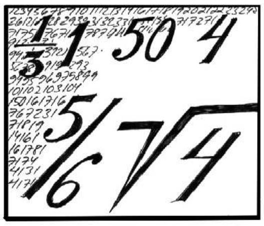

Äidinkielenä luvut

Srinivasa Ramanujanin syntymästä 120 vuotta

Eero Raaste
Jatko-opiskelija
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Helsingin yliopisto
eero.raaste@helsinki.fi

Vuoden 1913 tammikuun lopulla englantilainen matematiikko Godfrey Harold Hardy sai omituisen kirjeen. Kirje oli suurikokoinen ja siinä oli intialaisia postimerkkejä. Sisällä oli nippu nuhjuisia papereita, jotka sisälsivät suuren määrän matemaattisia kaavoja. Itse kirje oli kirjoitettu kankealla englannilla. Lähettäjä oli tuntematon intialainen, joka pyysi Hardyn mielipidettä kirjeessä esitetyistä matemaattisista tuloksista.

S. Ramanujan G.H. Hardylle, Madras 16. tammikuuta 1913:

”Hyvä herra,
pyydän esittäytyä Madrasin satamasäätiön tiliosaston virkailijana, joka ansaitsee vuodessa 20 puntaa. Olen nyt noin 23 vuoden ikäinen. Minulla ei ole yliopistollista koulutusta, mutta olen suorittanut tavanomaiset kouluopinnot. Koulun päätettyäni olen käyttänyt vapaa-aikani matematiikan parissa työskentelemiseen. En ole seurannut yliopistokurssien tavanomaista kulkua, vaan olen etsinyt uusia teitä. Olen tutkinut hajaantuvia sarjoja yleisesti. Paikalliset matemaatikot kuvailevat saavuttamiani tuloksia ’järisyttäviksi’.

Kuten alkeismatematiikassa annetaan merkitys a^n:lle, kun n saa negatiivisia ja murtolukuarvoja, mukailemaan sääntöä, joka pätee positiivisille kokonaisluvuille, samoin koko tutkimukseni pyrkii antamaan Eulerin toiselle integraalille merkityksen kaikilla n:n arvoilla. Yliopistossa opiskelleet ystäväni kertovat minulle, että $\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}\,dx = \Gamma(n)$ pätee vain kun n on positiivinen. Heidän mukaansa tämä integraaliyhtälö ei päde negatiivisilla n:n arvoilla. Olettaen tämän olevan totta ainoastaan n:n positiivisilla arvoilla ja myös olettaen määritelmän $n\Gamma(n) = \Gamma(n+1)$ olevan yleisesti tosi olen antanut merkityksen näille integraaleille.

Väitän, että näiden ehtojen pätiessä integraali on tosi myös kaikilla n:n negatiivisilla ja murtolukuarvoilla. Koko tutkimukseni perustuu tähän, ja olen kehitellyt tätä niin pitkälle, etteivät paikalliset matemaatikot pysty ymmärtämään korkealentoisia ajatuksiani.

Äskettäin sain käsiini julkaisemanne kirjoituksen *Orders of Infinity*, jonka sivulta 36 löysin väitteen, jonka mukaan annettua lukua pienempien alkulukujen määrälle ei ole olemassa eksplisiittistä lauseketta. Olen löytänyt kaavan, joka hyvin tarkasti approksimoi oikeaa tulosta. Virhe on häviävän pieni. Pyytäisin Teitä käymään läpi oheiset paperit. Olen köyhä, mutta jos olette vakuuttuneet niillä olevan jotakin arvoa, haluaisin saada teoreemani julkaistua. En ole kirjoittanut tutkimusteni tarkkaa kulkua enkä aina kaavojakaan, mutta olen hahmotellut suuntaviivoja, joita myöten olen edennyt. Koska olen kokematon, arvostaisin erittäin suuresti mitä tahansa neuvoa, jonka voitte minulle antaa. Pyydän anteeksi vaivaa, jonka täten aiheutan Teille.

Kunnioittavasti Teidän
S. Ramanujan"

Hardy vilkaisi kirjeen mukana olleita tuloksia, jotka vaikuttivat hurjilta ja mielikuvituksellisilta. Mukana oli myös tuttuja tuloksia, jotka myös esitettiin uusina keksintöinä. Väitteiden tueksi ei ollut esitetty todistuksia.

Hardy työnsi kirjeen syrjään ja ryhtyi tavallisiin puuhiinsa. Matemaatikot saivat tuolloinkin jos jonkinlaisia kirjeitä, joissa enimmäkseen ei ollut paljonkaan järkeä.

