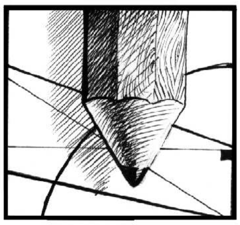


Analyysin alkulähteillä

Markku Halmetoja
Mäntän lukio

Differentiaalilaskentaa harjoitettiin miltei 200 vuotta ennen kuin sen perustana olevat reaaliluvut sekä funktio ja sen raja-arvo määriteltiin täsmällisesti turvautumatta geometriseen havaintoon ja "rajattoman lähestymisen" kaltaisiin kuvaileviin ilmaisuihin. Tämä tapahtui 1800-luvulla, ja samalla selkiytyivät funktion jatkuvuuteen ja derivoituvuuteen liittyneet ongelmat. Sitä ennen oli jopa yritetty todistaa, että jatkuvat funktiot olisivat myös derivoituvia joitakin yksittäisiä kohtia lukuunottamatta. Käsitteiden selkiytymisen myötä keksittiin kuitenkin funktioita, jotka ovat kaikkialla jatkuvia, mutta joilla ei ole derivaattaa yhdessäkään kohdassa. Tällaisten ja muidenkin vastaavien funktioiden olemuksen ymmärtäminen edellyttää tiettyjen analyysin peruskäsitteiden täsmällistä tuntemista. Reaaliluvuista kuitenkin riittää koulumatematiikassa annettu intuitiivinen kuva. Tiedämme, että ne voidaan asettaa vastaavuuteen suoran pisteiden kanssa, joten on luontevaa puhua niiden välisistä etäisyyksistä. Tiedämme myös, että jokaisella välillä $]a,b[$ on vähintään yksi rationaalinen ja irrationaalinen luku. Analyysin täsmälliseen käsitteistöön voi perehtyä teosten [1], [2] ja [4] avulla. Lukijan mukavuutta ajatellen esitämme kuitenkin tämän artikkelin ymmärtämiseksi tarvittavat esitiedot.

Perusasioita

Lukujonon (a_n) raja-arvo on a, jos lukujen a ja a_n välinen etäisyys voidaan tehdä pienemmäksi kuin mikä tahansa positiivinen luku valitsemalla n riittävän suureksi, siis jos jokaista positiivista lukua ε vastaa positiivinen kokonaisluku n_ε siten, että $n > n_\varepsilon \Rightarrow |a - a_n| < \varepsilon$. Jos jonolla on raja-arvo, niin jono suppenee. Muussa tapauksessa jono hajaantuu. Jos jono on kasvava ja ylhäältä rajoitettu, tai vähenevä ja alhaalta rajoitettu, niin monotonisen jonon suppenemislauseen mukaan se suppenee.

Olkoon funktio f määritelty kohdan x_0 eräässä ympäristössä tätä kohtaa mahdollisesti lukuunottamatta. Funktiolla on kohdassa x_0 raja-arvo a, jos jokaista positiivista lukua ε vastaa sellainen positiivinen δ_ε, että

$$0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon \quad \Rightarrow \quad |f(x) - a| < \varepsilon.$$

Jos löytyy kohti lukua x_0 suppeneva jono, jota vastaava funktion arvoista muodostuva jono hajaantuu, niin funktiolla ei ole raja-arvoa kohdassa x_0. Jos taas löytyy kaksi eri jonoa, jotka suppenevat kohti lukua x_0, mutta joita vastaavilla funktion arvoista muodostuvilla jonoilla on eri raja-arvot, niin silloinkaan funktiolla ei ole raja-arvoa kohdassa x_0.

Funktio on jatkuva kohdassa x_0, jos funktion raja-arvo kohdassa x_0 on sama kuin funktion arvo tässä kohdassa. Siis funktio f on jatkuva kohdassa x_0, jos jokaista positiivista lukua ε vastaa sellainen positiivinen δ_ε, että

$$0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Jos funktio ei ole jatkuva kohdassa x_0, niin se on epäjatkuva tässä kohdassa.

Funktio f on jaksollinen ja $\omega \neq 0$ on sen jakso, jos $f(x+\omega) = f(x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Pienintä positiivista jaksoa, jos sellainen on olemassa, sanotaan funktion perusjaksoksi. Esimerkiksi sinifunktion perusjakso on 2π.

