

K . V Ä I S Ä L Ä

A L G E B R A N

O P P I - J A

E S I M E R K K I K I R J A

I

KAHDESTOISTA PAINOS

PORVOO \* HELSINKI  
WERNER SÖDERSTRÖM OSAKEYHTIÖ

*Kouluhallituksen hyväksymä*

WERNER SÖDERSTRÖM OSAKEYHTIÖN  
KIRJAPAINOSSA PORVOOSSA  
1963

## 11. PAINOKSEN ALKUSANAT

Tämän oppikirjan kymmenen ensimmäistä painosta ovat olleet samanlaisia, niin että niitä kaikkia on voitu käyttää rinnakkain kouluopetuksessa. Kun nyt on haluttu mukauttaa oppikirja paremmin keskikoulun uusiin oppiennätyksiin, tähän yhdenteentoista painokseen on tehty erinäisiä muutoksia, joista seuraavassa lyhyt selostus.

Huomattavin muutos koskee ensimmäisen asteen yhtälöitä. Oppikirjan selvyyttä silmällä pitäen ne ovat tähän asti olleet esitettyinä yhtenäisesti, omassa luvussaan. Kun uusissa oppiennätyksissä on määrätty opetettavaksi yhtälöitä jo kolmannelta luokalta lähtien, niin I luvun harjoitustehtävien joukkoon on lisätty yksinkertaisia ensimmäisen asteen yhtälöitä. Ne on tarkoitettu ratkaistavaksi nojautumalla vain erotuksen ja osamäärän määritelmään, jolloin ne osaltaan selventävät ja tehostavat näitä tärkeitä käsitteitä. Varsinaiset yhtälöiden sieventämismenetelmät on otettu puheeksi vasta II luvussa, neljännen luokan kurssissa, sen jälkeen kun on tutustuttu polynomikäsitteeseen ja polynomeilla laskemiseen. Näiden asioiden esittäminen jo aikaisemmassa vaiheessa voisi näet myöhemmin vaikuttaa sekoittavasti. Yhtälöt, joiden jäsenien nimittäjinä esiintyy muitakin kuin pelkkiä numerolukuja, on luonnollisesti jätetty käsiteltäväksi III luvussa murtolausekkeilla laskemisen jälkeen, keskikoulun viimeisellä luokalla. Ensimmäisen asteen yhtälöryhmät, joissa on enemmän kuin kaksi tuntematonta, toisen asteen yhtälöt ja suurin osa neliöjuurioppia, mikä kaikki kuuluu vasta lukion kurssiin, on siirretty liitettäväksi oppikirjan toisen osan seuraaviin painoksiin.

Vaikkakaan likiarvoilla laskemisesta ei oppiennätyksissä enää mainita algebran yhteydessä, niitä käsittelevä luku on kuitenkin säilytetty oppikirjassa. Se on vain nyt siirretty kirjan loppuun liitteeksi, niin että kukin opettaja voi suhtautua siihen opetuksessaan sen mukaisesti kuin arvelee oppilaidensa tarvitsevan täydennystä ja varmistusta ko. käytännön kannalta tärkeässä asiassa.

Oppiennätykset edellyttävät piirrettäväksi keskikoulussa yhden ainoan korkeamman kuin ensimmäisen asteen kokonaisen rationaalifunktion kuvaajan, nimittäin parabelin  $y = x^2$ . Tästä huolimatta sisältää esimerkkikirja edelleenkin muunkinlaisten tällaisten funktioiden kuvaajien piirtämistä koskevia harjoitustehtäviä, koska on tärkeätä, että oppilaille annetaan tilaisuus omatoimisestikin piirtää näitä käyriä. Sitä paitsi piirtämisen edellyttämä funktion arvojen laskeminen on hyödyllistä positiivisilla ja negatiivisilla luvuilla laskemisen harjoittelua.

Edellä mainittujen muutosten lisäksi on paikoitellen ja erityisesti oppikirjan alussa suoritettu erinäisiä esityksen yksinkertaistamisia. Suurin osa esityksestä on kuitenkin jäänyt ennalleen.

*Oppikirja perustuu tavanmukaiseen koulussa opittuun laskennon kurssiin, joten laskeminen kokonais-, murto- ja desimaaliluvuilla oletetaan tunnetuksi. Jatkuva laskujen käytännöllistä harjoittelua näillä luvuilla joutuu oppilas runsaasti suorittamaan harjoitustehtävien yhteydessä.*

Myös laskennon teoreettinen puoli tulee periaatteessa suurelta osalta keratuksi lukukäsitteen laajentamisen yhteydessä ja esitettäessä laskutoimituksia polynomeilla ja murtolausekkeilla. Lisäksi on tietenkin suotavaa, että sopivissa paikoissa käsitteiden laajentamisen yhteydessä palautetaan muistiin vastaavia asioita aritmetiikasta. Esimerkiksi kertolaskun vaihdanta-, liitanta- ja osittelulain yhteydessä on syytä lyhyesti muistutella, kuinka nämä havainnollisesti todistettiin, kun oli kysymyksessä positiiviset kokonaisluvut (ks. liitettä I s. 146).

Teorian selventämiseksi on oppikirjassa käsitelty runsaasti esimerkkejä. Varsinaisia oppilaiden suoritettaviksi aiottuja harjoitustehtäviä ei ole siroteltu pitkän oppikirjaa asianomaisiin teorian kohtiin, vaan ne muodostavat yhtenäisen kokoelman, ”esimerkkikirjan”, joka on liitetty kirjan loppuun. Näin on tehty sekä oppi- että esimerkkikirjan yhtenäisyyttä silmällä pitäen. Esimerkkikirjassa on noudatettu samaa aineenmukaista jaoittelua kuin oppikirjassa. Lisäksi on asianomaisissa oppikirjan kohdissa ilmaistu sulkeissa niiden harjoitustehtävien järjestysnumerot, jotka kulloinkin soveltuvat ratkaistaviksi.

Kirjan loppuun on liitetty tehtäviin vastauksia ja lyhyitä viitteitä joidenkin vaikeiden tehtävien ratkaisemiseksi. Onhan näet hyödyllistä, että oppilaalla on tilaisuus jo heti kotitehtävän ratkaistuaan tarkistaa, onko ratkaisu oikea, ja kielteisessä tapauksessa itse tutkia, missä virhe on, sekä tehdä uusi yritys oikean ratkaisun keksimiseksi. Vaikkakin itseksensä opiskelijan kannalta olisi tietysti toivottavaa, että kaikkiin tehtäviin olisi vastaukset, niin kouluopetusta ajatellen ei ymmärrettävistä syistä vastausta ole liitetty sellaisiin tehtäviin, jotka ovat päässälaskun luonteisia, yhtä vähän kuin sellaisiin, joissa tarkistuksen suorittaminen on helppoa ja harjoittelun kannalta suotavaa (esim. polynomien jako, yksinkertaiset yhtälöt ja probleemot).

Helsingissä toukokuulla 1962

*K. Väisälä*

Tämä *kahdestoista painos* on samanlainen kuin edellinen. Suomen Standardisointilautakunnan suosituksen (A. I. 15) mukaisesti on siirrytty käyttämään kulman tangentin lyhennyksenä ”tan” entisen ”tg” asemesta. Näin tullaan tekemään muissakin allekirjoittaneen oppikirjoissa sitä mukaa kuin niistä ilmestyy uusia painoksia.

Helsingissä joulukuulla 1962

*K. Väisälä*

## SISÄLLYS

### I luku. RATIONAALISET LUVUT

#### Merkitsemistapoja — Yhtälöitä

|                                         |   |
|-----------------------------------------|---|
| 1. Kirjaimien käyttö .....              | 1 |
| 2. Sulkumerkkien käyttö — Lauseke ..... | 1 |
| 3. Tulon merkitseminen .....            | 2 |
| 4. Yhtälö .....                         | 2 |

#### Negatiiviset luvut

|                                                 |   |
|-------------------------------------------------|---|
| 5. Negatiivisten lukujen määrittelemineen ..... | 3 |
| 6. Vastaluku — Itseisarvo .....                 | 4 |
| 7. Lukusuora ja lukujen suuruussuhteet .....    | 5 |

#### Yhteenlasku

|                                     |   |
|-------------------------------------|---|
| 8. Summan määrittelemineen .....    | 6 |
| 9. Summa lukusuoralla .....         | 8 |
| 10. Vaihdata- ja liitäntälaki ..... | 9 |

#### Vähennyslasku

|                                               |   |
|-----------------------------------------------|---|
| 11. Erotuksen määritelmä ja laskemineen ..... | 9 |
|-----------------------------------------------|---|

#### Kertolasku

|                                  |    |
|----------------------------------|----|
| 12. Tulon määrittelemineen ..... | 11 |
| 13. Kertolaskun peruslait .....  | 12 |

#### Jakolasku

|                                               |    |
|-----------------------------------------------|----|
| 14. Osamäärän määritelmä ja laskemineen ..... | 14 |
|-----------------------------------------------|----|

|                                       |    |
|---------------------------------------|----|
| 15. Summan jakaminen luvulla .....    | 15 |
| 16. Laajennettu murtolukukäsite ..... | 15 |
| 17. Suhde ja verranto .....           | 17 |

