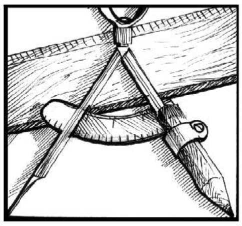
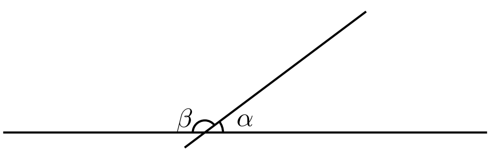


Paralleelipostulaatti

Petteri Harjulehto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Helsingin yliopisto

Johdanto

Eukleideen eli Eukleides Aleksandrialaisen kirjoittama Stoikheia (Alkeet, latinaksi Elementa) on ensimmäinen systemaattinen esitys geometriasta. Se julkaistiin noin 300 eaa. Kirjan alussa esitellään viisi postulaattia eli yleisesti hyväksyttävää totuutta (aksiomaa) ja kaikki tulokset pyritään rakentamaan käyttäen näitä totuuksia ja yleisesti hyväksyttyjä päättelysääntöjä. Matematiikassa tällaista kutsutaan aksiomaattiseksi järjestelmäksi. Myöhemmin on osoittautunut, että Eukleideen Elementa sisältää useita piilo-oletuksia ja epätarkkuuksia; se voidaan kuitenkin järkevällä tavalla täydentää aksiomaattiseksi järjestelmäksi. En tässä käsittele Elementan virheitä ja sen postulaattien täydentämistä, vaan keskityn viidennen postulaatin rooliin. Elementan neljä ensimmäistä postulaattia eli aksiomaa ovat intuitiivisesti toden tuntuisia ja ne on helppo hyväksyä lähtökohdaksi. Ennen näiden esittelemistä esittelen käsitteet suorakulma ja yhdensuuntaiset suorat. Ajatellaan, että kaksi suoraa leikkaavat kuten Kuvassa 1. Jos α ja β ovat yhtäsuuria niin ne ovat suorakulmia. Suorat ovat yhdensuuntaisia, jos niillä ei ole yhteisiä pisteitä.



Kuva 1. Suorakulman määritelmä.

Eukleideen neljä ensimmäistä postulaattia:

(P1) *Kaksi pistettä voidaan yhdistää janalla.*

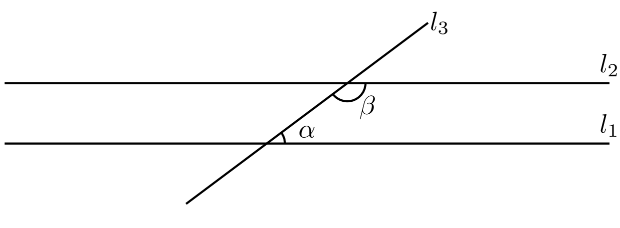
(P2) *Jokainen jana voidaan jatkaa suoraksi.*

(P3) *Jos on annettu kaksi pistettä, voidaan piirtää ympyrä siten, että toinen piste on keskipiste ja ympyrän kehä kulkee toisen pisteen kautta.*

(P4) *Kaikki suorakulmat ovat yhtäsuuria.*

Viides postulaatti nimeltään Paralleelipostulaatti on luonteeltaan erilainen. Se on huomattavasti mutkikkaampi kuin neljä muuta.

(P5) *Olkoot suorat l_1, l_2 ja l_3 sekä kulmat α ja β kuten Kuvassa 2. Jos α ja β ovat yhteensä pienemmät kuin kaksi suorakulmaa, niin silloin suorat l_1 ja l_2 leikkaavat sillä puolella suoraa l_3, missä α ja β ovat.*



Kuva 2. Paralleelipostulaatti.

Paralleelipostulaatin luonteesta johtuen (todella) pitkään toivottiin, että se olisi todistettavissa muista postulaateista; useat aikansa huippumatematiikot yrittivät löytää todistuksen. Kaksituhatvuotinen unelma romahti vasta 1800-luvun puolivälissä hyperbolisen geometrian löytämisen myötä. Todistusyritykset eivät kuitenkaan menneet hukkaan, vaan tuottivat lukuisia Paralleelipostulaatin kanssa yhtäpitäviä väitteitä. Yhtäpitävyydellä tarkoitan tässä sitä, että käyttäen postulaatteja P1-P4 ja niistä seuraavia lauseita ja olettaen väite saadaan Paralleelipostulaatti todistetuksi ja vastaavasti siitä saadaan todistetuksi väite.

Kaikille aiheesta kiinnostuneille voin suositella Marvin Jay Greenbergin erinomaista kirjaa "Euclidean and Non-Euclidean Geometries", josta W. H. Freeman and Company julkaisi neljännen laitoksen tänä vuonna.