Outoja funktioita

Määritelmien toimivuuden koettelemiseksi, ja pelkästä uteliaisuudestakin, on ollut tarpeen kehitellä toinen toistaan kummallisempia "patologisia" funktioita. Esittelemme aluksi harjoitustehtävinä kolme jatkuvuutta ja derivoituvuutta havainnollistavaa esimerkkiä.

1. Osoita, että funktio
$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x \in \mathbb{Q}, \\ 1, & \text{kun } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$
on jaksollinen ja epäjatkuva kaikkialla. Määritä funktion jaksot. Onko sillä perusjakso? Saksalainen matematiikko Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805 – 1859) laati tämän esimerkin ilmeisesti osoittaakseen, että on olemassa muitakin kuin lausekkeiden avulla määriteltyjä funktioita.

2. Osoita, että funktio
$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{kun } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{kun } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$
on jatkuva ja derivoituva ainoastaan yhdessä kohdassa.

3. Funktio f on määritelty siten, että $f(x) = 0$, kun $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, ja jos $x = p/q$, missä $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z}_+$ ja $\mathrm{syt}(p,q) = 1$, niin $f(x) = 1/q$. Osoita, että tämä funktio on jatkuva irrationaalisissa kohdissa ja epäjatkuva muulloin. Onko f derivoituva irrationaalisissa kohdissa?

Kuten alussa totesimme, on myös funktioita, jotka ovat kaikkialla jatkuvia mutta eivät missään derivoituvia. Ensimmäiset sellaiset keksittiin 1800-luvulla, mutta ne ovat hyvin vaikeita. Myöhemmin 1900-luvulla keksittiin funktioita, joille tämä merkillinen ominaisuus on helpompi todistaa. Käsittelemme niistä kaksi, ja aloitamme hollantilaisen matemaatikon Bartel Leendert van der Waerdenin (1903 – 1996) vuonna 1930 julkaisemalla erittäin kauniilla esimerkillä.

Olkoon $\{x\}$ luvun x etäisyys lähimmästä kokonaisluvusta. Funktio $x \mapsto \{x\}$ on jatkuva ja jaksollinen. Sen perusjakso on 1 ja $|\{x\} - \{y\}| \leq \frac{1}{2}$ kaikilla $x,y \in \mathbb{R}$.

Esimerkkifunktiomme on
$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\{10^k x\}}{10^k}.$$

Näytämme aluksi, että se on määritelty kaikilla x:n arvoilla. Osasummien
$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\{10^k x\}}{10^k}$$
jono (f_n) on kasvava ja ylhäältä rajoitettu, sillä yhteenlaskettavat ovat ei-negatiivisia, ja
$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\{10^k x\}}{10^k} \leq \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{10^k} < \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{10^k} = \frac{5}{9}$$
kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Monotonisen jonon suppenemislauseen perusteella jono (f_n) suppenee kaikilla x:n arvoilla, joten f on kaikkialla määritelty.

Todistamme, että f on jatkuva. Olkoot $x_0 \in \mathbb{R}$ ja $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ mielivaltaisesti valittuja. Kirjoitamme funktion muotoon
$$f(x) = f_n(x) + r_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\{10^k x\}}{10^k} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\{10^k x\}}{10^k}.$$

Koska $|\{10^k x\} - \{10^k x_0\}| \leq \frac{1}{2}$, on mahdollista valita n niin suureksi, että
$$\begin{aligned} |r_n(x) - r_n(x_0)| &= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\{10^k x\} - \{10^k x_0\}}{10^k} \right| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|\{10^k x\} - \{10^k x_0\}|}{10^k} \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{\infty} 10^{-k} = \frac{1}{18} \cdot 10^{-n} \\ &< 10^{-n} < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Osasummat f_n ovat jatkuvia, sillä ne ovat jatkuvien funktioiden äärellisiä summia. On siis olemassa positiivinen δ_ϵ niin, että
$$0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Jos siis $0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon$, niin
$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |f_n(x) - f_n(x_0) + r_n(x) - r_n(x_0)| \\ &\leq |f_n(x) - f_n(x_0)| + |r_n(x) - r_n(x_0)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Täten f on kaikkialla jatkuva.