## II luku. POLYNOMIT

### Potenssit

|                                              |    |
|----------------------------------------------|----|
| 18. Potenssin määritelmä .....               | 20 |
| 19. Tulon ja murtoluvun potenssi .....       | 21 |
| 20. Potenssien kertominen ja jakaminen ..... | 21 |
| 21. 0:s ja negatiivinen potenssi .....       | 23 |

### Polynomien yhteen- ja vähennyslasku

|                                               |    |
|-----------------------------------------------|----|
| 22. Polynomikäsite .....                      | 24 |
| 23. Polynomien yhteen- ja vähennyslasku ..... | 25 |
| 24. Polynomin aste .....                      | 27 |

### Polynomien kertolasku

|                                           |    |
|-------------------------------------------|----|
| 25. Monomien kertominen .....             | 27 |
| 26. Monomin ja polynomin kertominen ..... | 28 |
| 27. Polynomien kertominen .....           | 28 |
| 28. Erotuksen ja summan tulo .....        | 28 |
| 29. Polynomin neliö .....                 | 29 |
| 30. Pascalin kolmio .....                 | 30 |

### Polynomien jakolasku

|                                    |    |
|------------------------------------|----|
| 31. Monomien jako .....            | 31 |
| 32. Polynomin jako monomilla ..... | 31 |
| 33. Polynomien jako .....          | 31 |

## **Ensimmäisen asteen yhtälöt**

|                                                                            |    |
|----------------------------------------------------------------------------|----|
| 34. Yhtälön sieventäminen — Ensimmäisen asteen yhtälön ratkaiseminen ..... | 33 |
| 35. Sekalaisia probleemoja .....                                           | 37 |
| 36. Prosenttilaskuja .....                                                 | 39 |
| 37. Korko- ja diskonttolaskuja .....                                       | 40 |
| 38. Arvopaperit (osakkeet ja obligaatiot) .....                            | 43 |

## **III luku. MURTOLAUSEKKEET**

### **Polynomien jaollisuusoppi**

|                                          |    |
|------------------------------------------|----|
| 39. Peruskäsitteitä .....                | 45 |
| 40. Polynomien jako alkutekijöihin ..... | 45 |
| 41. Pienin yhteinen jaettava .....       | 48 |

### **Murtolausekkeilla laskeminen**

|                                                     |    |
|-----------------------------------------------------|----|
| 42. Supistaminen .....                              | 49 |
| 43. Yhteen- ja vähennyslasku .....                  | 50 |
| 44. Kerto- ja jakolasku .....                       | 50 |
| 45. Rationaalisten lausekkeiden sieventäminen ..... | 51 |

### **Ensimmäisen asteen yhtälöt (jatkoa)**

|                                            |    |
|--------------------------------------------|----|
| 46. Nimittäjien poistaminen .....          | 51 |
| 47. Yhtälöpari ja kaksi tuntematonta ..... | 53 |
| 48. Probleemoja .....                      | 55 |

## **IV luku. NELIÖJUURET**

|                                      |    |
|--------------------------------------|----|
| 49. Juurikäsite .....                | 57 |
| 50. Irrationaaliset luvut .....      | 58 |
| 51. Neliöjuurien sieventäminen ..... | 59 |

|                                        |    |
|----------------------------------------|----|
| 52. Neliöjuuren arvon laskeminen ..... | 60 |
|----------------------------------------|----|

## V luku. FUNKTIOT JA NIIDEN KUVAAJAT

|                                                                  |    |
|------------------------------------------------------------------|----|
| 53. Funktiokäsite .....                                          | 63 |
| 54. Koordinaatisto .....                                         | 64 |
| 55. Funktion kuvaaja .....                                       | 65 |
| 56. $y = kx$ .....                                               | 65 |
| 57. $y = kx + b$ .....                                           | 67 |
| 58. $y = ax^2$ .....                                             | 68 |
| 59. $y = \sqrt{x}$ .....                                         | 70 |
| 60. $y = \frac{a}{x}$ .....                                      | 71 |
| 61. Empiirisen funktion kuvaaja .....                            | 72 |
| 62. Ensimmäisen asteen yhtälön kuvaaja .....                     | 74 |
| 63. Ensimmäisen asteen yhtälöparin graafinen ratkaiseminen ..... | 76 |
| 64. Yhtälöparin ratkaisujen lukumäärä .....                      | 76 |

|                                                  |     |
|--------------------------------------------------|-----|
| <b>HARJOITUSTEHTÄVIÄ</b> .....                   | 98  |
| <b>VASTAUKSIA</b> .....                          | 140 |
| <b>Liite I. KERTOLASKUN PERUSLAIT</b> .....      | 146 |
| <b>Liite II. LIKIARVOLASKUJEN TARKKUUS</b> ..... | 147 |



**MERKITSEMISTAPOJA — YHTÄLÖITÄ****1 § Kirjaimien käyttö**

Jo laskennossa käytetään joskus kirjaimia lukujen merkkeinä. Niinpä esim. on tunnettu ”kaava”

$$r = \frac{k \cdot p \cdot t}{100}$$

josta saadaan lasketuksi korko  $r$ , jonka  $k$  markan pääoma tuottaa  $p$  %:n mukaan  $t$  vuodessa. Kirjaimille  $k, p$  ja  $t$  voidaan tähän ”sijoittaa” eri lukuarvoja ja laskea sitten  $r$ . Jos esim. sijoitetaan  $k = 800$  mk,  $p = 4$  % ja  $t = \frac{1}{4}$  v, niin saadaan koroksi

$$r = \frac{800 \cdot 4 \cdot \frac{1}{4}}{100} = 8 \text{ mk}$$

Toisenlaisena esimerkkinä kirjainten käytöstä esitämme ”yhtälön”

$$a + b = b + a$$

joka on voimassa olkoot  $a$  ja  $b$  mitä lukuja tahansa ja ilmaisee lyhyesti yhteenlaskun ”vaihdantalain”, jonka mukaan kahden luvun summan arvo ei muutu, vaikka yhteenlaskettavien järjestys vaihdetaan. (1–12)

**2 § Sulkumerkkien käyttö — Lauseke**

Kun on merkitty suoritettavaksi peräkkäin yhteen-, vähennys-, kerto- ja jakolaskuja, niin on jo laskennossa tehty sellainen sopimus, että ensin suoritetaan järjestyksessään merkityt kertomiset ja jaot ja sitten yhteen- ja vähennyslaskut, kuitenkin sillä poikkeuksella, että mahdollisesti esiintyvien sulkumerkkien sisällä olevat laskut suoritetaan kaikkein ensimmäiseksi. Niinpä esim. ”lausekkeista”

$$a + b \cdot a - b$$

$$(a + b) \cdot (a - b)$$

edellinen merkitsee, että ensin on  $b$ :llä kerrottava  $a$  ja sitten saatu tulo lisättävä  $a$ :han ja vihdoin näin saadusta summasta vähennettävä  $b$ , kun taas jälkimmäinen tarkoittaa, että  $a$ :n ja  $b$ :n summalla on kerrottava niiden

erotus. Käytetään myös ”sisäkkäisiä” sulkumerkkejä, jolloin laskujen suoritus on aloitettava sisimmissä suluissa. Jos esim. on merkittävä, että 3:lla on kerrottava luvun  $x$  ja summan  $y + 2$  erotus, niin kirjoitetaan

$$3 \cdot [x - (y + 2)]$$

Äsken käytimme nimitystä ”lauseke”. *Lausekkeeksi* voidaan sanoa jokaista merkittyä laskutoimitusta. Edellä esiintyneiden useiden lausekkeiden lisäksi mainittakoon esimerkkeinä lausekkeista:

$$a + 1, \quad \frac{7 \cdot x - 4}{x \cdot y}, \quad 16 - 2 \cdot 3, \quad x, \quad 3$$

Kahdessa viimeisessä esimerkissä ei tosin ole merkitty suoritettavaksi mitään laskua, mutta on tarkoituksenmukaista sisällyttää tällaisetkin rajatapaukset lausekekäsittelyn piiriin, vaikkakin näistä tavallisesti käytetään vain yksinkertaisesti nimitystä ”luku”. Kun kirjaimet merkitsevät lukuja, niin voidaan päinvastoin jokaista lauseketta sanoa luvuksi, joka silloin tietysti tarkoittaa sitä lukua, joka saadaan, kun lausekkeessa merkityt laskut ajatellaan suoritetuiksi. (13–20)

### 3 § Tulon merkitseminen

Kun on merkittävä kahden tai useamman luvun tulo ja tekijöistä korkeintaan ensimmäinen on tavallinen ”numeroluku”, niin kertomerkit jätetään tavallisesti lyhyiden vuoksi pois. Siis esim.  $abc$  merkitsee samaa kuin  $a \cdot b \cdot c$  ja  $5a$  samaa kuin  $5 \cdot a$ . Sitä vastoin ei ole tapana kirjoittaa esim. tulon  $a \cdot 5$  asemesta  $a5$  ja vielä vähemmän luvallista on merkitä esim. tulon  $6 \cdot 5$  asemesta  $65$  tai tulon  $6 \cdot \frac{1}{2}$  asemesta  $6\frac{1}{2}$ !