Aamuinen kirje kuitenkin vaivasi Hardya. Palattuaan kotiin hän lähetti sanan ystävälleen ja kollegalleen John Edensor Littlewoodille ja pyysi tätä luokseen vilkaisemaan omituista kirjettä.

Iltayhdeksältä he ryhtyivät työhön ja jo saman vuorokauden puolella he olivat varmoja siitä, että kirjoittaja ei ollut mikään tavanomainen kaheli vaan matemaattinen nero. Heti seuraavana päivänä Hardy ryhtyi toimiin Ramanujanin saamiseksi Englantiin ja Cambridgeen.

Srinivasa Ramanujan Aiyangar syntyi 22. joulukuuta 1887 köyhään bramiiniperheeseen eteläintialaisessa Erodessa, jossa hänen äitinsä Komalatammalin vanhemmat asuivat. Ramanujanin isä Srinivasa oli pikkuvirkailija vaatekaupassa Kumbakonamissa, jonne myös äiti palasi Ramanujanin kanssa juuri ennenkuin tämä täytti vuoden.

Ramanujan sairastui kaksivuotiaana isorokkoon, ja arvet säilyivät hänen kasvoissaan koko iän. Ramanujanin jälkeen syntyneet kolme sisarta kuolivat kaikki parin kuukauden iässä. Vasta 1898 ja 1905 syntyneet veljet elivät aikuisiksi. Niinpä Ramanujan oli käytännössä ainoa lapsi. Äiti oli hänelle kaikki kaikessa. Hän leikki poikansa kanssa mutta opetti myös hindulaisuuden jumaltaruja ja perinteitä. Komalatammal ja Ramanujan pelasivat erilaisia pelejä, kuten "tiikerit ja vuohet" -strategiapeliä.

Vähän ennen viisivuotispäiväänsä koulun aloittanut Ramanujan oli kapinallinen oppilas, vaikka hän alkuvuosina oli luokkansa paras lähes kaikissa aineissa, minkä seurauksena hän saattoi opiskella stipendin turvin. Stipendi oli perheen elannolle tärkeä, ja lisäksi he tarjosivat täysihoitoa opiskelijoille. Nämä huomasivat pienen Ramanujanin kiinnostuksen matematiikkaan ja ruokkivat sitä.

Opiskelijapojat lainasivat Ramanujanille S. L. Loneyn kirjan *Trigonometry*, jonka hän hallitsi 13-vuotiaana. Varsinainen käänne oli tutustuminen G. S. Carrin kirjaan *A Synopsis of Elementary Results in Pure Mathematics*. Se oli kokoelma tuloksia, jotka enimmäkseen esitettiin kokonaan ilman todistuksia tai todistuksista annettiin vain suuntaviivat. Näihin aikoihin Ramanujan myös sai stipendin lukiota vastaavaan Kumbakonam's Government Collegeen.

Carrin kirjaan uppoutuminen muokkasi myös Ramanujanin työskentelytapoja. Hardy yritti myöhemmin epätoivoisesti saada Ramanujanin oppimaan täsmällisten todistusten merkityksen. Tämä ei kuitenkaan halunnut ymmärtää miksi itsestäänselvyyksiä piti kirjata paperille.

Matematiikka alkoi vallata Ramanujanin kaiken ajan, ja hänen kouluarvosanansa heikkenivät (muissa aineissa). Hän menetti stipendinsä, mikä oli taloudellisestikin merkitsevä takaisku. Vielä enemmän se kolautti Ramanujanin itsetuntoa. Epätoivoisena hän karkasi kotoa. Joidenkin viikkojen kuluttua isä Srinivasa löysi poikansa ja toi hänet kotiin.

Yliopiston pääsykokeet kilpistyivät riittämättömään menestykseen englanninkielessä. Toisenkin yrityksen epäonnistuttua Ramanujanin oli keksittävä muuta. Hän käytti koko valveillaoloaikansa matematiikan tutkimiseen ja merkitsi tulokset muistikirjaan, jota hän käytti referenssinä työtä hakiessaan. Myöhemmin muistikirja täyttyi ja niitä tuli lisää. Ramanujanin muistikirjojen tulosten verifioiminen on jatkunut näihin päiviin saakka.

Vuoden 1908 lopulla äiti päätti, että Ramanujanin oli avioiduttava. Vaimoksi valittiin etäinen sukulaistyttö Janaki, joka tuolloin oli vasta 9-vuotias. Nuoripari ei vuosiin asunut saman katon alla, mutta uusi aviosääty pakotti Ramanujanin työnhakuun. Ongelmana oli vain se, että työn olisi pitänyt tarjota elannon lisäksi aikaa harrastaa matematiikan tutkimista.