Osoitamme, että f ei ole derivoituva. Voimme rajoittua välille $[0,1[$, sillä f on jaksollinen ja sen perusjakso on 1. Olkoon siis $x = 0{,}a_1a_2a_3\ldots$ väliltä $[0,1[$ mielivaltaisesti valittu luku. Sovimme, että jos sen desimaalikehitelmä on tyyppiä $0{,}2999\ldots$, niin muutamme sen muotoon $0{,}3000\ldots$. Jos $0{,}a_{k+1}a_{k+2}\ldots \leq \frac{1}{2}$, niin $\{10^k x\} = 0{,}a_{k+1}a_{k+2}\ldots$ ja muussa tapauksessa

$\{10^k x\} = 1 - 0{,}a_{k+1}a_{k+2}\ldots$. Muodostamme kohti nollaa suppenevan jonon (h_m) siten, että erotusosamääristä

$$d_m = \frac{f(x+h_m) - f(x)}{h_m}$$

muodostuva jono (d_m) hajaantuu. Olkoon $h_m = -10^{-m}$, jos $a_m = 4$ tai $a_m = 9$, ja $h_m = 10^{-m}$ muulloin. Jos $k \geq m$, niin lukujen $10^k(x+h_m)$ ja $10^k x$ desimaaliosat ovat samat, jolloin $\{10^k(x+h_m)\} - \{10^k x\} = 0$. Tästä seuraa, että

$$\begin{aligned} d_m &= \frac{f(x+h_m) - f(x)}{h_m} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\{10^k(x+h_m)\} - \{10^k x\}}{10^k\, h_m} \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\{10^k(x+h_m)\} - \{10^k x\}}{10^k\, h_m}. \end{aligned}$$

Lukujen h_m valintatavasta johtuen tässä summassa yhteenlaskettavien osoittajissa olevat luvut $\{10^k(x+h_m)\}$ ja $\{10^k x\}$ ovat molemmat joko tyyppiä $0{,}a_{k+1}a_{k+2}\ldots$, jolloin

$$\frac{\{10^k(x+h_m)\} - \{10^k x\}}{10^k\, h_m} = \frac{\pm 10^{k-m}}{\pm 10^{k-m}} = 1,$$

tai tyyppiä $1 - 0{,}a_{k+1}a_{k+2}\ldots$, jolloin

$$\frac{\{10^k(x+h_m)\} - \{10^k x\}}{10^k\, h_m} = \frac{\mp 10^{k-m}}{\pm 10^{k-m}} = -1.$$

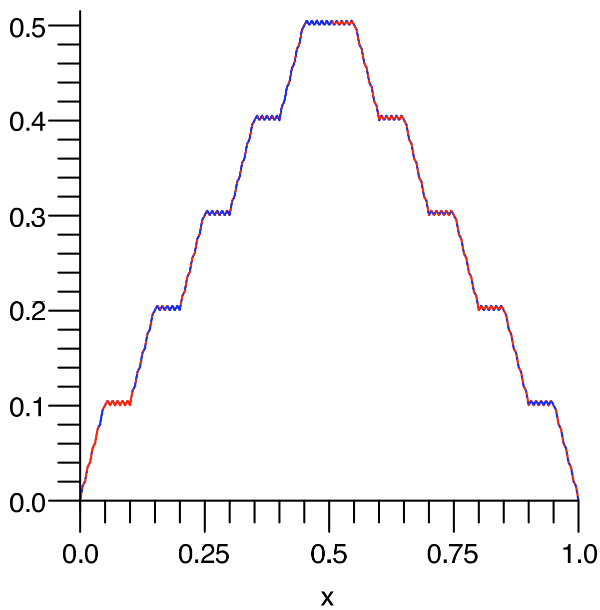
Siis summassa

$$d_m = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\{10^k(x+h_m)\} - \{10^k x\}}{10^k\, h_m}$$

jokainen yhteenlaskettava on joko 1 tai -1. Niinpä kaikilla m:n arvoilla

$$d_{m+1} = d_m + 1 \quad \text{tai} \quad d_{m+1} = d_m - 1,$$

joten jono (d_m) hajaantuu.



Kuvassa on van der Waerdenin funktion osasumman f_5:n kuvaajasta yksi jakso. Osoitteessa [6] olevasta kuvasarjasta voi visuaalisestikin oivaltaa, miksi f ei ole derivoituva.