Tässä yhteydessä huomautettakoon, että jos on merkittävä esim. se kolminumeroinen kokonaisluku, jonka peräkkäiset numerot ovat  $a, b$  ja  $c$ , niin sitä ei saa esittää muodossa  $abc$ , vaan luku on kirjoitettava

$$100a + 10b + c$$

aivan niin kuin voitaisiin kirjoittaa myös esim.

$$548 = 100 \cdot 5 + 10 \cdot 4 + 8 \quad (21-25)$$

### 4 § Yhtälö

Sana *yhtälö*, jota jo edellä käytimme, on keinotekoisesti muodostettu sanasta ”yhtäläinen” ja tarkoittaa kahden lausekkeen merkittyä yhtäsuuruutta. Yhtälöön aina kuuluvan yhtäsuuruusmerkin vasemmalla puolella olevaa lauseketta sanotaan lyhyesti yhtälön *vasemmaksi puoleksi* ja oikealla puolella olevaa lauseketta *oikeaksi puoleksi*. Sellaisia yhtälöitä kuin esim.  $2 \cdot 3 = 6$  ja

$a + b = b + a$ , jotka ovat voimassa riippumatta siitä, mitä arvoja niissä mahdollisesti esiintyville kirjaimille annetaan, sanotaan *identtisiksi*. Sitä vastoin esim.  $x + 4 = 10$  on *ehdollinen* yhtälö, joka on totta eli *toteutuu* ainoastaan, kun  $x = 6$ . Tätä  $x$ :n arvoa sanotaan yhtälön *juureksi* ja sen hakemista yhtälön *ratkaisemiseksi*.

**Esim. 1.** Yhtälön  $x - 5 = 12$  juuri on erotuksen määritelmän (ks. II §) perusteella  $x = 12 + 5 = 17$ . Samoin päätellään yleisesti, että yhtälön  $x - a = b$  juuri on  $x = b + a$ .

**Esim. 2.** Yhtälön  $4x = 28$  juuri on osamäärän määritelmän (ks. 14 §) perusteella  $x = 28 : 4 = 7$ . Samoin päätellään yleisesti, että yhtälön

$$ax = b$$

juuri on

$$x = b : a \text{ eli } \frac{b}{a}$$

Kun esim.  $a = \frac{3}{4}$  ja  $b = \frac{1}{2}$ , niin  $x = \frac{1}{2} : \frac{3}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$ .

**Esim. 3.** Kun on ratkaistava yhtälö  $3x + 7 = 20$ , niin ensin päätellään, että  $3x = 20 - 7 = 13$ . Tästä seuraa edelleen, että  $x = 13 : 3 = 4\frac{1}{3}$ .

Sitä kirjainta, jonka arvo on yhtälöstä haettava, sanotaan *tuntemattomaksi*. Tuntematonta merkitään tavallisesti  $x$ :llä, kuten olemme edellisissä esimerkeissäkin tehneet. Tuntemattoman lisäksi voi yhtälössä esiintyä myös tunnetuiksi ajateltuja lukuja esittäviä kirjaimia ( $a$  ja  $b$  esimerkeissä 1 ja 2). Niille voidaan sitten antaa mitä arvoja tahansa. (26–42)

## NEGATIIVISET LUVUT

### 5 § Negatiivisten lukujen määrittäminen

Yleisesti puhutaan esim.  $+3^\circ$  ja  $-3^\circ$  (luettava: *plus*  $3^\circ$  ja *miinus*  $3^\circ$ ) lämpötilasta silloin, kun on kysymyksessä  $3^\circ$  lämpö ja  $3^\circ$  pakkaneen. Nämä merkinnät ovat lyhennyksiä merkinnöistä  $0^\circ + 3^\circ$  ja  $0^\circ - 3^\circ$  ja merkitsevät samaa kuin  $3^\circ$  enemmän ja  $3^\circ$  vähemmän kuin  $0^\circ$ . Jos henkilö on tehnyt kaksi kauppaa ja saanut toisessa 50 mk voittoa ja toisessa 50 mk tappiota, niin voitaisiin vastaavalla tavalla sanoa hänen saaneen voittoa edellisessä kaupassa  $+50$  mk ja jälkimmäisessä  $-50$  mk.<sup>1</sup> Jos molemmat yhdistetään, niin tulee lopputulokseksi 0 mk voittoa. Tätä voitaisiin merkitä laskumerkein:

$$(+50) + (-50) = 0 \quad \text{tai} \quad (-50) + (+50) = 0$$

On osoittautunut erittäin hyödylliseksi yleisestikin ottaa käytäntöön tällaiset ”nollaa pienemmät”,  $-$ merkillä varustetut luvut, joita sanotaan *negatiivisiksi* luvuiksi.<sup>2</sup> Nollaa suurempia lukuja, joihin laskennossa on tutustuttu, sanotaan taas *positiivisiksi* luvuiksi ja ne v o i d a a n varustaa

<sup>1</sup>Itse asiassa kuuleekin joskus puhuttavan, että kaupassa tuli niin ja niin paljon ”plus-saa” tai ”miinusta”, joista edellinen tarkoittaa voittoa ja jälkimmäinen tappiota.

<sup>2</sup>Jo vanhat intialaiset matemaatikot havaitsivat tämän hyödyn ja ottivat negatiiviset luvut käytäntöön.

+merkillä. Niinpä siis esim. luvuista  $+50$  ja  $-50$  edellinen on positiivinen ja tarkoittaa yksinkertaisesti samaa kuin  $50$  ja jälkimmäinen on negatiivinen ja tarkoittaa sellaista lukua, että sen ja edellisen luvun summa  $= 0$ , toisin sanoen, että yllä olevat yhtälöt ovat voimassa. Kun  $p$ :llä merkitään yleensä positiivista lukua, niin on siis negatiivisen luvun

**Määritelmä:** *Negatiivisella luvulla  $-p$  tarkoitetaan sellaista lukua, että sen ja positiivisen luvun  $+p$  eli  $p$  summa  $= 0$ :*

$$(-p) + (+p) = 0, \quad (+p) + (-p) = 0$$

Lukujen  $+p$  ja  $-p$  edessä olevia, niihin kuuluvia merkkejä  $+$  ja  $-$  sanotaan lukujen *etumerkeiksi* eli lyhyesti *merkeiksi*. Määritelmässä esiintyvissä yhtälöissä on nämä luvut pantu selvyden vuoksi sulkuihin. Edelliset sulku-merkit voitaisiin kyllä jättää pois, mutta ei jälkimmäisiä, koska muutoin tulisi kaksi merkkiä, yhteenlaskunmerkki ja etumerkki, välittömästi peräkkäin, mitä ei ole tapana sallia.<sup>1</sup>

Positiivisista ja negatiivisista kokonais- ja murtoluvuista sekä nolasta käytetään yhteistä nimitystä *rationaaliset luvut* eli *rationaaliluvut*. Kaikkien tällaisten lukujen ääretöntä joukkoa sanotaan *rationaaliseksi lukualueeksi*.

Huomautamme kertakaikkiaan, että kun seuraavassa esityksessä käytetään kirjainta luvun merkinä tai puhutaan yleensä luvusta, niin ellei toisin mainita tai asian yhteydestä toisin käy ilmi<sup>2</sup>, kysymyksessä oleva kirjain tai luku voi olla minkäläatuinen rationaaliluku tahansa. (43–49)

## 6 § Vastaluku — Itseisarvo

**Määritelmä:** *Kahta lukua, joiden summa  $= 0$ , sanotaan toistensa vastaluvuiksi.*

Siis edellisen §:n määritelmässä esiintyvät luvut  $+p$  ja  $-p$  ovat toistensa vastalukuja. *Nollan vastaluku on luku itse*, sillä  $0 + 0 = 0$ .

Jos  $a$  on positiivinen luku, niin edellisten määritelmien mukaan luvuista  $+a$  ja  $-a$  edellinen tarkoittaa itse lukua  $a$  ja jälkimmäinen on tämän vastaluku. Jos sitä vastoin  $a$  on negatiivinen luku tai  $0$ , niin merkinnöillä  $+a$  ja  $-a$  ei ole toistaiseksi mitään sisältöä. Jotta niillä tällöinkin olisi äsken mainittu merkitys, sovitaan, että *myös silloin, kun  $a$  on negatiivinen luku tai  $0$ ,*

1)  $+a$  tarkoittaa itse lukua  $a$

---

<sup>1</sup>Jos luvun  $+p$  etumerkki jätettäisiin pois, mikä tietysti on luvallista, niin silloin voitaisiin kysymyksessä olevat yhtälöt kirjoittaa lyhyesti:

$$-p + p = 0, \quad p + (-p) = 0$$

<sup>2</sup>Esim. sanonnasta ”olkoon yhteenlaskettavien luku  $n$ ” käy ilmi, että  $n$  merkitsee tässä tapauksessa positiivista kokonaislukua tai rajatapauksessa nollaa.

