n:stä riippumaton, vaan

$$\frac{V_{\text{pallot}}}{V_{\text{putki}}} = \frac{2n}{3n-1}.$$

Supistamalla n:llä nähdään, että

$$\frac{V_{\text{pallot}}}{V_{\text{putki}}} = \frac{2}{3-\frac{1}{n}} \longrightarrow \frac{2}{3}, \quad \text{kun} \quad n \to \infty.$$