Monen yrityksen jälkeen Ramanujan sai ystävien välityksellä toimen Madrasin satamasäätiön tilivirastosta. Palkka oli pieni, mutta tärkeämpää oli se, että vähitellen Ramanujan saattoi käyttää myös kaiken työaikansa matematiikkaan.

Vuonna 1911 Ramanujan sai ensimmäisen tieteellisen artikkelinsa julkaistua *Journal of the Indian Mathematical Societyssa*. Se käsitteli Bernoullin lukuja B_n, $n \geq 0$, jotka määritellään funktiolla

$$\frac{z}{e^z - 1} =: \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{z^n}{n!}, \ |z| < 2\pi.$$

Ramanujanin matemaattiset tulokset olivat niin vaikeita, että Intiasta oli hankalaa löytää ketään, joka olisi niitä ymmärtänyt. Madrasilainen professori Charles Griffith lähetti Ramanujanin puolesta kirjeen Lontooseen professori M. J. M. Hillille. Siihen hän liitti suuren joukon Ramanujanin tuloksia, joista hän pyysi professorin arviota.

Hill vastasi usean viikon odottelun jälkeen kirjeellä, jossa hän kehotti Ramanujania kiinnittämään erityistä huomiota selkeyteen ja virheettömyyteen. Hän neuvoi Ramanujania tutustumaan Bromwichin kirjaan *Theory of Infinite Series*, koska tuloksissa oli ollut selviä virheitä. Esimerkkinä seuraavat yhtäsuuruudet:

$$1+2+\ldots+\infty=-\frac{1}{12}$$
$$1^2+2^2+\ldots+\infty^2=0$$

ja

$$1^3+2^3+\ldots+\infty^3=\frac{1}{240}.$$

Hillin arvio oli odotettu, sillä hajaantuvia sarjoja vieroksuttiin yleisesti. Ramanujanin sarjojen voidaan tulkita edustavan Riemannin ζ-funktion arvoja pisteissä -1, -2 ja -3:

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-s}.$$

Funktio on joskus määritelty vain kompleksiluvuille s, joiden reaaliosa on ykköstä suurempi, mutta sen voi määritellä kaikille $s\neq 1$, missä s on kompleksiluku.

Seuraavaksi Ramanujan kirjoitti itse professori E. W. Hobsonille Cambridgeen, mutta palaute oli torjuvaa. Itse asiassa ei ole varmaa vastasiko Hobson lainkaan. Vihdoin, 16. tammikuuta 1913, Ramanujan kirjoitti Englannin ykkösmatemaatikoksi nousseelle Hardylle.

Hardyn ponnistelut Ramanujanin saamiseksi Englantiin olivat aluksi kaatua siihen, että tämä bramiinina ei katsonut voivansa lähteä tällaiselle matkalle. Taikauskoisen äiti-Komalatammalin unessa näkemä perhejumalatar Namagiri kuitenkin käski Ramanujanin lähteä, joten ongelmana oli enää raha. Intiassa vieraillut brittimatematiikko E. H. Neville, ja Ramanujanin tukijat Intiassa, joista vaikutusvaltaisin oli Sir Francis Spring, saivat asiat järjestymään. 14. huhtikuuta 1914 Ramanujan saapui Englantiin S.S. Nevasalla.

Ramanujanin ja Hardyn yhteistyö alkoi Ramanujanin muistikirjojen tutkimisella. Työ oli hidasta, mutta vähitellen julkaisuja alkoi ilmestyä. Vuonna 1914 vain yksi Ramanujanin artikkeli *Modular Equations and Approximations to* π julkaistiin *Quarterly Journal of Mathematicsissa.*

Eräs Ramanujanin esitys piille oli seuraava:

$$\frac{1}{\pi}=\frac{\sqrt{8}}{9801}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4n)![1103+26390n]}{(n!)^4 396^{4n}}.$$

Valitettavasti maailmansota syttyi kesällä 1914 sen jälkeen, kun arkkiherttua Frans Ferdinand murhattiin Sarajevossa 28. kesäkuuta. Sota vaikutti myös elämään Cambridgessä, jossa alkoi näkyä sotilaita. Trinity College tyhjeni matemaatikoista, jotka astuivat palvelukseen. Ramanujan ja Hardy kuitenkin jatkoivat työtään.

