

Matematiikkadiplomi IX

Esipuhe

Oppilaat, ottakaa huomioon kurssivalintoja tehtäessä, että matematiikka ja muut luonnontieteet ovat tärkeä pohja lähes kaikille ammatti- ja tieteenaloille. Koulun kaikkien tasojen valinnat ovat tärkeitä, koska matematiikka on aine, jossa jatkon ymmärtäminen pohjautuu aikaisemman omaksumiselle. Peruskoulussa on yhdeksän vuotta aikaa omaksua perusmatematiikka, mutta koulun jälkeen on aukkojen paikkaaminen vaikeaa ja vaatisi yleensä yksityisopetusta. Nyt on jouduttu järjestämään kertauskursseja aivan perusasioista korkeakoulutasollakin.

20.4.2016 uutisoi YLE, että moni lukiolainen jättää pitkän matematiikan, fysiikan tai kemian, koska ei usko niitä koskaan tarvitsevansa. Tämä voi olla erehdys. Oulun yliopiston Luma-keskuksen johtaja, professori Jouni Pursiainen on laskenut, että pitkä matematiikka on Oulun yliopistossa valintaperuste peräti 93 prosentille aloituspaikoista.

Pursiaisen mukaan hyvin kirjoitettu pitkä matematiikka on todellinen valintojen valttikortti. Pitkää matematiikkaa painotetaan luonnontieteiden, tekniikan, lääketieteen, kauppatieteiden ja maa- ja metsätaloustieteen valinnoissa. Näissä on Suomessa reilut kymmenen tuhatta aloituspaikkaa. Se on täsmälleen sama määrä kuin ylioppilaskokeissa on pitkän matematiikan kirjoittajia, Pursiainen laskee. Pitkän matematiikan kirjoittajiksi pitäisi saada myös keskitason oppilaat. Näin he eivät sulki itseltään jatkossa pois monia mielenkiintoisia ura- ja työvalintoja.

Matematiikka vaatii keskittymistä ja pitkäjänteistä opiskelua, mutta oivaltamisen ilo palkitsee ponnistelut.

Matemaattisten Aineiden Opettajien Liiton, MAOLin toiminnanjohtaja Juha Sola on tehnyt saman havainnon: osa koululaisista ei nykyisin pysty pitkäjänteiseen opiskeluun. Sola muistuttaa, että aina on hyviä oppilaita, mutta matemaattisissa aineissa edes kohtuullisen hyvien joukko voisi olla huomattavasti suurempi. Solan mukaan pitkää matematiikkaa ei ole enää aikoihin valittu riittävästi. Nykytilanteessa itse asiassa kuusitoistavuotiaiden valinnat uhkaavat paitsi oppilaiden itsensä, myös koko maan tulevaisuuden mahdollisuuksia.

Diplomia voi suorittaa myös osioittain, jolloin diplomiin merkitään suoritettu osio x:llä.

Marjatta Näätänen

1. MERKINTÄTAPOJA JA KÄSITTEITÄ

Tarkistetaan aluksi, että hallitset riittävästi matematiikan peruskäsitteitä ja merkintöjä. Tarvittaessa kertaat niitä diplomisivulta löytyvästä kirjasta Väisälä: Algebra I.

Kaikki tässä esiintyvät luvut ovat reaalilukuja.

1) Kirjoita jokin matematiikan lauseke: _____

2) Kirjoita jokin yhtälö, jossa on yksi tuntematon ja ratkaise se:

Kirjoita jokin tosi yhtälö:

Kirjoita jokin epätosi yhtälö:

Mitä tarkoittaa yhtälön juuri?

Reaalilukujen yhteenlaskulla on seuraavat ominaisuudet:

- Vaihdannaisuus: kaikilla luvuilla a ja b pätee

$$a + b = b + a.$$

Esimerkiksi

$$\frac{4}{5} + 2001 = 2001 + \frac{4}{5}$$

- Liitännäisyys: kaikilla luvuilla a , b ja c pätee

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

Esimerkiksi $(1 + 2) + 4 = 3 + 4 = 7$ ja $1 + (2 + 4) = 1 + 6 = 7$ eli

$$(1 + 2) + 4 = 1 + (2 + 4).$$

3) Kirjoita vastaavat ominaisuudet seuraavissa tapauksissa tai osoita vastaesimerkillä, että ominaisuus ei ole voimassa:

a) Vähennyslasku

Vaihdannaisuus: _____

Liitännäisyys: _____

b) Kertolasku

Vaihdannaisuus: _____

Liitännäisyys: _____

c) Jakolasku

Vaihdannaisuus: _____

Liitännäisyys: _____

Reaalilukujen laskutoimituksilla on myös ositteluominaisuus eli osittelulaki on voimassa:

- Osittelu: kaikilla luvuilla a , b ja c pätee

$$a(b + c) = ab + ac \quad \text{eli} \quad ab + ac = a(b + c).$$

Esimerkki 1:

$$2(3 + 1) = 2 \cdot 4 = 8 \quad \text{ja} \quad 2 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 6 + 2 = 8.$$

Siis

$$2(3 + 1) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 1.$$

Esimerkki 2:

$$(-2) \cdot 3 + (-2) \cdot (-1) = -6 + 2 = -4 \quad \text{ja} \quad (-2)(3 - 1) = -2 \cdot 2 = -4.$$

Siis

$$(-2) \cdot 3 + (-2) \cdot (-1) = (-2)(3 - 1).$$

Tässä on yhteinen tekijä -2 yhtälön oikealla puolella tulon tekijänä.

Ositteluominaisuutta voidaan laajentaa: Luvulla voidaan kertoa summa siten, että tällä luvulla kerrotaan jokainen yhteenlaskettava ja saadut tulot lasketaan yhteen. Esimerkiksi, jos summassa on kolme yhteenlaskettavaa b , c ja d , voidaan osittelua käyttää kaksi kertaa:

$$a(b+c+d) = a((b+c)+d) = a(b+c)+ad = (ab+ac)+ad = ab+ac+ad.$$

4) Kirjoita lauseke ilman sulkeita.

a) $m + (a - k - b) =$ _____

b) $m - (a - k - b) =$ _____

c) $a - (b - c) + (m + n) =$ _____

d) $a + (b - (c - d)) =$ _____

e) $x - (y - (p + k)) =$ _____

★ 5) Perustele identtisyys; ts. perustele, että yhtälö on voimassa kaikilla muuttujien (p, x, a, b, y, \dots) arvoilla.

a) $5p - 45 = 5(p - 9)$

b) $-8(3 - x) = 8x - 24$

c) $(a + b) \cdot 1 = a + b$

d) $x(y - 2) - 3y = y(x - 3) - 2x$

e) $2a(b - 5) + b = b(2a + 1) - 10a$

2. LUVUT JA ALGEBRA

Älä käytä laskinta näissä tehtävissä.

1) Järjestä luvut pienimmästä suurimpaan.

$$-2; -\frac{8}{3}; -8; -\frac{8}{4}; -908; -\frac{7}{4}; -1; -99; -25,125; 1; -9872; -25,5.$$

2) Kirjoita osoittajaan ja nimittäjään jotkin luvut, joilla yhtälöt ovat voimassa. Keksi kolme eri ratkaisua.

$$\frac{2}{5} = \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} = \frac{3}{3} \quad \frac{3}{3} = \frac{3}{3}$$

$$\frac{2}{5} = \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} = \frac{3}{3} \quad \frac{3}{3} = \frac{3}{3}$$

$$\frac{2}{5} = \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} = \frac{3}{3} \quad \frac{3}{3} = \frac{3}{3}.$$

3) Täydennä puuttuvat luvut:

$$\frac{5}{7} = \frac{15}{28} = \frac{35}{77}$$

$$\frac{2,4}{3} = \frac{24}{15} = \frac{4}{10}$$

$$2 = \frac{60}{4} = \frac{84}{5} = \frac{100}{8} = \frac{114}{6}$$

4) Laske ilman laskinta:

$$6\frac{1}{3} - 8 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$-3\frac{1}{2} \cdot \left(-1\frac{3}{7}\right) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$-2\frac{2}{7} + 4\frac{3}{5} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\frac{4}{7} \cdot (-49) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$5\frac{1}{3} - 6\frac{1}{4} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\frac{2}{5} - \frac{4}{5} - \left(\frac{4}{5} - \frac{2}{5}\right) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$1\frac{1}{4} \cdot 2\frac{2}{5} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$0,25 \cdot 1,6 = \underline{\hspace{2cm}}$$