2)  $-a$  tarkoittaa luvun  $a$  vastalukua

Siis joka tapauksessa  $+a$  ja  $-a$  ovat toistensa vastalukuja:

$$(-a) + (+a) = 0, \quad (+a) + (-a) = 0$$

**Esim. 1.** Jos  $a = -2$ , niin  $+a$  on itse luku  $-2$  ja  $-a$  on luvun  $-2$  vastaluku ja siis  $+2$ . Toisin sanoen  $+(-2) = -2$  ja  $-(-2) = +2$ .

**Esim. 2.** Jos  $a = 0$ , niin  $+a$  on itse luku  $0$  ja  $-a$  on luvun vastaluku, joka edellisen mukaan on myös  $0$ . Toisin sanoen  $+0 = 0$  ja  $-0 = 0$ .

Luvun  $a$  itseisarvo, jota merkitään:  $|a|$ , määritellään seuraavasti:

1)  $|a| = a$ , jos  $a$  on positiivinen tai  $0$

2)  $|a| = -a$  jos  $a$  on negatiivinen

**Esim.** 1) Jos  $a = +3$ , niin  $|a| = |+3| = +3 = 3$

2) Jos  $a = -3$ , niin  $|a| = |-3| = -(-3) = +3 = 3$

Siis lukujen  $+3$  ja  $-3$  itseisarvo on  $3$  eli  $(+3)$ . Samoin yleisesti: kun  $p$  on positiivinen luku, niin  $|+p| = |-p| = p$ . Jos sitä vastoin ei tiedetä, onko  $p$  positiivinen vai negatiivinen, niin voidaan kyllä kirjoittaa  $|+p| = |-p| = |p|$ , mutta tällöin  $|p|$ :stä ei saa jättää pois itseisarvon merkkejä, pystyviivoja.

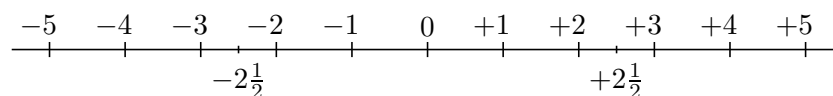
Jokaisen nollasta eriävän luvun ja sen vastaluvun itseisarvo on sama positiivisen luku.  $0$ :n itseisarvo  $= 0$ . (50–64)

## 7 § Lukusuora ja lukujen suuruussuhteet

Lukuja esitetään havainnollisesti suoran pisteinä seuraavasti. Piirretään suora — tavallisesti vaakasuoraan — ja valitaan sillä jokin piste, jonka katsotaan vastaavan lukua  $0$ . Kun sitten on vielä valittu jokin pituusyksikkö, sovitaan, että kutakin positiivista lukua  $+p$  vastaa se suoran piste, joka on  $0$ -pisteestä oikealle etäisyydellä  $p$  siitä, ja negatiivista lukua  $-p$  se piste, joka on  $0$ -pisteestä vasemmalle etäisyydellä  $p$  siitä. Tällä tavalla tulee jokaista positiivista ja negatiivista lukua sekä nollaa vastaamaan täysin määrätty piste kysymyksessä olevalla suoralla, jota nimitetään *lukusuoraksi*. Lukusuora on siis ikään kuin äärettömän pitkä lämpömittarin asteikko. Kuv. 1 esittää lukusuoraa, jolle on näytteeksi merkitty muutamien lukujen vastinpisteet. Huomattakoon erikoisesti:

1) luvun itseisarvo  $=$  luvun vastinpisteen etäisyys  $0$ -pisteestä

2) vastalukujen vastinpisteet ovat yhtä kaukana  $0$ -pisteestä, sen eri puolilla.



Kuv. 1

Pystysuorassa lämpömittarissa vastaa korkeammalla olevaa asteikon koh-  
taa suurempi lämpötilä kuin alempana olevaa. Vastaavasti asetetaan vaakasuoraan lukusuoraan nähden

**Määritelmä:** *Kahdesta luvusta sanotaan sitä suuremmaksi, jonka vastinpiste lukusuoralla on toisen oikealla puolella.*

Alla on lueteltuna joukko peräkkäisiä kokonaislukuja suuruusjärjestyksessä, pienimmästä suurimpaan:

$$\dots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, +5, \dots$$

Asettamamme määritelmä on sopusoinnussa ei ainoastaan entisen käsityksemme kanssa positiivisten lukujen suuruussuhteista vaan myös sen ajatus-  
tavan kanssa, jota noudatimme negatiivisia lukuja käytäntöön ottaessamme. Niinpä ovat *positiiviset luvut nollaa suurempia* ( $> 0$ ) *ja negatiiviset luvut nollaa pienempiä* ( $< 0$ ), jota sanontaa jo ennakolta käytimme 5 §:ssä.

Jos lukua suurennetaan ja sen vastinpistettä lukusuoralla siis siirretään oikealle, niin luvun vastaluvun vastinpiste yllä tehdyn huomautuksen 2) mukaan siirtyy ilmeisesti joka tapauksessa vasemmalle ja vastaluku siis pienenee. Voidaan niin ollen kirjoittaa

**Lause:** *Jos lukua suurennetaan, niin sen vastaluku pienenee. Toisin sanoen, jos  $a > b$ , niin  $-a < -b$ .*

Huomautamme lopuksi, että *kahdesta negatiivisesta luvusta suuremmalla on pienempi itseisarvo kuin pienemmällä.* (65–73)

## YHTEENLASKU

### 8 § Summan määrittäminen

Laskennossa on selvitetty, mitä tarkoitetaan kahden positiivisen luvun summalla ja miten se muodostetaan. Tehtävämme on nyt keksiä tarkoituk-  
senmukainen summan määritelmä siinä tapauksessa, että toinen tai kumpi-  
kin yhteenlaskettavista on negatiivinen. Tarkastelemme tässä mielessä seuraavaa esimerkkiä.

Jos henkilö saa jostakin kaupasta voittoa 5 mk eli +5 mk ja toisesta 3 mk eli +3 mk, niin voitto on yhteensä 8 mk eli +8 mk. Tätä voidaan laskutoimituksin merkitä:

$$(+5) + (+3) = +8$$

jossa ei laskennon kannalta ole mitään uutta, lukuun ottamatta etumerkkejä.

Jos hän sitä vastoin olisi saanut edellisestä kaupasta tappiota 5 mk ja jälkimmäisestä niin ikään tappiota 3 mk ja siis yhteensä tappiota 8 mk, niin

voitaisiin tämä lausua niinkin, että hän sai voittoa edellisestä kaupasta  $-5$  mk ja jälkimmäisestä  $-3$  mk ja yhteensä  $-8$  mk eli laskutoimituksena

$$(-5) + (-3) = -8$$

Jos taas henkilö olisi saanut toisesta kaupasta voittoa  $5$  mk ja toisesta tappiota  $3$  mk eli siis voittoa  $-3$  mk, niin lopputulos olisi  $2$  markan voitto eli

$$(+5) + (-3) = +2$$

Jos vihdoinkin olisi kysymyksessä  $5$  markan tappio ja  $3$  markan voitto, niin olisi lopullinen voitto

$$(-5) + (+3) = -2$$

markkaa, toisin sanoen  $2$  markan tappio.

Käsittelemässämme esimerkissä on siis voimassa seuraava sääntö, joka on havaittu tarkoituksenmukaisimmaksi asettaa yleisestikin kahden luvun summan määritelmäksi.

**Määritelmä:** *Kahden samanmerkkisen luvun summa = niiden itseisarvojen summa varustettuna lukujen yhteisellä merkillä.*<sup>1</sup>

*Kahden erimerkkisen luvun summa = niiden itseisarvojen erotus varustettuna itseisarvoltaan suuremman luvun merkillä.*<sup>2</sup>

Jos  $p$  ja  $q$  ovat positiivisia lukuja ja  $p > q$ , niin edellisen määritelmän mukaan on siis

$$(+p) + (+q) = +(p + q)$$

$$(-p) + (-q) = -(p + q)$$

$$(+p) + (-q) = +(p - q)$$

$$(-p) + (+q) = -(p - q)$$

Näistä kaavoista näkyy välittömästi:

**Lause:** *Jos yhteenlaskettavien merkit muutetaan, niin summan merkki muuttuu. Toisin sanoen: summan vastaluku = yhteenlaskettavien vastalukujen summa.*

Tämä lause on voimassa silloinkin, kun yhteenlaskettavia on useampia kuin kaksi (ks. harj.teht. 96). Siis esimerkiksi

$$-(a + b + c) = (-a) + (-b) + (-c)$$

olkoot  $a$ ,  $b$  ja  $c$  mitä positiivisia tai negatiivisia lukuja tahansa. **(74–89)**

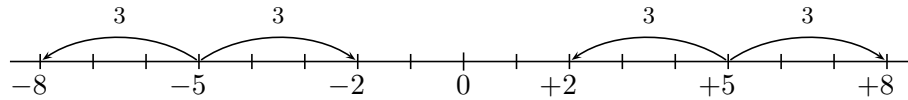
---

<sup>1</sup>Jos toinen yhteenlaskettavista on  $0$ , niin summa on yhtäsuuri kuin toinen yhteenlaskettava, sillä  $0$ :n perusominaisuus, jonka mukaan jokainen luku jää muuttumatta, jos siihen lisätään  $0$ , ulotetaan luonnollisesti käsittämään senkin tapauksen, että ko. luku on negatiivinen.