Ankaran vegetaarista dieettiä noudattavan Ramanujanin oli ollut työlästä saada kunnon ravintoa Englannissa muutoinkin, mutta sodan syttyminen pahensi tilannetta. Vihdoin keväällä 1917 Ramanujan sairastui vakavasti. Hänen ollessaan parantolassa Putneyssa Hardy kävi tapaamassa häntä: ”Olin tullut taksilla numero 1729, ja huomautin tämän luvun (7x13x19) olevan harvinaisen tylsän, ja että toivoin, ettei se olisi huono enne. ’Ei,’ hän vastasi, ’se on hyvin mielenkiintoinen luku; se on pienin luku, joka kahdella eri tavalla voidaan ilmaista kahden kuution summana.’ Kysyin häneltä luonnollisesti tiesikö hän vastaavan neljänsien potenssien ongelman vastausta; ja hän hetken mietittyään vastasi, ettei voinut nähdä mitään ilmeistä esimerkkiä, mutta hän arveli tällaisen luvun olevan hyvin suuri.”

Ramanujan näytti paranevan syksyyn mennessä, mutta pian hän joutui taas sairaalaan. Tautia hoidettiin tuberkuloosina, ja vasta useita kymmeniä vuosia myöhemmin (1994) se on pystytty diagnosoimaan ameeban aiheuttamaksi maksasairaudeksi. Hän oli ilmeisesti saanut tartunnan nuoruudessaan, mutta ameeba oli koteloitunut oireettomaksi, kunnes aliravitsemus ja stressi laukaisivat sen puhkeamaan uudelleen.

Sairautta saattoi pahentaa Ramanujanin tuntema mielipaha siitä, että hänelle luvattu asema Trinityn fellowna ei toteutunut. Ramanujanin nimitystä vastustettiin myös syistä, jotka vaikuttavat rasistisilta. Hardy oli voimakkaasti ajanut nimitystä, ja hän toimi kaikin tavoin myös Ramanujanin nimittämiseksi fellowksi Royal Societyyn. F.R.S. oli arvostetuin kunnianosoitus, jonka matemaatikko saattoi saada.

Ramanujan ei saanut tietoa F.R.S. -nimitysaikeista ajoissa, vaan masentuneena hän yritti päättää päivänsä hyppäämällä metrojunan eteen. Hän ei vahingoittunut, mutta joutui pidätetyksi: itsemurhan yrittäminen oli rikos. Hardy pelasti Ramanujanin poliisin hoteista vetoamalla juuri F.R.S. -arvoon (joka myönnettiin virallisesti vasta vähän myöhemmin). Pian tämän jälkeen Ramanujan nimitettiin myös Trinityn fellowksi.

Ramanujanin paluuta Intiaan oli suunniteltu aikaisemminkin, mutta vasta sodan loppuminen teki matkan riittävän turvalliseksi. Lähes tunnistamattomaksi muuttunut kalpea ja riutunut Ramanujan saapui Bombayhin 27. maaliskuuta 1919. Hän työskenteli koko sairautensa ajan herkeämättä. Viimeisinä aikoinaan hänen tutkimuksensa koskivat ”vale”-ϑ-funktioita. Näitä havaintojaan hän selosti 20. tammikuuta 1920 päivätyssä pitkässä kirjeessä Hardylle.

Ramanujan kuoli kotikaupungissaan Kumbakonamissa varhain aamulla 26. huhtikuuta 1920 vaimonsa, vanhempiensa ja muiden sukulaisten ympäröimänä.

Ehkä Ramanujanin työn paras asiantuntija Bruce Carl Berndt luettelee katsauksessaan Ramanujanin muistikirjoihin kaksitoista aluetta, joita ne käsittelevät: 1. alkeismatematiikka, 2. lukuteoria, 3. äärettömät sarjat, 4. integraalit, 5. asymptoottiset ekspansiot ja approksimaatiot, 6. gammafunktio ja siihen liittyvät funktiot, 7. hypergeometriset funktiot, 8. q-sarjat, 9. ketjumurtoluvut, 10. thetafunktiot ja modulaariset yhtälöt, 11. Ramanujanin teoria elliptisistä funktioista ja 12. luokkainvariantit. Muistikirjojen tutkimus jatkuu yhä.

Hardy arvioi Ramanujanin merkitystä toteamalla aluksi hänellä olleen erinomaisen muistin, mikä ei kuitenkaan ollut poikkeuksellista matemaatikoilla: "Hänen näkemyksensä algebrallisista kaavoista, äärettömien sarjojen muunnoksista, jne. oli hämmästyttävä. Tässä suhteessa en ole koskaan tavannut hänen veroistaan, ja voin verrata häntä vain Euleriin tai Jacobiin." ... "Muistillaan, kärsivällisyydellään ja laskentakyvyllään hän yhdisti tehokkaan yleistyksen, herkkyyden muodon hahmottamiseen ja kyvyn nopeasti muunnella oletuksiaan, mitkä olivat usein järisyttäviä tehden hänestä omalla erityisalallaan (osaajan), jolla ei ollut vertaa omana aikanaan."