5) Laske ilman laskinta:

$$23 \cdot 57 = \underline{\hspace{2cm}} \quad \frac{536}{41} = \underline{\hspace{2cm}} \quad \frac{4}{5} + \frac{2}{3} = \underline{\hspace{2cm}}$$

6) Täydennä alla oleva taulukko niin, että päällekkäin ovat yhtä suuret murtoluvut. Valitse luvut näistä luvuista:

$$\frac{20}{30} \quad \frac{24}{10} \quad \frac{16}{40} \quad \frac{6}{15} \quad \frac{108}{15} \quad \frac{42}{36}$$

$\frac{2}{3}$	$\frac{36}{5}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{12}{5}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{2}{5}$
$\frac{20}{30}$					

7) Mieti, miten saat laskut helpoiksi, ja laske lausekkeiden arvot päässä.

$$3,5 \cdot 6,8 + 3,5 \cdot 3,2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$12,4 \cdot 14,3 - 12,4 \cdot 4,3 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$1,24 : 4 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$18,9 : (4,138 + 2,162) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$3,2 : 0,08 + 5,2 \cdot 2,5 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\left| -154 + |(-1) \cdot 226 \cdot (-1) - 226| \cdot (-7) \right| = \underline{\hspace{2cm}}$$

8) Laske lausekkeet

$$15,7 \cdot 3,09x + 15,7 \cdot 2,91x = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$4,03 \cdot 27,9a^2 - 17,9 \cdot 4,03a^2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

- 9) Laske seuraavat tulot ilman laskinta; arvioi ensin tuloksen suuruus.

$$(3,12 \cdot 10^2) \cdot (1,2 \cdot 10^3) = \underline{\hspace{4cm}}$$

$$(-0,2 \cdot 10^3) \cdot 0,03 \cdot (-10)^4 = \underline{\hspace{4cm}}$$

- 10) Laske ilman laskinta:

$$-3^4 \cdot 2^5 \cdot 2^1 \cdot 7^4 \cdot (-3)^5 = \underline{\hspace{4cm}}$$

Sievennä:

$$-a^4 b^5 b^1 c^4 (-a)^5 = \underline{\hspace{4cm}}$$

Sijoita $a = 3$ ja $b = 2$ ja vertaa edelliseen tulokseen:

$$-a^4 b^5 b^1 c^4 (-a)^5 = \underline{\hspace{4cm}}$$

- 11) Perustele, onko luku

$$\frac{0,524}{0,435}$$

pienempi vai suurempi kuin 1. Älä käytä laskinta.

- 12) Kirjoita muodossa $a \cdot 10^n$, missä $1 < a < 10$ ja n on kokonaisluku:

$$237,3 = \underline{\hspace{2cm}} \qquad 100 \cdot 12,3675 = \underline{\hspace{2cm}}$$

- 13) Kirjoita luvut ensin saman kymmenen potenssin avulla ja laske yhteen vasta sen jälkeen.

$$43,273 \cdot 10^2 + 0,0472 \cdot 10^5 = \underline{\hspace{4cm}}$$

- 14) Kirjoita seuraavat luvut muodossa $\frac{a}{b}$ tai $-\frac{a}{b}$, missä a ja b ovat positiivisia kokonaislukuja, ja supista sen jälkeen.

$$\frac{0,028}{-0,21} = \underline{\hspace{2cm}} \qquad \frac{-22,4}{13,44} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\frac{1,75}{2,625} = \underline{\hspace{2cm}} \qquad \frac{0,25}{-0,4375} = \underline{\hspace{2cm}}$$

- 15) Yksi litra vettä on massaltaan yksi kilogramma ja 30 grammassa vettä on noin 10^{24} molekyyliä. Montako molekyyliä on litrassa vettä?

Entä yhdessä kuutiometrissä vettä?

- 16) Mitkä reaalityluvut ovat käänteislukuaan suurempia?

- 17) Sievennä:

$$(-5)^2 = \underline{\hspace{2cm}} \qquad -5^2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$3^4 \cdot (-2)^2 = \underline{\hspace{2cm}} \qquad (-3)^2(-2)^3 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$2\frac{1}{3} \cdot 7 = \underline{\hspace{2cm}} \qquad 1,4 \cdot 3\frac{3}{4} = \underline{\hspace{2cm}}$$

- 18) Kirjoita seuraavat osamäärät muodossa $2^n/3^m$, missä m ja n ovat mahdollisimman pieniä positiivisia kokonaislukuja.

$$\left(\frac{2^2}{3}\right)^3 \cdot \frac{2^3}{3} = \underline{\hspace{2cm}} \qquad \left(\frac{2^3}{3^2}\right)^4 : \left(\frac{2^4}{3^2}\right)^2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\left(2^4 : \frac{2^2}{3^3}\right) : \frac{3^5}{2} = \underline{\hspace{2cm}} \qquad (-2)^4 \cdot \left(2^2 : \frac{3^5}{2}\right) = \underline{\hspace{2cm}}$$

- 19) Tiedetään, että $uv = 2$. Laske

$$\frac{\frac{1}{u} - \frac{1}{v}}{u - v} = \underline{\hspace{2cm}}$$

20) Sievennä:

$$2\sqrt{2} + \sqrt{2} = \underline{\hspace{2cm}} \qquad \sqrt{6\,250\,000} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\sqrt{27} = \underline{\hspace{2cm}} \qquad \sqrt{0,0049} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\sqrt{a^3} = \underline{\hspace{2cm}} \qquad \sqrt{2(x-2)^2} = \underline{\hspace{2cm}}$$

★ 21) Sievennä:

$$\sqrt{(a-b)(a^2-b^2)} = \underline{\hspace{4cm}}$$

★ 22) Sievennä, jos mahdollista

$$\sqrt{x^2+5} = \underline{\hspace{2cm}} \qquad \sqrt{x^2+10x+25} = \underline{\hspace{2cm}}$$

★ 23) Etsi sellaiset luvut m ja n , että yhtälöparin

$$\begin{cases} (m+n)x - my = 2 \\ mx - (n+1)y = 0 \end{cases}$$

ratkaisu on $x = 3$ ja $y = -1$.

★ 24) Miten osoitetaan helposti, että

$$\begin{aligned} &12343212234321 \cdot 24686424468641 - 12343212234320 \\ &= 12343212234320 \cdot 24686424468641 + 12343212234321 \end{aligned}$$

- ★ 25) Kahden kaksinumeroisen luvun, x :n ja y :n, tulo on 930. Jos luku x kirjoitetaan luvun y eteen ja niin syntynyt nelinumeroisen luku jaetaan luvulla y , saadaan osamääräksi 25 ja jakojäännökseksi 12. Mitkä ovat luvut x ja y ?

Tämä tehtävä oli ylioppilaskirjoituksissa vuonna 1894.

- 26) Eräs henkilö sijoittaa pääoman yhtiöön ja antaa ensimmäisen vuoden voiton jäädä yhtiöön. Seuraavana vuonna hän menettää yhtä monta prosenttia kuin hän voitti ensimmäisenä vuonna. Toisen vuoden lopussa hän ottaa rahansa pois liikkeestä ja saa silloin ainoastaan $\frac{3}{4}$ alkuperäisestä pääomastaan. Kuinka monta prosenttia hän voitti ensimmäisenä vuonna?

- 27) Laske seuraavista ne, jotka on määritelty:

$$1^0 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$0^0 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\frac{1}{0} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\left(\frac{1}{0}\right)^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$1^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(-1)^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\left((-1)^{-1}\right)^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}$$

28) Millä x :n arvoilla $|x| = x$? _____

Millä x :n arvoilla $|x| = -x$? _____

★ 29) Laske tulot $117 \cdot 103$ ja $7008 \cdot 6992$ kaavan $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ avulla.

★ 30) Esitä luvut 250997 ja 1689999 tuloina, joissa on ainakin kaksi lukua 1 suurempaa tekijää.