<sup>2</sup>Jos itseisarvot ovat yhtäsuuret, niin ko. erimerkkiset luvut ovat toistensa vastalukuja ja niiden summa  $= 0$  jo 6 §:ssä asetetun vastaluvun määritelmän mukaan.

## 9 § Summa lukusuoralla

Lukusuoralla voidaan havainnollisesti lisätä lukuun toinen siten, että ensin mainitun luvun vastinpisteestä siirrytään jälkimmäisen luvun itseisarvon pituinen matka oikealle, jos tämä luku on positiivinen, ja vasemmalle, jos se on negatiivinen.



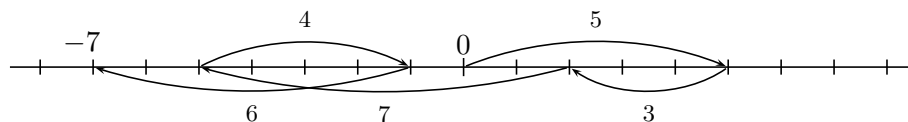
Kuv. 2

Näin tullaan summan vastinpisteeseen. Kuviossa 2 on täten muodostettu edellisessä §:ssä esillä olleet neljä summaa. Kulloinkin suoritettu siirtyminen on merkitty kaarevan nuolen avulla.

Tällä keinolla voidaan lukusuoralla suorittaa useammankin luvun yhteenlasku. Kuviossa 3 on muodostettu summa

$$(+5) + (-3) + (-7) + (+4) + (-6) = -7$$

Tässä on lähdetty liikkeelle 0-pisteestä, siis ikään kuin ensimmäinen yhteenlaskettava olisi 0. On siirrytty peräkkäin yhteenlaskettavien itseisarvojen pituiset matkat, siirtymissuunnan ollessa oikealle, kun asianomainen yhteenlaskettava on positiivinen, ja vasemmalle, kun se on negatiivinen. Näin on lopuksi tultu summan vastinpisteeseen  $-7$ .



Kuv. 3

Jos jotakin positiivista yhteenlaskettavaa suurennetaan, niin tätä yhteenlaskettavaa vastaava oikealle siirtymismatka suurenee, joten koko summan vastinpiste siirtyy entisestään oikealle ja siis summa suurenee. Samoin tapahtuu, jos jotakin negatiivista yhteenlaskettavaa suurennetaan. Tällöin näet 7 §:n loppuhuomautuksen mukaisesti tämän itseisarvo pienenee ja siis myös vastaava vasemmalle siirtymismatka pienenee, josta taas aiheutuu koko summan vastinpisteen oikealle siirtyminen. Siis on edelleenkin voimassa vanhaan tunnettu

**Lause:** Jos jotakin yhteenlaskettavaa suurennetaan, niin summakin suurenee. (90–92)



## 10 § Vaihdanta- ja liitäntälaki

Laskennosta tutut ovat yhteenlaskun perusominaisuudet:

$$\text{vaihdantalaki: } a + b = b + a$$

$$\text{liitäntälaki: } a + (b + c) = (a + b) + c$$

sekä näistä laeista johtuva

**Lause:** *Kahden tai useamman luvun summalle saadaan sama arvo, lasketaanpa luvut yhteen missä järjestyksessä tahansa ja vaikka ryhmittäinkin.*

Että tämä lause ja siis myös sen erikoistapaukset vaihdanta- ja liitäntälaki ovat voimassa silloinkin, kun yhteenlaskettavien joukossa on negatiivisia lukuja, selviää havainnollisesti, jos ajattelemme positiivisten lukujen merkitsevän voittoja ja negatiivisten tappioita. Onhan näet yhdentekevää, missä järjestyksessä tietyt voitot ja tappiot (= negatiiviset voitot) yhdistetään. Myös käy tämä lause ilmeiseksi, kun ajatellaan yhteenlasku suoritetuksi lukusuoralla (vrt. teht. 92). (93–98)

## VÄHENNYSLASKU

### 11 § Erotuksen määritelmä ja laskeminen

Erotus määritellään kuten laskennossakin:

**Määritelmä:** *Kahden luvun erotuksella tarkoitetaan sellaista lukua, että kun siihen lisätään jälkimmäinen luku (vähentäjä), niin saadaan summaksi edellinen (vähennettävä).*

Tämän määritelmän mukaan on siis aina

$$(a - b) + b = a$$

Toiselta puolen, jos väitetään, että  $a - b = x$ , niin pitää näyttää, että  $x + b = a$ .

**Esim. 1.**  $(-3) - (-5) = +2$ , sillä  $(+2) + (-5) = -3$ .

Erotus voidaan muodostaa, so. vähennyslasku toimittaa noudattamalla sääntöä:

**Lause 1:** *Luvusta voidaan vähentää toinen siten, että vähennettävään lisätään vähentäjän vastaluku.*

Tämä lause on yhtälön avulla ilmaistuna:

$$a - b = a + (-b)$$

Todistaaksemme tämän yhtälön meidän on näytettävä, että väitetyn erotuksen arvon  $a + (-b)$  ja vähentäjän  $b$  summa on vähennettävä  $a$ . Itse asiassa: yhteenlaskun liitäntälain mukaan on

$$[a + (-b)] + b = a + [(-b) + b]$$

joka  $= a$ , sillä viimeisten hakusulkujen sisällä oleva kahden vastaluvun summa  $= 0$ .

**Esim. 2.** a)  $(+3) - (+5) = (+3) + (-5) = -2$   
 b)  $(+3) - (-5) = (+3) + (+5) = +8$   
 c)  $(-3) - (+5) = (-3) + (-5) = -8$   
 d)  $(-3) - (-5) = (-3) + (+5) = +2$  (99–122)

Edellisen lauseen suuri merkitys on siinä, että sen avulla voidaan vähennyslasku aina muuttaa yhteenlaskuksi. Ja tämä on ollut mahdollista vain negatiivisten lukujen käytäntöön otton kautta. Täten on myös tullut mahdolliseksi vähentää pienemmästä luvusta suurempi, joka laskennossa on mahdotonta.

Koska edellisen lauseen mukaan

$$\begin{aligned} a - b &= (+a) + (-b) \\ b - a &= (+b) + (-a) \end{aligned}$$

ja oikealle puolelle merkityistä summista toisen yhteenlaskettavat saadaan muuttamalla toisen yhteenlaskettavien merkit, niin summat ja siis myös  $a - b$  ja  $b - a$  ovat toistensa vastalukuja (8 §, lause):

**Lause 2:**  $a - b$  ja  $b - a$  ovat toistensa vastalukuja, toisin sanoen, kun vähennettävä ja vähentäjä vaihtavat paikkaansa, niin saadaan entisen erotuksen vastaluku

Tarkastelemme nyt, kuinka vähennettävän ja vähentäjän suuruuden muutokset vaikuttavat erotuksen suuruuteen. Sitä varten muutamme lauseen 1 mukaisesti erotuksen summaksi:

$$a - b = a + (-b)$$

Jos vähennettävää  $a$  suurennetaan, niin oikealla puolella oleva summa ja siis myös erotus  $a - b$  suurenee (9 §, lause). Jos taas vähentäjää  $b$  suurennetaan, niin sen vastaluku  $-b$  pienenee (7 §, lause), joten oikealla puolella oleva summa ja niin ollen myös  $a - b$  tällöin pienenee. Näin on havaittu edelleen paikkansa pitäväksi laskennosta tunnettu

**Lause 3:** Jos vähennettävää suurennetaan, niin erotus suurenee. Jos taas vähentäjää suurennetaan, niin erotus pienenee.

Jos merkitään

$$a - b = x$$

niin on

$$b + x = a$$

Ajatellaan nyt vasemmalla puolella oleva summa muodostettavaksi lukusuoralla (9 §). Jos  $a$  on suurempi kuin  $b$ , toisin sanoen  $a$ :n vastinpiste lukusuoralla  $b$ :n vastinpisteen oikealla puolella, niin  $x$  on positiivinen ja ilmaisee, kuinka pitkä matka on  $b$ :n vastinpisteestä siirryttävä oikealle, jotta tultaisiin  $a$ :n vastinpisteeseen. Siis  $x$  eli  $a - b$  on näiden pisteiden välin suuruinen:

**Lause 4:** *Kun suuremmasta luvusta vähennetään pienempi, niin erotus = lukujen vastinpisteiden väli lukusuoralla.*

**Esim.** a)  $9 - 5 = 4 =$  lukujen  $9$  ja  $5$  vastinpisteiden väli  
 b)  $2 - (-6) = 2 + 6 = 8 =$  ”  $2$  ”  $-6$  ” ”  
 c)  $-3 - (-8) = -3 + 8 = 5 =$  ”  $-3$  ”  $-8$  ” ”

(123–130)

## KERTOLASKU

### 12 § Tulon määrittely

Laajennamme nyt kahden luvun tulon käsitteen niihin tapauksiin, joissa ainakin toinen tekijä on negatiivinen.