Tässä esimerkissä desimaalikehitelmät mahdollistivat elegantin todistuksen. On kehitetty myös niistä riippumattomia esimerkkejä. Tutkimme Walter Rudinin teoksessaan [4] esittämää funktiota pienen esivalmistelun jälkeen.

Olkoon $\phi(x) = |x|$, kun $-1 \leq x \leq 1$. Jatkamme ϕ:n määrittelyä asettamalla $\phi(x+2) = \phi(x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Näin ϕ tulee jaksolliseksi ja sen perusjakso on 2. Kaikilla $m \in \mathbb{Z}$ on $\phi(2m) = 0$ ja $0 \leq \phi(x) \leq 1$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Kaikilla x:n ja y:n arvoilla on

$$|\phi(x) - \phi(y)| \leq |x - y|,$$

ja jos välillä $]x,y[$ ei ole kokonaislukuja, niin

$$|\phi(x) - \phi(y)| = |x - y|.$$

Rudinin esimerkkifunktio on

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^k \phi(4^k x).$$

Se osoitetaan kaikkialla määritellyksi ja jatkuvaksi samalla tavalla kuin van der Waerdenin funktiokin. Osoitamme, että f ei ole derivoituva. Olkoon x mielivaltainen reaaliluku, m positiivinen kokonaisluku ja

$$\delta_m = \pm \frac{1}{2} \cdot 4^{-m},$$

missä merkki valitaan niin, että lukujen $4^m x$ ja $4^m(x + \delta_m)$ välissä ei ole kokonaislukua. Tämä on mahdollista, sillä $|4^m x - 4^m(x+\delta_m)| = \frac{1}{2}$. Olkoon

$$\gamma_k = \frac{\phi(4^k(x+\delta_m)) - \phi(4^k x)}{\delta_m}.$$

Jos $k > m$, niin $4^k \delta_m$ on parillinen kokonaisluku, joten $\gamma_k = 0$. Koska lukujen $4^m x$ ja $4^m(x+\delta_m)$ välissä ei ole kokonaislukua, on

$$|\gamma_m| = \left| \frac{\phi(4^m(x+\delta_m)) - \phi(4^m x)}{\delta_m} \right| = \frac{1/2}{|\delta_m|} = 4^m.$$

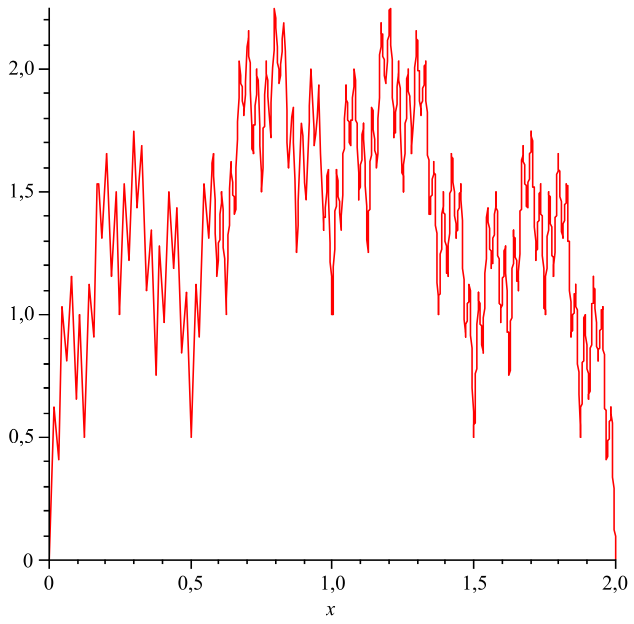
Jos vihdoin $0 \leq k < m$, niin

$$|\gamma_k| = \left| \frac{\phi(4^k(x+\delta_m)) - \phi(4^k x)}{\delta_m} \right| \leq \frac{4^k |\delta_m|}{|\delta_m|} = 4^k.$$

Tästä seuraa, että

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x+\delta_m)-f(x)}{\delta_m}\right| \\ &= \left|\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^k\gamma_k\right| = \left|\sum_{k=0}^{m}\left(\frac{3}{4}\right)^k\gamma_k\right| \\ &= \left|3^m+\sum_{k=0}^{m-1}\left(\frac{3}{4}\right)^k\gamma_k\right| \geq 3^m-\sum_{k=0}^{m-1}\left[\left(\frac{3}{4}\right)^k\cdot 4^k\right] \\ &= 3^m-\sum_{k=0}^{m-1}3^k=\frac{1}{2}\left(3^m+1\right).\end{aligned}$$

Näemme, että f:n erotusosamääristä muodostuva jono hajaantuu, sillä m:n kasvaessa $\delta_m \to 0$. Siis f ei ole derivoituva kohdassa x.