★ 31) Palindromi on merkkijono, jonka merkkien järjestys on etu- ja takaperin sama. Esimerkiksi sana saippuakauppias on palindromi.

Lukuun 11 liittyy seuraavia palindromeja:

$$11 \cdot 11 = 121$$

$$111 \cdot 111 = 12321$$

$$1111 \cdot 1111 = 1234321$$

⋮

$$111111111 \cdot 111111111 = 12345678987654321$$

Laske näiden tietojen avulla $1111,5^2$ ja $111111111,5^2$ ilman laskinta.

★ 32) Laske lausekkeen $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$ tarkka arvo, kun positiiviset luvut a ja b ovat toistensa käänteislukuja ja niiden keskiarvo on 2.

3. SUHDE JA VERRANTO

Määritelmä: Kahden luvun *suhteella* tarkoitetaan lukua, jolla kerrottaessa jälkimmäinen luku saadaan tuloksi edellinen.

Kahden luvun suhde on siis yhtä suuri kuin niiden osamäärä ja merkin-tä on sama. Esimerkiksi lukujen -25 ja 5 suhde on $-25 : 5 = -5$ tai

$$\frac{-25}{5} = -5.$$

Suhdekäsitettä käytetään erityisesti laatulukujen yhteydessä. Mittalu-vuissa on tällöin käytettävä samaa mittayksikköä.

Esimerkki: Mikä on 4 metrin suhde 80 millimetriin?

$$4 \text{ m} : 80 \text{ mm} = 4000 \text{ mm} : 80 \text{ mm} = 4000 : 80 = 50.$$

Verranto on kahden suhteen merkitty yhtäsuuruus:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad (1)$$

Sanotaan, että luvut a sekä d ovat sen ulkojäseniä ja b sekä c sen sisäjäseniä. Kertomalla verranto nimittäjien tulolla bd , se tulee yhtä-pitävään muotoon

$$ad = bc. \quad (2)$$

Siirtymistä yhtälöstä (1) yhtälöön (2) kutsutaan *ristiinkertomiseksi*. Verrannossa ulkojäsenten tulo on siis yhtäsuuri kuin sisäjäsenten tulo.

Jakamalla yhtälö (2) tulolla bd päästään takaisin verrantoon (1). Jos yhtälö (2) jaetaan tulolla dc , saadaan alkuperäisen verrannon kanssa yhtäpitävä verranto

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}.$$

Tästä nähdään, että verrannon (1) sisäjäsenten paikat voidaan vaih-taa.

1) Miksi verrannossa ulkojäsenten paikat voi vaihtaa keskenään?

2) Ratkaise seuraavat yhtälöt käyttämällä ristiinkertomista:

a) $\frac{2}{x+2} = \frac{3}{5}$

b) $\frac{2(x+3)}{x-5} = \frac{3}{5}$

c) $\frac{2}{x+2} = \frac{3}{5(1+x)}$

d) $\frac{2}{x} = \frac{x}{3}$

e) $\frac{x-3}{4} = \frac{9}{x-3}$

3) Maatilojen A ja B pinta-alojen suhde on $3 : 5$. Maatilasta B siirretään maatalaan A 5 ha, minkä jälkeen pinta-alojen suhde on $5 : 7$. Laske maatilojen alkuperäiset pinta-alat.

- 4) Vuoden lopussa oli kaupunkien A ja B väkilukujen suhde $111 : 103$. Vuoden aikana oli kaupungin A väkiluku lisääntynyt $2,5\%$ ja kaupungin B 3% . Mikä oli ollut väkilukujen suhde vuoden alussa?

- 5) Kirjoita kaava, jolla saat laskettua koron, kun pääomaa merkitään kirjaimella k , korkoprosenttia kirjaimella p ja aikaa vuosina kirjaimella t .

Miten korko muuttuu, jos pääoma kaksinkertaistetaan?

Entä jos korkoprosentti puolittuu?

- 6) Auringon massa on $1,98 \cdot 10^{33}$ g ja vetyatomin massa on $1,65 \cdot 10^{-24}$ g. Oletko massasi puolesta suhteellisesti lähempänä aurinkoa vai vetyatomia, eli onko auringon massan suhde omaan massaasi pienempi vai suurempi kuin massasi suhde vetyatomin massaan? Minkä painoiselle henkilölle nämä suhteet ovat samat?

- 7) Neljä henkilöä on sijoittanut yhteiseen liikeyritykseen varoja seuraavasti: Matias 5 000 €, Kati 7 500 €, Oula 10 000 € ja Viveca 15 000 €.

a) Kuinka heidän tulee jakaa keskenään vuosivoitto 2700 euroa?

- b) Kuinka vuosivoitto 2700 euroa tulee jakaa, jos Matias on tehnyt sen verran enemmän töitä, että hänen osuutensa on $\frac{1}{5}$ enemmän kuin pelkän sijoituksen perusteella olisi ollut?

Matiaksen saama lisäosuus vähennetään muilta tasaisesti yhtä suurina summina.

★ 8) Osoita, että

a) jos $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, niin $\frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}$

b) jos $\frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}$, niin $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Suora verrannollisuus

Suureet x ja y ovat toisiinsa nähden *suoraan verrannollisia*, jos on olemassa vakio k siten, että $y = kx$. Vakio k on *verrannollisuuskerroin*. Jos x_1 ja x_2 ovat muuttujan x arvoja ja niitä vastaavat muuttujan y arvot ovat y_1 ja y_2 , niin $y_1 = kx_1$ ja $y_2 = kx_2$. Näistä yhtälöistä seuraa, että

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{kx_1}{kx_2} = \frac{x_1}{x_2}.$$

Esimerkki: Tasaisessa liikkeessä matka on suoraan verrannollinen käytettyyn aikaan. Verrannollisuuskerroin kuvaa tässä tapauksessa liikkeen nopeutta.

Esimerkki: Lattian, jonka pinta-ala on 15 m^2 , maalaamiseen on käytetty $1,2 \text{ kg}$ maalia. Kuinka paljon maalia tarvitaan sellaisen lattian maalaamiseen, jonka koko on 25 m^2 ?

Merkitään 25 m^2 lattian maalaamiseen tarvittavan maalin määrää kirjaimella x . Koska maalattavan pinta-alan kasvaessa maalin menekki kasvaa samassa suhteessa, niin tarvittavan maalin massa on suoraan verrannollinen lattian pinta-alaan. Siis

$$\frac{x}{1,2} = \frac{25}{15}.$$

Tästä yhtälöstä saadaan ratkaistua $x = 2$. Maalia tarvitaan siis 2 kg .

Tehtävän ratkaisemiseksi voidaan muodostaa myös toinen verranto

$$\frac{15}{25} = \frac{1,2}{x}.$$

Voidaan myös käyttää verrantoa

$$\frac{x}{25} = \frac{1,2}{15}.$$

Perustele, miksi näin voidaan tehdä:

9) Mitkä seuraavista muuttujista ovat suoraan verrannollisia? Jos muuttujat ovat suoraan verrannollisia, ilmoita verrannollisuuskerroin:

a) ympyrän halkaisija ja kehän pituus

b) ympyrän säde ja pinta-ala

c) kuution särmä ja sivutahkon lävistäjä

d) kuution avaruuslävistäjä ja särmien yhteenlaskettu pituus

e) kuution särmä ja tilavuus

f) tasasivuisen kolmion sivu ja piiri

g) tasasivuisen kolmion sivu ja korkeusjana

h) neliön sivun pituuden neliö ja neliön pinta-ala

10) Pumpun avulla vesisäiliö täyttyy ajassa 2 h 30 min. Missä ajassa voi täyttää samalla pumpulla vesisäiliön, jonka tilavuus on viidesosa ensimmäisen säiliön tilavuudesta?

11) Naapurisi osti 4,5 metriä köyttä 18 eurolla. Kuinka paljon maksaa 27 m samaa köyttä?

12) Tonni merivettä sisältää 35 kg suolaa. Kuinka paljon suolaa on yhdessä lasillisessa merivettä? Oletetaan, että lasillinen on 250 g.

13) Viiden säiliövaunun täyttämiseen kului aikaa 1 h 15 min. Ehditäänkö kahdessa tunnissa täyttää seitsemän samanlaista säiliövaunua?