Laskennossa määritellään kokonaisluvulla kertominen yhteenlaskuun nojautuen seuraavasti: *luku kerrottuna kokonaisluvulla = summa, jossa on kerrojan ilmaisema määrä kerrottavan suuruksia yhteenlaskettavia*. On luonnollista, että ulotamme tämän määritelmän siihenkin tapaukseen, jossa kerrottava on negatiivinen. Tämän mukaisesti on esim.

$$(+4)(-7) = (-7) + (-7) + (-7) + (-7) = -(4 \cdot 7)$$

ja yleisesti, kun  $a$  on jokin positiivinen kokonaisluku ja  $-b$  mielivaltainen negatiivinen luku:

$$(+a)(-b) = -(ab)$$

Tähän tulokseen päästään myös yhtälöstä

$$(+a)(+b) = +(ab)$$

noudattamalla seuraavaa sääntöä, joka on osoittautunut tarkoituksenmukaiseksi tulokäsittelyn laajentamisen perustaksi:

*Jos kahden mielivaltaisen luvun tulon jommankumman tekijän merkki muutetaan, niin tulon merkki muuttuu ja itseisarvo jää muuttumatta.*

Viimeksi kirjoitettu yhtälö on voimassa, olkoot  $a$  ja  $b$  millaisia positiivisia lukuja tahansa. Tästä yhtälöstä päästään mainittua sääntöä käyttäen

seuraavaan neljään yhtälöön:

$$(+a)(+b) = +(ab)$$

$$(+a)(-b) = -(ab)$$

$$(-a)(+b) = -(ab)$$

$$(-a)(-b) = +(ab)$$

Koska positiivisten lukujen tulo  $ab$  on määritelty laskennossa, saatuihin yhtälöihin sisältyy tulon määritelmän laajennus niihin tapauksiin, joissa ainakin toinen tekijä on negatiivinen. Ottaen huomioon, että  $ab$  on kunkin yhtälön vasemmalla puolella olevien tekijäin itseisarvojen tulo, yhtälöiden perusteella voidaan esittää

**Määritelmä:** *Kahden luvun tulo = tekijäin itseisarvojen tulo varustettuna + merkillä, jos tekijät ovat samanmerkkiset, ja – merkillä, jos ne ovat erimerkkiset.*

**Esim.** a)  $(+2)(+3) = +6$       b)  $(+2)(-3) = -6$   
c)  $(-2)(+3) = -6$       d)  $(-2)(-3) = +6$

$Tulo = 0$ , jos toinen tekijä  $= 0$ . Tämän määritelmän ulotamme luonnollisesti siihenkin tapaukseen, että toinen tekijä on negatiivinen.<sup>1</sup>

Koska siis  $(-a)b = -(ab)$ , niin kumpaakin näistä lausekkeista voidaan merkitä ilman sulkumerkkejä lyhyesti  $-ab$ , jolloin  $-$ merkki voidaan katsoa kuuluvaksi joko ensimmäiseen tekijään tai koko tuloon.

Kahden luvun tulon määritelmästä seuraa välittömästi useamman luvun tulon muodostamista koskeva

**Lause 1:** *Lukujen tulo = niiden itseisarvojen tulo varustettuna + merkillä, jos negatiivisten tekijäin luku on parillinen, ja –merkillä, jos se on pariton.*

Tästä seuraa taas

**Lause 2:** *Jos tulon yhden tekijän merkki muutetaan, niin tulon merkki muuttuu.* (131–141)

### 13 § Kertolaskun peruslait

Laskennosta ovat tutut kertolaskun peruslait (ks. liitettä I s. 146):

|                       |                      |
|-----------------------|----------------------|
| <b>vaihdantalaki:</b> | $ab = ba$            |
| <b>liitäntälaki:</b>  | $a(bc) = (ab)c$      |
| <b>osittelulaki:</b>  | $a(b + c) = ab + ac$ |

<sup>1</sup>Huomattakoon muuten, että edellä olevat neljä määrittelevää yhtälöä ovat ilmeisesti voimassa silloinkin, kun toinen tai kumpikin luvuista  $a$  ja  $b$  on negatiivinen tai 0.

Samoin on laskennosta tuttu seuraava lause, joka voidaan johtaa vaihdanta- ja liitântäleista:

**Lause 1:** *Kahden tai useamman luvun tulolle saadaan sama arvo, kerrotaanpa luvut missä järjestyksessä tahansa ja vaikka ryhmittäinkin.*

Voidaan osoittaa, että yllä mainitut lait ovat voimassa silloinkin, kun lukujen  $a$ ,  $b$  ja  $c$  joukossa on yksi tai useampi negatiivinen luku.<sup>1</sup>

Koska vaihdanta- ja liitântälaki ovat lauseen 1 erikoistapauksia, niin niiden todistamiseksi riittää, kun näytetään oikeaksi tämä lause. Näin onkin yksinkertaisesti siitä syystä, että tekijäin järjestystä muutettaessa ja tekijöitä ryhmitettäessä niiden itseisarvojen tulo jää muuttumatta ja samoin negatiivisten tekijäin lukumäärä, joten ed. §:n lauseen 1 mukaan koko tulon arvo pysyy ennallaan.

Osittelulain yleispätevyyden todistuksen sivuutamme, mutta sen sijaan näytämme tähän lakiin nojautuen oikeiksi eräitä sen yleistyksiä.

**Lause 2:** *Luvulla voidaan kertoa summa siten, että tällä luvulla kerrotaan jokainen yhteenlaskettava ja saadut tulot lasketaan yhteen.*

Jos kysymyksessä olevassa summassa on esim. kolme yhteenlaskettavaa  $b$ ,  $c$  ja  $d$  ja kertoja on  $a$ , niin saadaan käyttäen hyväksi osittelulakia kaksi kertaa:

$$a(b + c + d) = a[(b + c) + d] = a(b + c) + ad = ab + ac + ad$$

**Lause 3:** *Summalla voidaan kertoa luku siten, että jokaisella yhteenlaskettavalla kerrotaan tämä luku ja saadut tulot lasketaan yhteen.*

Nojautumalla kaksi kertaa vaihdantalakiin (alussa ja lopussa) ja välillä kerran edelliseen lauseeseen saadaan näet:

$$(a + b + c)d = d(a + b + c) = da + db + dc = ad + bd + cd$$

Kahdesta viimeksi esitetystä lauseesta seuraa vieläkin yleisempi

**Lause 4:** *Summalla voidaan kertoa summa siten, että jokaisella kertojen yhteenlaskettavalla kerrotaan jokainen kerrottavan yhteenlaskettava ja saadut tulot lasketaan yhteen.*

Jos näet on suoritettava esim. kertominen

$$(a + b + c)(d + e + f)$$

---

<sup>1</sup>Toiselta puolen voidaan todistaa, että on pakko suorittaa tulokäsitteen laajennus yllä esitetyn määritelmän mukaisesti, jos halutaan, että ko. peruslait pysyvät voimassa ja että kahden luvun tulo = 0, kun ainakin toinen tekijä = 0. Tämän todistaminen suoritettiin tämänkin oppikirjan kymmenessä ensimmäisessä painoksessa.

niin pitämällä kertojaa summana ja kerrottavaa yhtenä lukuna saadaan lauseen 3 mukaan tulo ensiksikin muotoon

$$a(d + e + f) + b(d + e + f) + c(d + e + f)$$

Kun edelleen tämän summan kuhunkin yhteenlaskettavaan sovelletaan lause 2, tulee siitä

$$(ad + ae + af) + (bd + be + bf) + (cd + ce + cf)$$

Poistamalla tästä vielä sulkumerkit, mikä ilman muuta voidaan tehdä (10 §, lause), saadaan tulo todistettavana olevan lauseemme väitöksen muotoon.

(142–143)

## JAKOLASKU

### 14 § Osamäärän määritelmä ja laskeminen

Osamäärä määritellään kuten laskennossakin:

**Määritelmä:** *Kahden luvun osamäärällä tarkoitetaan sellaista lukua, että kun se kerrotaan jälkimmäisellä luvulla (jakajalla), niin saadaan tuloksi edellinen (jaettava).*<sup>1</sup>

Tämän määritelmän mukaan on siis aina

$$b \cdot \frac{a}{b} = a$$

Toiselta puolen, jos väitetään, että  $\frac{a}{b} = x$ , niin pitää näyttää, että  $bx = a$ .

**Esim.**  $\frac{-6}{-2} = +3$ , sillä  $(-2)(+3) = -6$ .

Kun  $b \neq 0$ , niin tulon ja osamäärän määritelmiin nojautuen voimme päätellä oikeaksi yleiset kaavat:

$$\frac{+a}{+b} = +\frac{a}{b} \quad \frac{-a}{-b} = +\frac{a}{b} \quad \frac{+a}{-b} = -\frac{a}{b} \quad \frac{-a}{+b} = -\frac{a}{b}$$

Todistaaksemme näytteeksi esim. kolmannen näistä meidän on siis näyttävä, että jakajan  $-b$  ja väitetyn osamäärän arvon  $-\frac{a}{b}$  tulo = jaettava  $+a$ . Näin onkin:

$$(-b) \left( -\frac{a}{b} \right) = + \left( b \cdot \frac{a}{b} \right) = +a$$

---

<sup>1</sup>Kertolaskun vaihdantalain perusteella voidaan sanonnan ”että kun se kerrotaan jälkimmäisellä luvulla” asemesta sanoa ”että kun sillä kerrotaan jälkimmäinen luku”. Jos on kysymys laatulukujen jakolaskusta, niin on käytettävä edellistä sanontaa silloin, kun jaettava on laatuluku ja jakaja nimittämätön luku (”ositusjako”), ja jälkimmäistä sanontaa silloin, kun jaettava ja jakaja ovat samaa laatua olevia laatulukuja (”sisältöjako”). Vrt. käsitettä ”suhde” (17 §).