Kuvassa on Rudinin funktion osasumman f_3 kuvaajasta yksi jakso. Katso myös osoitteessa [7] olevaa kuvasarjaa.

Netistä löytyi (googlaamalla hakusanalla "nowhere differentiable function") John McCarthyn vuonna 1953 esittämä funktio

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}g(2^{2^n}x),$$

missä $g(x)=1+x$, kun $-2\leq x\leq 0$ ja $g(x)=1-x$, kun $0<x\leq 2$ ja $g(x+4)=g(x)$ kaikilla $x\in\mathbb{R}$. Rudinin funktio on tämän muunnelma. Itse asiassa myös van der Waerdenin funktio on muodostettu samantapaisella menetelmällä. Aluksi määritellään jaksollinen "sahanteräfunktio", jonka kuvaajaa sitten "rypytetään" niin, että lopulta sen jokainen piste on kärkipiste, jossa derivaatta ei ole määritelty. Tämä prosessi näkyy selvästi sivujen [6] ja [7] kuvasarjoissa. McCarthy pitää omaa esimerkkiään ja siihen liittyvää todistusta yksinkertaisimpana mahdollisena. Asiasta voi jokainen muodostaa oman käsityksensä nettilähdettä [5] tutkimalla. Tämän kirjoittaja pitää van der Waerdenin esimerkkiä esillä olleista yksinkertaisimpana. Sen ymmärtämiseksi teoksesta [3] ei tarvinnut tehdä töitä kynällä, kun taas Rudinin funktiota oli pyöriteltävä paperilla.

Samoihin aikoihin näiden konkreettisten esimerkkien keksimisen kanssa mietittiin myös kuinka yleisiä tällaiset funktiot ovat jatkuvien funktioiden joukossa. Vuonna 1931 puolalainen matemaatikko Stefan Banach (1892 – 1945) todisti välillä [0,1] jatkuvien funktioiden joukolle tuloksen, jota sen käsitteellisyyden takia emme voi muotoilla tähän täsmällisesti, ks. [8], s. 79. Hän todisti, että ne jatkuvat funktiot, joilla on derivaatta vähintään yhdessä välin [0,1] kohdassa, sijaitsevat kaikkien välillä [0,1] jatkuvien funktioiden joukossa samantyyppisesti kuin rationaaliluvut reaalilukujen joukossa. Siis suurin osa jatkuvista funktioista on juuri näitä ei-missään-derivoituvia funktioita, ja varsinaisia harvinaisuuksia ja analyysin kummajaisia ovatkin kaikkialla derivoituvat alkeisfunktiot!

Kiitän dosentti Heikki Apiolaa, dosentti Matti Lehtistä, dosentti Jorma Merikoskea sekä dosentti Timo Tossavaista tämän kirjoituksen viimeistelyä auttaneista kommenteista. Heikki Apiolalle erityinen kiitos kuvista sekä tätä kirjoitusta varten laadituista nettisivuista [6] *ja* [7].

Lähteet

[1] M. Halmetoja, K. Häkkinen *et al.*: *Matematiikan taito 13: Differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssi*. WSOY, 2008.

[2] J. Merikoski, M. Halmetoja, T. Tossavainen: *Johdatus matemaattisen analyysin teoriaan*. WSOY, 2004.

[3] F. Riesz, B. Sz.-Nagy: *Functional Analysis*. New York, 1990.

[4] W. Rudin: *Principles of Mathematical Analysis*. McGraw-Hill, 1987.

[5] `http://www-formal.stanford.edu/jmc/weierstrass.html`

[6] `http://math.tkk.fi/~apiola/solmu/08Weierstrass/mapleVanDerW1.html`

[7] `http://math.tkk.fi/~apiola/solmu/08Weierstrass/Weierstrass.html`

[8] J. Väisälä: *Topologia II*. Limes, 2005.