14) 10 litran maaliseoksessa on 8,5 l maalia, 0,5 l vernissaa ja 1 l tärpättiä. Mikä on kunkin aineen osuus murtolukuna ilmaistuna?

maalia _____ vernissaa _____ tärpättiä _____

Kuinka paljon sinun on ostettava kutakin ainetta, jos haluat sekoittaa 14 litraa maalia?

maalia _____ vernissaa _____ tärpättiä _____

15) Käärmeen paino on suoraan verrannollinen sen pituuden kuu-
tioon. Anakonda on suurin nykyisistä käärmeistä. Se voi kasvaa
9 metrin pituiseksi, jolloin se painaa 200 kg. Hiljattain löydettiin
Kolumbiasta eräästä hiilikaivoksesta titanoboaksi nimetyn mui-
naisen jättiläiskäärmeen 16 metriä pitkä fossiili. Kuinka paljon
tämä käärme painoi elossa ollessaan?

16) Metsänraivaukseen asetettiin kaksi työporukkaa. Toisessa ryh-
mässä oli 4 kertaa niin paljon ihmisiä kuin ensimmäisessä. Sen
jälkeen, kun toisen työryhmän 6 henkilöä sai lopputilin ja 12 henki-
löö siirrettiin ensimmäiseen työryhmään, kummassakin ryhmässä
oli yhtä monta ihmistä. Kuinka monta ihmistä oli ensimmäisessä
työporukassa alunperin?

17) Hillonkeitossa yhteen kilogrammaan marjoja tarvitaan 0,5 kg so-
keria ja $\frac{3}{4}$ lasillista vettä. Isoisä on käyttänyt hillon keittämiseen
2 kg sokeria. Kuinka paljon hän on käyttänyt marjoja ja vettä?

18) Miten suorakulmion pinta-ala muuttuu, jos suorakulmion pituus
kasvaa kolminkertaiseksi ja leveys nelinkertaiseksi?

19) Huoneen lattian maalaamiseen on tarvittu 1 kg maalia. Riittääkö
700 g maalia toiseen huoneeseen, jonka pituus on $\frac{2}{3}$ edellisen
huoneen pituudesta ja leveys on $\frac{5}{6}$ edellisen huoneen leveydes-
tä?

20) Kahden kaupungin välimatka on 750 km. Mikä on vastaava välimatka kartalla, jonka mittakaava on 1 : 1 000 000?

21) Kahden kaupungin välimatka kartalla on 6 cm. Mikä on kaupunkien todellinen välimatka, jos kartan mittakaava on 1 : 500 000?

Jako osiin, jotka ovat suoraan verrannollisia annettuihin lukuihin

Tämäntyyppiset tehtävät voidaan ratkaista lyhyesti:

Esimerkki: Kolmion, jonka piiri on 30 cm, sivut ovat suoraan verrannolliset lukuihin 5, 7 ja 8. Laske kolmion sivujen pituudet.

Merkitään verrannollisuuserrointa kirjaimella k . Silloin pienimmän sivun pituus on $5k$ cm, keskimmäisen sivun pituus $7k$ cm ja pisimmän sivun pituus $8k$ cm. Näiden summa on

$$5k + 7k + 8k = 30,$$

josta saadaan $20k = 30$ ja edelleen $k = 1,5$. Kolmion sivujen pituudet ovat siis $5k = 7,5$, $7k = 10,5$ ja $8k = 12$ cm.

Esimerkki: Jana AB , jonka pituus on 70 cm, on jaettu neljään osaan, jotka ovat suoraan verrannollisia lukuihin 2, 3, 4 ja 5. Laske osien pituudet.

Olkoot osien pituudet a , b , c ja d cm. Koska luvut a , b , c ja d ovat suoraan verrannollisia lukuihin 2, 3, 4 ja 5, niin

$$\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} = \frac{d}{5}.$$

Merkitään verrannollisuuserrointa kirjaimella k , jolloin edellisistä yhtälöistä saadaan, että $a = 2k$, $b = 3k$, $c = 4k$ ja $d = 5k$. Kaikkien osien pituuksien summan on oltava 70 cm, joten

$$2k + 3k + 4k + 5k = 70.$$

Tämä yhtälö sievenee muotoon $14k = 70$ ja siitä saadaan ratkaistua $k = 5$. Siis $a = 2k = 10$, $b = 3k = 15$, $c = 4k = 20$ ja $d = 5k = 25$.

22) Osoita, että luvut 1,4; 1,8; 2,2 ja 2,6 ovat suoraan verrannollisia lukuihin 3,5; 4,5; 5,5 ja 6,5. Mikä on verrannollisuuskerroin?

23) Annettujen janojen pituudet ovat 8,5; 15 ja 25 cm. Laske niihin suoraan verrannollisten janojen pituudet, jos pisin jana on 20 cm.

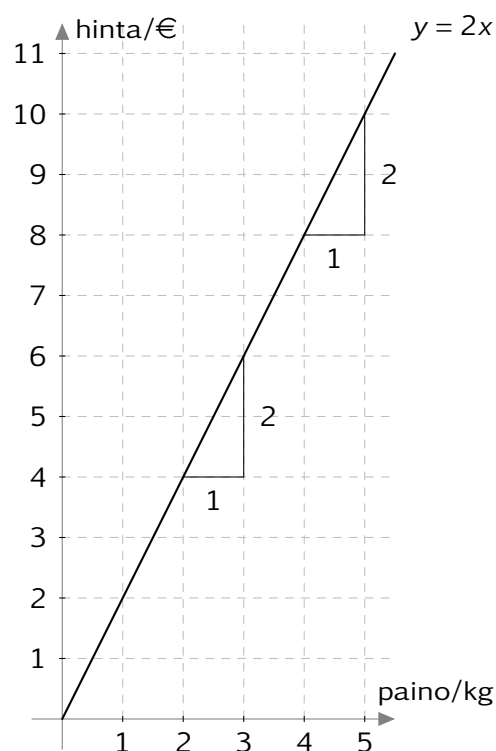
Suoran verrannollisuuden kuvaaja

Esimerkki: Jos kilogramma omenia maksaa kaksi euroa, niin puoli kilo maksaa yhden euron, 2 kg maksaa neljä euroa ja niin edelleen. Merkitsemällä omenien painoa kirjaimella x ja hintaa kirjaimella y saadaan niiden välille yhtälö

$$y = 2x.$$

Jos paino lisääntyy yhdellä kilogrammalla, niin hinta lisääntyy aina kahdella eurolla.

Suoraan verrannollisten muuttujien välinen riippuvuus voidaan kirjoittaa muotoa $y = kx$ olevan yhtälön avulla. Suoraa verrannollisuutta kuvaa siis origon kautta kulkeva suora.



Kuvaajia

Kaksi pistettä määrittää suoran. Siksi suoran verrannollisuuden kuvaajan piirtämiseksi riittää löytää kahden suoralla olevan pisteen koordinaatit, merkitä nämä pisteet koordinaatistoon ja piirtää niiden kautta suora. Suoran verrannollisuuden tapauksessa on helpointa ottaa toiseksi pisteeksi origo.

24) Missä koordinaatiston neljänneksissä nämä suorat ovat?