Paralleelipostulaatin kanssa yhtäpitäviä väitteitä

Tässä kappaleessa keskustellaan ehdoista, jotka ovat Paralleelipostulaatin kanssa yhtäpitäviä. Olen valinnut ensimmäiseksi ehdoksi John Playfairin (1748-1819) version, koska se on yksinkertainen ja yleisesti käytössä.

Ehto 1. *Olkoot l suora ja P sen ulkopuolinen piste. Tällöin pisteen P kautta kulkee* ***korkeintaan yksi*** *suoran l kanssa yhdensuuntainen suora.*

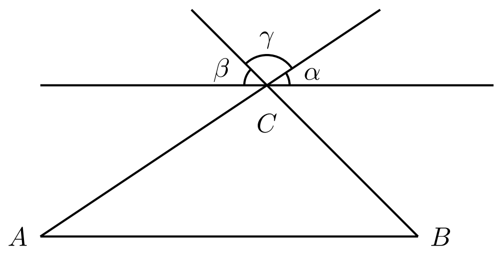
Itse asiassa edellisessä ehdossa voisi olettaa, että tällaisia suoria on **täsmälleen yksi**, sillä vähintään yhden yhdensuuntaisen suoran olemassaolo seuraa postulaateista P1-P4. Myös seuraavat kaksi yhdensuuntaisia suoria koskevaa ehtoa ovat yhtäpitäviä paralleelipostulaatin kanssa.

Ehto 2. *Olkoot l_1 ja l_2 kaksi yhdensuuntaista suoraa. Jos suora t leikkaa suoraa l_1, niin se leikkaa myös suoraa l_2.*

Ehto 3. *Olkoot l_1 ja l_2 kaksi yhdensuuntaista suoraa. Jos suora t leikkaa suoran l_1 kohtisuoraan, niin se leikkaa myös suoran l_2 kohtisuoraan.*

Ehto 4. *Olkoot l suora ja P sen ulkopuolinen piste. Tällöin kaikki ne pisteet, jotka ovat yhtä kaukana suorasta l kuin pisteestä P ja ovat samalla puolella suoraa l kuin piste P, muodostavat suoran joka on yhdensuuntainen suoran l kanssa.*

Paralleelipostulaatille voidaan antaa yhtäpitäviä ehtoja puhumatta lainkaan yhdensuuntaisista suorista. Tarkastellaan seuraavaksi kolmiota ABC ja yritetään osoittaa, että sen kulmien summa on kaksi suorakulmaa. Tehdään kuten Kuvassa 3: piirretään pisteen C kautta sivun AB kanssa yhdensuuntainen suora ja jatketaan sivuja AC ja BC. Saamme kolme kulmaa α, β ja γ, jotka ovat yhteensä kaksi suorakulmaa. Ristikulmana γ on yhtäsuuri kuin kulma ACB. Haluaisimme osoittaa, että α on yhtäsuuri kuin kulma CAB ja β on yhtäsuuri kuin kulma CBA. Tämä on kuitenkin mahdollista vain jos pisteen C kautta kulkee täsmälleen yksi suoran AB kanssa yhdensuuntainen suora. Itse asiassa pätee enemmän: seuraavat väitteet ovat Paralleelipostulaatin kanssa yhtäpitäviä ja siis myös keskenään.



Kuva 3. Kolmion kulmien summa.

Ehto 5. *On olemassa kolmio, jonka kulmien summa on kaksi suorakulmaa.*

Ehto 6. *Kaikille kolmioille pätee, että kulmien summa on kaksi suorakulmaa.*

Ehto 7. *On olemassa suorakulmio (suunnikas, jossa on neljä suorakulmaa).*

Erityisesti pätee siis, että joko kaikille kolmioille kulmien summa on kaksi suorakulmaa tai millään kolmiolla ei ole tätä ominaisuutta. Ehdosta 7 saadaan Ehto 5 piirtämällä suorakaiteelle halkaisija, jolloin meillä on kaksi yhtenevää kolmiota, joille molemmille pätee, että kulmien summa on kaksi suorakulmaa.

Kolmioiden avulla paralleelipostulaatille voidaan antaa yhtäpitäviä ehtoja, jotka ovat hyvin abstrakteja, eivätkä ensilukemalla tunnu liittyvän mitenkään yhdensuuntaisuuteen.

Ehto 8. *Jokaista positiivista reaalilukua r kohti on olemassa kolmio, jonka pinta-ala on suurempi kuin r.*

Ehto 9. *Pythagoraan lause pätee suorakulmaisille kolmioille.*

Ehto 10. *Puoliympyrän sisältämä kehäkulma on suorakulma.*

Historiallisesti näiden ehtojen löytyminen ulottuu laajalle aikavälille. Varhaisimmat ovat antiikin Kreikasta ja viimeisimmät 1800-luvulta. Merkittäviä geometrian tutkijoita olivat, jo mainitun John Playfairin lisäksi, esimerkiksi Alexis-Claude Clairaut (1713-1765), joka löysi Ehdon 7, sekä Girolamo Saccheri (1667-1733) ja Johann Heinrich Lambert (1728-1777), jotka tutkivat kolmion kulmien summaa.