Olettamalla, että  $a$  ja  $b$  ovat positiivisia, yllä olevat yhtälöt sisältävät seuraavan säännön osamäärän muodostamiseksi:

**Lause 1:** Kahden luvun osamäärä = jaettavan ja jakajan itseisarvojen osamäärä varustettuna +merkillä, jos jaettava ja jakaja ovat samanmerkkiset, ja  $-$ merkillä, jos ne ovat erimerkkiset.

**Esim.** a)  $\frac{+8}{+2} = +4$    b)  $\frac{-8}{-2} = +4$    c)  $\frac{+8}{-2} = -4$    d)  $\frac{-8}{+2} = -4$

Edellisestä lauseesta seuraa välittömästi

**Lause 2:** Jos jaettavan tai jakajan merkki muutetaan, niin osamäärän merkki muuttuu.

Jos sekä jaettavan että jakajan merkki muutetaan, niin osamäärä jää muuttumatta.

Osamäärän määritelmästä seuraa erikoisesti:

a)  $\frac{0}{a} = 0$ , jos  $a \neq 0$

b)  $\frac{0}{0} = \text{jokainen luku}$

c)  $\frac{a}{0}$  ei ole mikään luku, jos  $a \neq 0$  (144–162)

## 15 § Summan jakaminen luvulla

**Lause:** Summa voidaan jakaa luvulla siten, että jokainen yhteenlaskettava jaetaan tällä luvulla ja saadut osamäärät lasketaan yhteen.

Osoittaaksemme, että siis esim.

$$\frac{b + c + d}{a} = \frac{b}{a} + \frac{c}{a} + \frac{d}{a}$$

meidän on näytettävä, että jakajan  $a$  ja oikealla puolella olevan lausekkeen — väitetyn osamäärän arvon — tulo on jaettava  $b + c + d$ . Nojautumalla 13 §:n lauseeseen 2 ja osamäärän määritelmään saadaankin:

$$a \cdot \left( \frac{b}{a} + \frac{c}{a} + \frac{d}{a} \right) = a \cdot \frac{b}{a} + a \cdot \frac{c}{a} + a \cdot \frac{d}{a} = b + c + d \quad (163)$$

## 16 § Laajennettu murtolukukäsite

Jos  $a$  ja  $b$  merkitsevät positiivisia kokonaislukuja, niin murtoluku  $\frac{a}{b}$  tarkoittaa laskennon mukaisesti samaa kuin  $a$  kpl 1:n  $b$ :s osia. Jos sitä vastoin  $a$

tai  $b$  tai molemmat ovat negatiivisia kokonaislukuja tai positiivisia tai negatiivisia murtolukuja, niin mainittu murtoluvun määritelmä ei enää kelpaa. Sentähden asetetaan yleispätevä

**Määritelmä:** Murtoluvulla  $\frac{a}{b}$  tarkoitetaan osamäärää  $\frac{a}{b}$ .

Tämä määritelmä ei ole ristiriidassa murtoluvun entisen määritelmän kanssa, sillä tiedetäänhän laskennosta, että esim. murtoluku  $\frac{2}{3}$  on myös sama kuin lukujen 2 ja 3 osamäärä. Kun  $a$  ja  $b$  eivät ole positiivisia kokonaislukuja, niin ei murtolukua  $\frac{a}{b}$  lausuta ” $a$   $b$ :s osaa”, vaan  $a$  *alla*  $b$  tai  $a$  *per*  $b$  tai  $a$  *jaettuna*  $b$ :llä kuten jakolaskussa.

Koska jokainen luku  $x$  voidaan panna murtoluvun muotoon:

$$x = \frac{x}{1}$$

niin puhuttaessa murtoluvuista voidaan siihen sisällyttää myös luvut, joilla ei ole suoranaisesti murtoluvun muotoa.

Voidaan näyttää, että laajennetulla murtolukukäsitteellä voidaan laskea käyttämällä täsmälleen samoja sääntöjä kuin laskennossa.

Murtolukujen *s u p i s t a m i s t a* ja *l a v e n t a m i s t a* koskeva sääntö voidaan esittää yksinkertaisesti yhtälöllä<sup>1</sup>

$$\frac{\mathbf{ka}}{\mathbf{kb}} = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} \quad (164-178)$$

Tämä tulee todistetuksi, kun näytetään, että lukujen  $ka$  ja  $kb$  osamäärä =  $\frac{a}{b}$ . Näin onkin osamäärän määritelmän perusteella, sillä

$$(kb) \cdot \frac{a}{b} = k \left( \mathbf{b} \cdot \frac{a}{b} \right) = ka$$

Kun edellisen §:n kaavassa vaihdetaan vasen ja oikea puoli keskenään, saadaan samannimisten murtolukujen *y h t e e n l a s k u s ä ä n t ö* yhtälön avulla esitettynä:

$$\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}} + \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{a}} + \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d}}{\mathbf{a}}$$

Erinimisiä murtolukuja yhteenlaskettaessa ne ensin sopivasti laventamalla tehdään samannimisiksi.

Samannimisten murtolukujen *v ä h e n n y s l a s k u s ä ä n t ö*

$$\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}} - \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{b} - \mathbf{c}}{\mathbf{a}} \quad (179-185)$$

todetaan oikeaksi muuttamalla vähennyslasku yhteenlaskuksi (11 §, lause 1):

$$\frac{b}{a} - \frac{c}{a} = \frac{b}{a} + \left( -\frac{c}{a} \right) = \frac{b}{a} + \frac{-c}{a} = \frac{b + (-c)}{a} = \frac{b - c}{a}$$

<sup>1</sup>Tässä §:ssä yhtälöiden avulla esitettävät säännöt on lausuttava myös sanallisesti.



K e r t o s ä ä n t ö

$$\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} \cdot \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}} = \frac{\mathbf{ac}}{\mathbf{bd}}$$

todistetaan näyttämällä, että lukujen  $ac$  ja  $bd$  osamäärä = vasemmalla puolella oleva lauseke. Näin onkin osamäärän määritelmän mukaan, sillä

$$(bd) \cdot \left( \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \right) = \left( b \cdot \frac{a}{b} \right) \left( d \cdot \frac{c}{d} \right) = ac$$

Kun edelliseen kaavaan sijoitetaan erikoisesti  $b = 1$ , saadaan

$$\mathbf{a} \cdot \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}} = \frac{\mathbf{ac}}{\mathbf{d}}$$

Kahta lukua, joiden tulo = 1, sanotaan toistensa *käänteisluvuiksi* eli *inverssiluvuiksi*. Koska

$$\frac{c}{d} \cdot \frac{d}{c} = \frac{cd}{dc} = 1$$

niin luvut  $\frac{c}{d}$  ja  $\frac{d}{c}$  ovat toistensa käänteislukuja. Erikoisesti on siis luvun  $c = \frac{c}{1}$  käänteisluku  $\frac{1}{c}$ .

J a k o s ä ä n t ö

$$\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} : \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}} = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} \cdot \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{c}}$$

todistetaan kertomalla oikealla puolella oleva lauseke (väitetty osamäärän arvo) jakajalla ja toteamalla, että tuloksi saadaan jaettava:

$$\frac{c}{d} \cdot \left( \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} \right) = \frac{a}{b} \cdot \left( \frac{c}{d} \cdot \frac{d}{c} \right) = \frac{a}{b}$$

Kun edelliseen kaavaan sijoitetaan erikoisesti  $d = 1$ , saadaan

$$\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} : \mathbf{c} = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{bc}} \quad (186-205)$$

## 17 § Suhde ja verranto

**Määritelmä:** *Kahden luvun suhteella tarkoitetaan sellaista lukua, että kun sillä kerrotaan jälkimmäinen luku, niin saadaan tuloksi edellinen.*

Kahden luvun suhde on siis yhtäsuuri kuin niiden osamäärä, ja suhdetta merkitäänkin samalla tavalla kuin osamäärää. Ainoa ero on siinä, että nimitystä ”suhde” käytetään aina sisältöjaon merkityksessä, minkä vuoksi suhteen määritelmän sanonnassa ei ole sellaista valintavapautta kuin osamäärän (vrt. alimuist. s. 14).

Jos luvun  $a$  suhde lukuun  $b$  on  $x$ , niin merkitään siis

$$\frac{a}{b} = x \text{ eli } a : b = x$$

Määritelmän mukaan on tällöin  $xb = a$ . Luku  $a$  on suhteen *edellinen jäsen* ja  $b$  *jälkimmäinen jäsen*. Käytettäessä edellistä merkitsemistapaa suhde voidaan käsittää myös murtoluvuksi, jonka osoittajana on edellinen jäsen ja nimittäjänä jälkimmäinen jäsen.