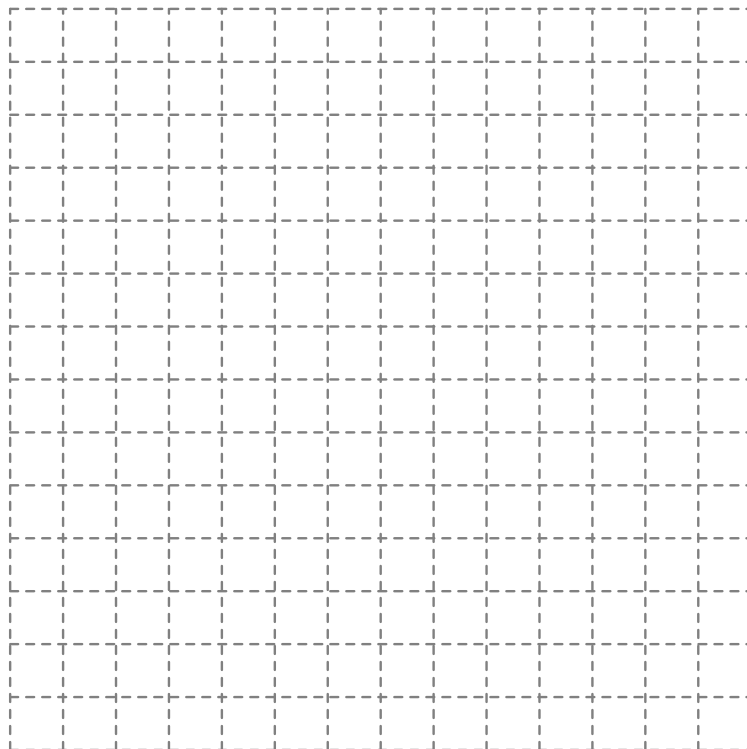
$$y = 1,7x \quad \text{_____}$$

$$y = x \quad \text{_____}$$

$$y = -3,1x \quad \text{_____}$$

$$y = -x \quad \text{_____}$$

25) Suorakulmion kanta on 2,5 m ja korkeus on x m. Kirjoita suorakulmion pinta-ala A (neliömetreinä) korkeuden x avulla. Piirrä kuvaaja, josta näkyy, miten pinta-ala A riippuu korkeudesta x .



Lue kuvaajalta

a) suorakulmion pinta-ala, jos sen korkeus on 3,5 m: _____

b) suorakulmion pinta-ala, jos sen korkeus on 4 m: _____

c) suorakulmion korkeus, jos sen pinta-ala on 6 m^2 : _____

d) suorakulmion korkeus, jos sen pinta-ala on 8 m^2 : _____

26) Polkupyörä liikkuu tasaisesti nopeudella 12 km/h. Kirjoita yhtälö, joka kertoo matkan pituuden s (km) riippuvuuden ajasta t (h). Onko tämä riippuvuus suoraan verrannollisuus?

- 27) Kirjoita yhtälö, joka kertoo ympyrän kehän pituuden riippuvuuden ympyrän säteestä. Osoita, että tämä riippuvuus on suoraan verrannollisuus. Mikä on verrannollisuuskerroin?
-

Suorat

Suoran yhtälö on muotoa $y = kx + b$, missä k on kulmakerroin ja b on vakio.

Jos kulmakerroin $k = 0$, yhtälöstä $y = kx + b$ saadaan $y = b$. Tällainen suora on x -akselin suuntainen ja leikkaa y -akselin korkeudella b .

Jos kulmakerroin $k > 0$ ja vakio $b = 0$, yhtälöstä $y = kx + b$ saadaan $y = kx$. Tällöin muuttujat y ja x ovat suoraan verrannolliset. Yhtälöä $y = kx$ vastaava suora kulkee aina origon kautta, sillä jos $x = 0$, niin $y = k \cdot 0 = 0$.

- 28) Suora on x -akselin suuntainen ja kulkee pisteen $(5, 8)$ kautta. Anna suoran yhtälö.
-

- 29) Kirjoita jonkin sellaisen suoran yhtälö, joka

a) on yhdensuuntainen suoran $y = 2,5x + 4$ kanssa.

b) leikkaa suoran $y = 2,5x + 4$.

- 30) Äänen nopeus ilmassa v riippuu lämpötilasta t ja sen voi laskea yhtälöstä $v = 331 + 0,6t$, jossa v on siis äänen nopeus (metriä sekunnissa) ja t lämpötila (celsiusasteina).

a) Millä nopeudella ääni etenee talvipäivänä, jos lämpötila on -35°C ?

- b) Millä nopeudella ääni etenee kesäpäivänä, jos lämpötila on 30°C ?
-

31) Viestin hinnan voi laskea yhtälöstä $y = 5x + 20$, jossa x on sanojen määrä viestissä ja y on viestin hinta.

- a) Mikä muuttujan y arvo vastaa muuttujan x arvoa 15?
-

- b) Mikä muuttujan y arvo vastaa muuttujan x arvoa 26?
-

- c) Onko olemassa muuttujan x arvo, joka vastaa muuttujan y arvoa 70?
-

- d) Onko olemassa muuttujan x arvo, joka vastaa muuttujan y arvoa 82?
-

32) Uima-altaaseen tulee $0,25 \text{ m}^3$ vettä joka sekunti. Kuinka monta kuutiometriä vettä altaassa on x sekunnin kuluttua, jos uima-altaassa on tällä hetkellä 120 m^3 vettä?

Kirjoita yhtälö, joka kertoo altaassa olevan veden tilavuuden V riippuvuuden täyttymisajasta t .

Käänteinen verrannollisuus

Kahden muuttujan välinen riippuvuus voi olla monenlaista. Seuraavaksi tarkastelemme riippuvuutta, jota kutsutaan käänteiseksi verrannollisuudeksi.

Esimerkki: Jos pyöräilijä ajaa nopeudella 10 km/h , niin 60 km matkaan kuluu kuusi tuntia, mutta jos hän ajaa nopeudella 20 km/h , niin samaan matkaan kuluu kolme tuntia. Siis jos nopeus kaksinkertaistuu, niin matkaan käytetty aika puolittuu.

Muuttuja y on kääntäen verrannollinen muuttujaan x , jos muuttujan x arvojen kasvaessa muuttujan y arvot pienenevät samassa suhteessa. Tämä tarkoittaa, että jos x_1 ja x_2 ovat muuttujan x arvoja ja niitä vastaavat muuttujan y arvot ovat y_1 ja y_2 , niin

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}$$

eli $x_1 y_1 = x_2 y_2$. Muuttujien x ja y vastaavien arvojen tulot ovat siis yhtä suuria. Tämä voidaan esittää yhtälönä

$$xy = k,$$

missä vakiota $k \neq 0$ sanotaan verrannollisuuskertoimeksi.

Esimerkki: Jos viisi pakkaajaa tekee työtä samanaikaisesti, tilaus tulee valmiiksi 12 tunnissa. Missä ajassa valmistuu sama tilaus, jos kahdeksan pakkaajaa tekee työtä samaa tahtia ja samanaikaisesti?

Merkitään kahdeksalta pakkaajalta tilauksen valmistumiseen kuluva aikaa kirjaimella x . Jos pakkaajien määrä kasvaa tietyn kertaiseksi, aika pienenee yhtä monenteen osaan aikaisemmasta. Siten aika on kääntäen verrannollinen pakkaajien määrään. Kääntäen verrannollisten muuttujien määritelmän mukaan

$$\frac{x}{12} = \frac{5}{8}.$$

Tästä voidaan ratkaista $x = 7,5$. Siis kahdeksan pakkaajan työskennellessä tilaus valmistuu 7,5 tunnissa.

Tämä tehtävä on esimerkki päätöslaskusta, josta voit lukea lisää osoitteesta matematiikkalehtisolmu.fi/2014/1/paatoslasku.pdf

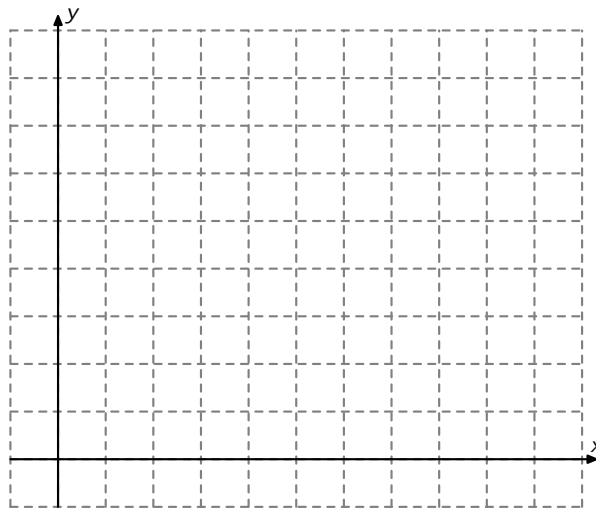
- 33) Turistin matkaan paikasta A paikkaan B kului 4,5 tuntia. Kuinka paljon aikaa turisti tarvitsee samaan matkaan, jos hän kulkee 1,5-kertaisella vauhdilla?
-

- 34) Uima-allas täyttyy vedellä yhdessä tunnissa ja kymmenessä minuutissa. Missä ajassa täytyy sama allas, jos veden tulonopeus puolitetaan?
-

- 35) Koneiden uusimisen jälkeen suutari käyttää korkolappujen laittoon kahdeksan minuuttia kymmenen minuutin sijasta. Kuinka monta korkolappua hän laittaa päivän aikana, jos hän laittoi niitä ennen 48 kappaletta?
-

- 36) Suorakulmion sivun pituutta merkitään kirjaimella x ja pinta-alaa kirjaimella A . Mistä yhtälöstä saadaan ratkaistua suorakulmion toisen sivun pituus y ?
-

Piirrä ratkaisufunktion kuvaaja tilanteessa, jossa $A = 4$.