Hyperbolinen geometria

Hyperbolinen geometria on esimerkki epäeuklidisesta geometriasta, joka jakaa yhteisen perustan euklidisen geometrian kanssa. Se perustuu Eukleideen postulaatteihin P1-P4 ja hyperboliseen paralleelipostulaattiin (HPP), joka on looginen negaatio Paralleelipostulaatille. Näin ollen hyperbolisen geometrian löytyminen osoitti, että Paralleelipostulaattia ei voi todistaa postulaateista P1-P4.

(HPP) *On olemassa suora l ja sen ulkopuolinen piste P siten, että pisteen P kautta kulkee* ***vähintään kaksi*** *suoran l kanssa yhdensuuntaista suoraa.*

Hyperbolinen paralleelipostulaatti voidaan yleistää koskemaan kaikkia suoria ja pisteitä.

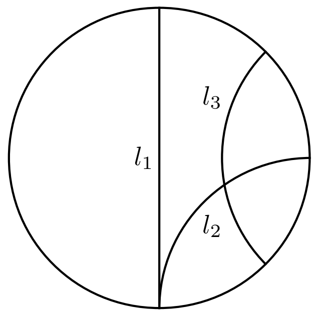
(Yleistetty HPP) *Olkoot l suora ja P sen ulkopuolinen piste. Tällöin pisteen P kautta kulkee* ***vähintään kaksi*** *suoran l kanssa yhdensuuntaista suoraa.*

Ensimmäiset hyperbolisesta geometriasta julkaisseet matemaatikot olivat János Bolyai (1802-1860), Carl Friedrich Gauss (1777-1855) ja Nikolai Ivanovich Lobachevsky (1792-1856), joka ehti ensimmäiseksi vuonna 1829. Tiedemaailma ei ottanut uutta, "häpeämätöntä" ja "julkeaa", "imaginaarigeometriaa" lämpimästi vastaan. Myöhemmin on osoittautunut, että hyperbolisella geometrialla on runsaasti sovelluksia niin matematiikan sisällä kuin fysiikassakin.

Havainnollistan Henri Poincarén (1854-1912) mallin avulla hyperbolista geometriaa, jotta näemme minkälaisia ilmiöitä siinä esiintyy. Olkoon $D := \{(x,y) : x^2 + y^2 < 1\}$. Tämä avoin origokeskinen yksikkökiekko on nyt meidän "avaruutemme". Määritellään d-suorat, joita on kahdenlaisia ja jotka ovat yksikkökiekossa D:

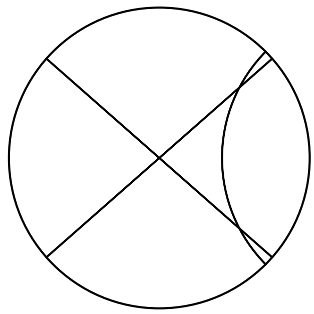
- Kaikki origon kautta kulkevat kiekon D halkaisijat (tai tarkemmin se osa halkaisijasta joka sijaitsee kiekossa D).
- Kiekossa D oleva kaari niistä tason ympyröistä, jotka ovat kohtisuorassa ympyrää $\{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\}$ vastaan.

Erityisesti kannattaa huomioida, että jälkimmäistä tyyppiä olevat d-suorat eivät kulje origon kautta. Osoittautuu, että nämä d-suorat toteuttavat postulaatit P1-P4 ja HPP. Kahden d-suoran välinen kulma tulkitaan leikkauspisteeseen piirrettyjen tangenttien väliseksi kulmaksi.



Kuva 4. Poincarén mallin d-suoria.

Kuvassa 4 on kolme d-suoraa, joista näkyy hyperbolisen geometrian erikoispiirteitä. Suorat l_1 ja l_2 ovat yhdensuuntaisia, mutta silti mielivaltaisen lähellä toisiaan (suorien jatkeet leikkaavat kiekon D reunalla, mutta tämä reuna on jo mallin ulkopuolella). Suorat l_2 ja l_3 leikkaavat ja ovat molemmat suoran l_1 kanssa yhdensuuntaisia eli suora l_3 leikkaa vain toisen yhdensuuntaisista suorista l_1 ja l_2.



Kuva 5. Kolmio Poincarén mallissa.

Kuvassa 5 on kolme d-suoraa, joiden osat muodostavat kolmion. On helppo huomata, vaikkapa piirtämällä d-suorien kolmion päälle tavallisen kolmion, että d-suorien kolmion kulmien summa on aidosti pienempi kuin kaksi suorakulmaa. Lisäksi on selvää, että d-suorien muodostaman kolmion ala ei voi olla suurempi kuin yksikkökiekon D ala.