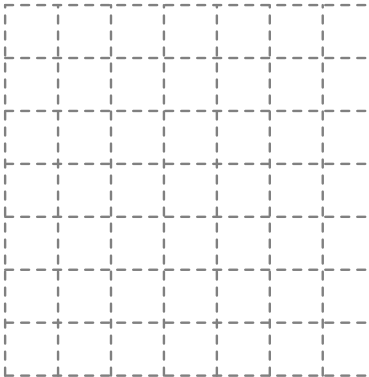


- 37) Suorakulmaisen särmiön pituus suurennettiin kaksinkertaiseksi ja leveys kolminkertaiseksi. Miten särmiön korkeutta pitäisi muuttaa, jotta sen tilavuus säilyy samana?
-

- 38) Patikkaretkellä suunnitellessaan lomalaiset laskivat, että kulkevat päivässä 12 km. Huonon sään takia he kulkivatkin päivässä 4 km suunniteltua vähemmän. Kuinka moninkertainen aika retkeen kului suunniteltuun aikaan verrattuna?
-

39) a) Ratkaise yhtälöt $2x - 1 = 0$ ja $-2x - 1 = 0$.

b) Tutki, minkä merkkisiä arvoja y saa yhtälöissä $y = 2x - 1$ ja $y = -2x - 1$ muuttujan x eri arvoilla. Voit käyttää apuna lukuosuoraa tai koordinaatistoa.



c) Ratkaise epäyhtälöt $2x - 1 < 0$ ja $-2x > 1$.

★ 40) Ratkaise epäyhtälö. Tarkista sijoittamalla x :n arvoja.

a) $12x - 1 < 35$ _____

Tarkistus: _____

b) $-0,2x + 4 \geq 47$ _____

Tarkistus: _____

c) $1,3x \leq 54 + x$ _____

Tarkistus: _____

4. NUMEROLUKUTAITO

1) Valtion budjettitaloutta koskevia lukuja löytyy sivulta

http://tilastokeskus.fi/tup/suoluk/suoluk_valtiontalous.html.

Taulukossa ei ole laskettu vuosien 2014–2015 muutosprosentteja, vaan taulukossa oleva muutosprosentti koskee vuosia 2015 ja 2016. Luvut ovat pyöristettyjä lukuja; täsmälliset luvut löytyvät valtion talousarvioesityksistä sivulta

<http://budjetti.vm.fi/indox/index.jsp>.

a) Laske valtioneuvoston kanslian menojen kasvu euroina ja prosentteina vuoden 2014 tilinpäätöksen luvusta (111 miljoonaa euroa) vuoden 2015 talousarviossa esitettyyn 186 miljoonaan euroon.

b) Minkä ministeriön menot ovat suurimmat vuoden 2015 talousarviossa?

c) Minkä ministeriön menot ovat pienimmät vuoden 2015 talousarviossa?

d) Minkä ministeriöiden menot kasvavat vuodesta 2015 vuoteen 2016?

e) Minkä ministeriöiden menot pienenevät vuodesta 2015 vuoteen 2016?

f) Mistä menoista on säästetty suhteellisesti (prosentteina) eniten vuodesta 2015 vuoteen 2016?

g) Kuinka suuri (miljardeissa euroissa) on Suomen valtion budjettiesitys vuodelle 2016 yhteensä?

2) Selitä, mitä yleistä tietoa sait osoitteesta

<http://tietotrendit.stat.fi/mag/article/162/>

löytyvän artikkelin kolmesta kuviosta.

3) Etsi tietoja Suomen alueen väkiluvusta vuosina 1600–1900. Piirrä näitä käyttäen väkilukua esittävä käyrä yhdistäen pisteet janoilla (lineaarinen approksimaatio, ks. luku polynomit). Merkitse kuvioon väkilukuun vaikuttaneita historian vaiheita kuten Isoviha, nälkävuodet jne.



- 4) Maan keskimääräinen etäisyys Auringosta on n. 149 500 000 km. Pluton keskimääräinen etäisyys Auringosta on n. $5900 \cdot 10^6$ km ja Uranuksen n. $2,88 \cdot 10^9$ km. Oletetaan, että planeetat kiertävät Aurinkoa pitkin samankeskisiä ympyräratoja, joiden säteinä ovat edellä mainitut keskimääräiset etäisyydet (todellisuudessa asia ei ole näin yksinkertainen). Jos nämä kaksi planeettaa ja Aurinko ovat samalla suoralla, niin miten kaukana planeetat ovat toisistaan? Havainnollista tilannetta kuvilla.
-
-

5. POLYNOMIT

Koulun matematiikassa polynomit tulevat tutuiksi. Niillä opitaan suorittamaan peruslaskutoimituksia ja niiden kuvaajat tunnetaan ainakin alhaisilla asteluvuilla. Polynomiyhtälöitä opitaan ratkaisemaan systemaattisesti tapauksissa, joissa asteluku on enintään kaksi.

Polynomien käyttöalueita on matematiikassa miltei rajattomasti. Esimerkiksi tehtävänä voi olla löytää yksinkertainen funktio, joka saa tietyissä pisteissä annetut arvot, ts. jonka kuvaaja kulkee näiden annettujen pisteiden kautta. Toisaalta voidaan kysyä, löytyisikö yksinkertaista funktiota, joka approksimoisi riittävän tarkasti annettua funktiota. Polynomit ovat usein hyviä approksimoiviksi funktioiksi, sillä niillä on helppo suorittaa yhteen- vähennys- ja kertolaskuja. Jaksollisten ilmiöiden mallintamisessa ovat trigonometrisistä funktioista muodostetut polynomit luonnollinen valinta.

- 1) Kertaa tarvittaessa tässä tehtävässä esiintyvien kaavojen havainnollistus pinta-aloilla diplomin VIII tehtäväsivuilla 18–20.

a) Kirjoita summana:

$$(a + b)^2 = \underline{\hspace{4cm}} \qquad (x + y)^2 = \underline{\hspace{4cm}}$$

$$(x + 2y)^2 = \underline{\hspace{4cm}} \qquad (3x - y)^2 = \underline{\hspace{4cm}}$$

b) Kirjoita tulomuodossa:

$$a^2 + 2ab + b^2 = \underline{\hspace{4cm}}$$

$$a^2 - b^2 = \underline{\hspace{4cm}}$$

$$(1 + a + b)^2 - (a + b)^2 - 1 = \underline{\hspace{4cm}}$$

$$\left(\frac{a}{3}\right)^2 - b^2 = \underline{\hspace{4cm}}$$

- 2) Laske lausekkeen arvo ilman laskinta. Kokeile, voitko käyttää binomikaavaa $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ tai $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ tai neliöiden erotuksen kaavaa $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.

$$3 \cdot 17 = \underline{\hspace{4cm}}$$

$$5 \cdot 16 = \underline{\hspace{10em}}$$

$$39^2 = \underline{\hspace{10em}}$$

$$2^2 + 3^2 + 6^2 = \underline{\hspace{10em}}$$

$$153 : 17 = \underline{\hspace{10em}}$$

$$64 : 16 = \underline{\hspace{10em}}$$

$$41^2 = \underline{\hspace{10em}}$$

$$39 \cdot 41 = \underline{\hspace{10em}}$$

★ 3) Ratkaise a ja b niin, että yhtälö on voimassa kaikilla x ja y :

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{5} + ax + by = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y.$$

★ 4) Sievennä:

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{a+1} = \underline{\hspace{10em}}$$

$$\frac{x^2 + x}{x} = \underline{\hspace{10em}}$$

$$\frac{a^2b + ac}{ad^2 + a^2c} = \underline{\hspace{10em}}$$

$$\left(\frac{x}{2} + 5y\right)^2 = \underline{\hspace{10em}}$$

$$\frac{c(ax + by)}{c^2(a + b)} = \underline{\hspace{10em}}$$

$$\frac{2a^2}{a} - \frac{a^3}{a(a-1)} = \underline{\hspace{10em}}$$

$$\frac{a}{b} \left(\frac{2}{a} + \frac{5b}{a^2}\right) = \underline{\hspace{10em}}$$

$$\frac{7^{50}}{14^{50}} = \underline{\hspace{10em}}$$

$$\frac{\left((a^5)^6\right)^3 \cdot a^6}{a^{69}} = \underline{\hspace{10em}}$$

★ 5) Sievennä:

$$a) \frac{1+x}{x^2-xy} - \frac{1-y}{y^2-xy} - \frac{4}{x^2-y^2} =$$

$$b) \frac{a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b}{(b-a)(b-c)} + \frac{c}{(c-a)(c-b)} =$$

$$c) 1 - \left(\frac{a-1}{2a+2} + \left(\frac{1}{a-1} - \frac{a}{1+a} \right) \right) =$$

★ 6) Tässä x ja y ovat nolasta eroavia kokonaislukuja. Sievennä:

$$\frac{x^y y^x}{y^y x^x} =$$

Seuraavat neljä tehtävää olivat ylioppilaskirjoituksissa vuosina 1893 ja 1894.

★ 7) Etsi polynomin

$$49a^2b^2 - 8b^3(3a - 2b) + 5a^3(5a - 6b)$$

neliöjuuri.

★ 8) Hae seuraavien polynomien yhteiset tekijät:

$$x^2 - 3xy - 10y^2, \quad x^2 + 2xy - 35y^2 \quad \text{ja} \quad x^2 - 8xy + 15y^2.$$

★ 9) Jaa polynomi

$$6x^2 - (a - 7)xy - (a + 2)(a - 1)y^2$$

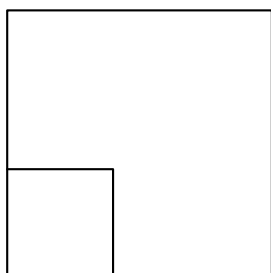
yksinkertaisempiin tekijöihinsä.

★ 10) Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x + \frac{1}{2}(y + z) = 102 \\ y + \frac{1}{3}(x + z) = 78 \\ z + \frac{1}{4}(x + y) = 61 \end{cases}$$

Yhtälöstä käytettiin 1800-luvulla sanaa ekvationi.

★ 11) Atle Selberg (norjalainen matemaatikko) kertoi lehtihaastattelussa keksineensä kuusivuotiaana alla olevan kuvion kaltaista koristeaudoitusta katsoessaan yhtälön $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. Miten todistat tämän geometrisesti?



- ★ 12) Miten voi laskea päässä kertolaskuja, jotka ovat muotoa $15 \cdot 15$, $25 \cdot 25$, $35 \cdot 35$ ja niin edelleen?

Otetaan kerrottavasta kymmeniä ilmaiseva luku ja kasvatetaan sitä yhdellä. Esimerkiksi tulossa $35 \cdot 35$ näin saadaan luku 4. Kerrotaan tämä alkuperäisellä kymmeniä ilmaisevalla luvulla 3, jolloin saadaan $3 \cdot 4 = 12$. Lisätään saadun tuloksen perään 25, jolloin saadaan vastaus 1225.

Kokeile, toimiiko temppu kertolaskuissa $45 \cdot 45$ ja $85 \cdot 85$.

Perustele, että temppu toimii kaikilla luvuilla, jotka ovat muotoa $n \cdot 10 + 5$.

- ★ 13) Osoita, että kolmio, jonka sivujen pituudet ovat $2n$, $n^2 + 1$ ja $n^2 - 1$, on suorakulmainen, olipa n mikä luku tahansa.

- ★ 14) Perustele, että minkä tahansa kahden luvun summan kuution ja kuutioiden summan erotus on sama kuin näiden lukujen tulo ja summan kolminkertainen tulo.

Voit jatkaa lukemalla Solmun matematiikkadiplomien sivulta tekstejä, esimerkiksi Yläkoulun geometriaa ja Gaussin jalanjäljissä.

6. KUVIOITA JA KAPPALEITA

1) Yleisimmin esiintyvät tasokuviot ovat ympyrä, kolmio, nelikulmio, viisikulmio ja kuusikulmio. Piirrä kustakin esimerkkinä

a) kaikkein säännöllisin tapaus

b) jokin epäsäännöllinen tapaus, jos sellainen on.

c) Kirjoita pinta-alan kaava seuraaville:

Ympyrä: _____ Kolmio: _____

Neliö: _____ Suorakulmio: _____

Suunnikas: _____

Merkitse käyttämäsi symbolit yllä oleviin kuviin tai piirrä uudet kaavoja havainnollistavat kuvat tähän alle.

2) Yleisimmin esiintyvät kappaleet ovat pallo, lieriö, kartio ja monitahokas, erityisesti suorakulmainen särmiö. Piirrä kustakin esimerkkinä

a) kaikkein säännöllisin tapaus

b) jokin epäsäännöllinen tapaus, jos sellainen on.

c) Kirjoita pinta-alan kaava seuraaville:

Pallo: _____

Suora ympyrälieriö: _____

Suora ympyräkartio: _____

Suorakulmainen särmiö: _____

Merkitse käyttämäsi symbolit yllä oleviin kuviin tai piirrä uudet kaavoja havainnollistavat kuvat tähän alle.

d) Kirjoita tilavuuden kaava seuraaville (käytä edellisten kuvien merkintöjä):

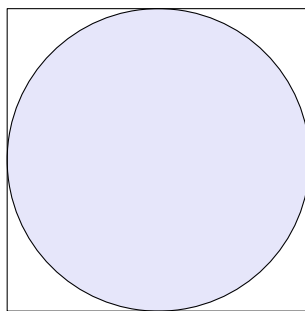
Pallo: _____

Suora ympyrälieriö: _____

Suora ympyräkartio: _____

Suorakulmainen särmiö: _____

Esimerkki: Ympyrä on piirretty neliön sisään siten, että sen kehä sivuaa neliön jokaista sivua. Kuinka monta prosenttia ympyrä peittää neliön pinta-alasta? Ympyrän säde on $1\frac{3}{8}$ ". Yksi tuuma $1" = 2,54$ cm.



Ratkaisu: Neliön sivun pituus on ympyrän halkaisija $2\frac{3}{4}$ ". Mutta tarvitsemme näitä tuumamääriä ollenkaan? Jos merkitään ympyrän sädettä kirjaimella r , on neliön sivun pituus $2r$. Ympyrän pinta-ala $A_{\circ} = \pi r^2$ ja neliön pinta-ala $A_{\square} = (2r)^2 = 4r^2$. Pintaalojen suhde

$$\frac{A_{\circ}}{A_{\square}} = \frac{\pi r^2}{4r^2} = \frac{\pi}{4}.$$

Prosentteina suhde on

$$\frac{A_{\circ}}{A_{\square}} = \frac{\pi}{4} \cdot 100\% = 25\pi\%.$$

Konkreettisia mittoja ei siis tarvittu, sillä säteen neliöt supistuivat. Tulos on siis yleispätevä, kuvion koosta riippumaton. Desimaalilukuina ilmaistuja välituloksia ei tarvittu ratkaisussa. Vastauksen likiarvo saadaan laskimella lopputuloksesta. Kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella se on 78,5 %.

Piirrä seuraaviin tehtäviin kuvat ja merkitse tärkeimmät laskut, joiden perusteella voi ajatteluasi seurata. Kuten edellisessä esimerkissä, käytä tarkkoja arvoja, ei likiarvoja.

- 3) Pallo on asetettu kuution muotoiseen laatikkoon, jonka jokainen tahko sivuaa pallon pintaa. Kuinka monta prosenttia pallo täyttää kuution tilavuudesta? Merkitse kuution särmän pituutta kirjaimella a .

-
- 4) Pallo on asetettu suoraan ympyräpohjaiseen lieriöön, jonka vaippa ja pohjat sivuavat pallon pintaa. Merkitse pallon sädettä kirjaimella r .

a) Kuinka monta prosenttia lieriön tilavuudesta jää tyhjäksi?

b) Osoita, että lieriön vaipan ja pallon pinta-alat ovat yhtä suuret.

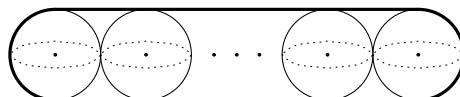
5) Olet ehkä nähnyt urheiluliikkeessä tennispalloja putkimaiseen rasiaan pakattuina. Kaksi peräkkäistä palloa sivuaa toisiaan ja päätypallot sivuavat rasian kansia.

a) Oletetaan, että putkessa on 4 kappaletta tennispalloja. Laske pallojen yhteenlasketun tilavuuden ja rasian tilavuuden suhde.

b) Mikä on pallojen yhteenlasketun tilavuuden ja rasian tilavuuden suhde, jos putkessa on n palloa?

c) Miten tulos riippuu n :stä ja pallon säteestä?

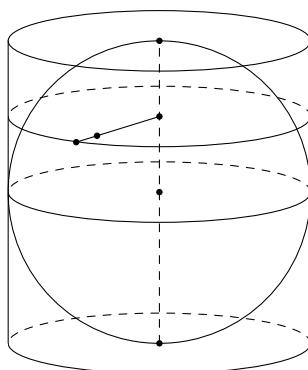
★ d) Laske pallojen yhteenlasketun tilavuuden ja pakkauksen kokonaistilavuuden suhde kuvion mukaisessa pakkauksessa, missä lieriön päädyt on pyöristetty päätypallojen pintoja myötäileviksi. Miten suhteelle käy, kun n kasvaa hyvin suureksi?



n palloa

PROJEKTIOITA

- 6) Kuviossa on karttapallo ja sitä ympäröivä lieriön vaippa. Piirtämällä napoja yhdistävältä halkaisijalta sitä vastaan kohtisuoria janoja vaipalle nähdään, että napoja lukuunottamatta jokaista pallon pistettä vastaa täsmälleen yksi vaipan piste. Pallon pinta napoja lukuunottamatta siis *kuvautuu* vaipalle. Kun vaippa leikataan auki napoja yhdistävän halkaisijan suuntaisesti ja levitetään tasoon, saadaan yksilehtinen tasokartta maapallosta.



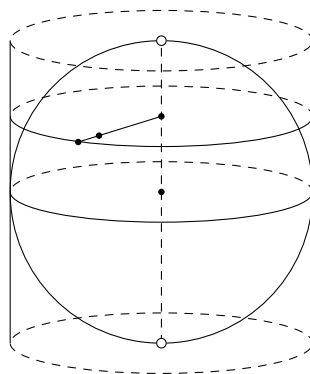
- a) Piirrä pallolle jokin leveyspiiri ja jokin pituuspiiri eli meridiaani.

- b) Suomi sijaitsee etelä-pohjoissuunnassa noin välillä 60° – 70° pohjoista leveyttä ja länsi-itäsuunnassa noin välillä 20° – 30° itäistä pituutta. Miksi Suomi ei ole jotakin neliön ja ympyrän väliltä, onhan astelukujen erotus 10° molemmissa suunnissa?

- c) Miten kuvautuvat navat, leveyspiirit ja pituuspiirit, kun niiden pisteet muutetaan lieriön vaipan pisteiksi edellä kuvatulla tavalla?

- d) Mitkä maapallon alueet kuvautuvat tasokartalle lähes oikean näköisinä? Mitkä vääristyvät voimakkaasti?

Esimerkki: Tarkastellaan palloa, josta on poistettu navat, ja sitä ympäröivää suoran lieriön vaippaa, josta on poistettu ylä- ja alareunat. Näillä pinnoilla on sama määrä pisteitä, sillä niiden välille saadaan yksi-yhteen kuvaus piirtämällä napoja yhdistävältä halkaisijalta sitä vastaan kohtisuoria janoja vaipalle.



Yksi-yhteen tarkoittaa sitä, että jokaista pallon pinnan pistettä napoja lukuunottamatta vastaa yksikäsitteisesti määrätty lieriön reunattoman vaipan piste ja kääntäen, jokaista lieriön reunattoman vaipan pistettä vastaa yksikäsitteisesti määrätty pallon pinnan piste napoja lukuunottamatta. Näissä pinnoissa on siis sama määrä pisteitä.

- 7) Tehtävän 4 b-kohdassa näytettiin, että pallon pinta-ala ja palloa ympäröivän suoran lieriön vaipan pinta-ala ovat yhtä suuret. Äskeisen esimerkin mukaan pallossa, josta on poistettu navat, on yhtä paljon pisteitä kuin suoran lieriön reunattomassa vaipassa. Voiko pallon ja lieriön vaipan pinta-alojen yhtäsuuruus johtua siitä, että pinnoilla on sama määrä pisteitä?

Tutkimme tätä ja muita vastaavia kysymyksiä tehtävissä 8–10.

- 8) Osoita, että kaikissa ympyröissä on sama määrä pisteitä. Ohje: Leikkaa aluksi suoraa ympyräpohjaista kartiota pohjan suuntaisella tasolla. Miten saat leikkauskuviona olevan ympyrän ja kartion pohjan välille yksi-yhteen kuvauksen?

Edellä osoitit, että kaikissa ympyröissä on sama määrä pisteitä.

Onko niillä kaikilla sama pinta-ala? _____

- 9) Osoita, että kaikilla pallopinnoilla on sama määrä pisteitä.

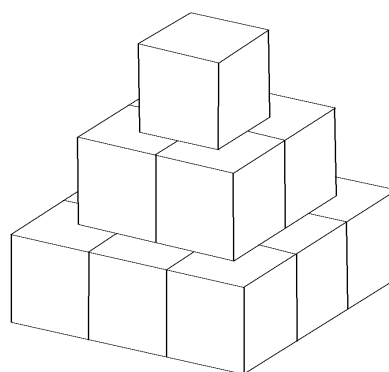
- 10) Osoita sopivalla geometrisella konstruktiolla, että jokaisessa reaaliakselin avoimessa välissä $]0, r[= \{x \mid 0 < x < r\}$ on sama määrä reaalilukuja.

Tehtävien 8–10 paradoksaalisilta tuntuvat tulokset johtuvat siitä, että tarkasteltavat joukot ovat äärettömiä. Niistä voit lukea enemmän Solmun diplomisivulla olevasta kirjoituksesta

<http://matematiikkalehtisolmu.fi/2008/diplomi/cantor.pdf> .

- 11) Helsingin sijainti on noin 60° pohjoista leveyttä. Kuinka monta metriä sekunnissa Helsinki liikkuu maan pyörimisen johdosta? Laskuissa voit pitää maata pallona, jonka säde on 6 370 km.
-

- 12) Kuvassa oleva pyramidi on rakennettu kolmeen kerrokseen 1 cm^3 kuutioista. Pyramidin pinnan ala on 42 cm^2 . Käyttämällä samaa tekniikkaa rakennetaan isompi pyramidi, jonka kokonaispinta-ala on 2352 cm^2 . Kuinka monta kerrosta isommassa pyramidissa on?



- ★ 13) Ympyränmuotoiselle pöydälle on sijoitettu neljä kolikkoa siten, että jokaisen kolikon koko toinen sivu koskettaa pöydän pintaa. Toisaalta yhtään kolikkoa ei enää mahdu pöydälle. Pöydän säde on R ja jokaisen kolikon säde on r . Todista, että

$$\frac{1}{2} \left(\frac{R}{r} - 1 \right) \leq 2 \leq \frac{R}{r}.$$

- 14) Ympyränmuotoiselle pöydälle on sijoitettu n kappaletta kolikoita siten, että jokaisen kolikon koko toinen sivu koskettaa pöydän pintaa. Toisaalta yhtään kolikkoa ei enää mahdu pöydälle. Pöydän säde on R ja jokaisen kolikon säde on r . Todista, että

$$\sqrt{n} \leq \frac{R}{r}.$$