**Esim. 1.** Luvun  $-18$  suhde lukuun  $12$  on  $\frac{-18}{12} = -\frac{18}{12} = -\frac{3}{2} = -1\frac{1}{2}$ .

**Esim. 2.** Mikä on suhteen jälkimmäinen jäsen, jos edellinen on  $1\frac{3}{4}$  ja suhde  $= -1\frac{1}{6}$ ?

Jos merkitään jälkimmäistä jäsentä  $x$ :llä, niin suhteen määritelmän perusteella pitää olla voimassa yhtälön

$$\left(-1\frac{1}{6}\right) \cdot x = 1\frac{3}{4}$$

Osamäärän määritelmän perusteella tämän yhtälön juuri on

$$x = 1\frac{3}{4} : \left(-1\frac{1}{6}\right) = -\left(\frac{7}{4} : \frac{7}{6}\right) = -\left(\frac{7}{4} \cdot \frac{6}{7}\right) = -\frac{3}{2} = -1\frac{1}{2}$$

Siis suhteen jälkimmäinen jäsen on  $-1\frac{1}{2}$ .

Suhdekäsitetä käytetään erityisesti laatulukujen yhteydessä. Kahden laatuluvun suhde = niiden mittalukujen suhde, edellyttäen että on käytetty samaa mittayksikköä.

**Esim. 3.** Mikä on  $6 \text{ m} : n$  suhde  $120 \text{ cm}$ :iin?

$$6 \text{ m} : 120 \text{ cm} = 600 \text{ cm} : 120 \text{ cm} = 600 : 120 = 5$$

*Verranto* on kahden suhteen merkitty yhtäsuuruus:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Luvut  $a$ ,  $b$ ,  $c$  ja  $d$  ovat järjestyksessään verrannon *ensimmäinen*, *toinen*, *kolmas* ja *neljäs jäsen*.  $a$  ja  $d$  ovat verrannon *äärimmäiset jäsenet* ja  $b$  ja  $c$  taas sen *keskimmäiset jäsenet*. Lukuja  $a$  ja  $b$  sanotaan *verrannollisiksi* lukuihin  $c$  ja  $d$ .

Jos verrannon molemmat puolet kerrotaan toisen ja neljännen jäsenen tulolla  $bd$ , niin saadaan

$$ad = bc$$

Jos tämän yhtälön molemmat puolet jaetaan tulolla  $bd$ , niin saadaan jälleen edellä oleva verranto, jonka äärimmäisinä jäseninä ovat siis yhtälön vasemman puolen tekijät ja keskimmäisinä oikean puolen tekijät. Voidaan niin ollen kirjoittaa

**Lause 1:** *Verrannon äärimmäisten jäsenten tulo = keskimmäisten jäsenten tulo.*

*Jos on kaksi yhtäsuurta kahden luvun tuloa, niin luvuista voidaan muodostaa verranto, jonka äärimmäisinä jäseninä ovat toisen ja keskimmäisinä toisen tulon tekijät.*

Yllä olevasta yhtälöstä, joka johdettiin esitetystä verrannosta, seuraa kääntäen edellisen lauseen jälkimmäisen osan mukaan ei vain mainittu verranto vaan yhtä hyvin verrannot

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} \text{ ja } \frac{d}{b} = \frac{c}{a}$$

Kun näitä verrataan alkuperäiseen verrantoon, niin havaitaan oikeaksi verrannon *vuorottamista* koskeva

**Lause 2:** *Verrannossa saa keskimmäiset jäsenet vaihtaa keskenään ja samoin äärimmäiset.*

Jos verrannon jäsenistä tunnetaan kolme, niin neljäs saadaan aina laske-  
tuksi lauseen 1 edellistä osaa käyttäen.<sup>1</sup>

**Esim.** Mikä on verrannon  $\frac{5}{4} = \frac{x}{-6}$  kolmannen jäsenen  $x$  arvo?

Lauseen 1 mukaan on  $4x = 5(-6) = -30$ , joten  $x = \frac{-30}{4} = -\frac{15}{2} = -7\frac{1}{2}$ .

(206–218)

---

<sup>1</sup>Verranto-oppiin tutustutaan perusteellisemmin geometriassa, jossa sillä on tärkeä käytäntö.

## POTENSSIT

## 18 § Potenssin määritelmä

Jos  $n$  lukua, joista jokainen  $= a$ , kerrotaan keskenään, saadaan luvun  $a$   $n$ :s *potenssi* ja sitä merkitään  $a^n$  (luetaan myös: ” $a$  korotettuna  $n$ :nteen *potenssiin*” tai lyhyesti ” $a$   $n$ :nteen”). Siis

$$a^n = \overbrace{a \cdot a \cdots a}^{n \text{ kpl}}$$

**Esim.** a)  $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$       b)  $(-5)^2 = (-5)(-5) = 25$   
 c)  $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$       d)  $(-4)^3 = (-4)(-4)(-4) = -64$

Lukua  $a$  sanotaan *kannaksi* eli *kantaluvuksi* tai myös *korotettavaksi* ja  $n$ :ää *eksponentiksi*.

Luvun ensimmäisellä potenssilla tarkoitetaan lukua itseään:  $a^1 = a$ . Luvun toista potenssia sanotaan myös luvun *neliöksi* ja kolmatta potenssia taas sen *kuutioksi*.

Jos jokin muu kuin pelkkä kirjain tai etumerkitön kokonais- tai desimaaliluku on merkittävä potenssiin korotettavaksi, se pannaan selvyuden vuoksi sulkuihin.

**Esim.** a)  $(a + b)^2$     b)  $(3a)^4$     c)  $(-6)^3$     d)  $\left(\frac{a}{b}\right)^2$

12 §:n lauseesta 1 seuraa välittömästi

**Lause 1:** *Negatiivisen luvun parillinen potenssi on positiivinen ja pariton potenssi negatiivinen.*

Koska positiivisen luvun potenssi on aina positiivinen, niin tästä lauseesta seuraa edelleen

**Lause 2:** *Jos muutetaan kantaluvun merkki, niin parillinen potenssi jää muuttumatta ja pariton muuttuu vastaluvukseen.*

Koska parillinen luku voidaan aina esittää muodossa  $2n$  ja pariton muodossa  $2n + 1$ , jossa  $n$  merkitsee kokonaislukua, niin edellisen lauseen sisältö voidaan esittää kahden yhtälön avulla:

$$(-a)^{2n} = a^{2n} \qquad (-a)^{2n+1} = -a^{2n+1} \qquad \textbf{(219–240)}$$

## 19 § Tulon ja murtoluvun potenssi

Koska

$$(ab)^n = \overbrace{(ab)(ab) \cdots (ab)}^{n \text{ kpl}} = \overbrace{(a \cdot a \cdots a)}^{n \text{ kpl}} \overbrace{(b \cdot b \cdots b)}^{n \text{ kpl}} = a^n b^n$$

niin

$$(ab)^n = a^n b^n$$

eli sanallisesti lausuttuna:

**Lause 1:** *Tulo voidaan korottaa potenssiin siten, että tekijät erikseen korotetaan ko. potenssiin.*

Tämä lause on ilmeisesti voimassa useammankin tekijän tulon potenssiin nähden.

**Esim.** a)  $(2x)^3 = 2^3 x^3 = 8x^3$  b)  $(-4xyz)^2 = 16x^2 y^2 z^2$

Koska murtolukujen kertosäännön mukaan

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \overbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdots \frac{a}{b}}^{n \text{ kpl}} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdots a}^{n \text{ kpl}}}{\underbrace{b \cdot b \cdots b}_{n \text{ kpl}}} = \frac{a^n}{b^n}$$

niin

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

eli sanallisesti lausuttuna:

**Lause 2:** *Murtoluku voidaan korottaa potenssiin siten, että osoittaja ja nimittäjä erikseen korotetaan ko. potenssiin.*

(241–247)

## 20 § Potenssien kertominen ja jakaminen

Koska

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{\overbrace{(a \cdot a \cdots a)}^{m \text{ kpl}} \overbrace{(a \cdot a \cdots a)}^{n \text{ kpl}}}_{m+n \text{ kpl}} = a^{m+n}$$

niin

$$(I) \quad a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

eli sanallisesti lausuttuna:

**Lause 1:** *Samankantaiset potenssit voidaan kertoa keskenään siten, että eksponentit lasketaan yhteen ja summa pannaan yhteisen kantaluvun eksponentiksi.*

Tämäkin lause on ilmeisesti voimassa useampaankin tekijään nähden.

**Esim.** a)  $x^2 \cdot x^3 = x^5$     b)  $k \cdot k^4 \cdot k^2 = k^7$  (248–252)

Edelliseen lauseeseen nojaten saadaan edelleen:

$$(a^m)^n = \overbrace{a^m \cdot a^m \cdots a^m}^{n \text{ kpl}} = \overbrace{a^{m+m+\cdots+m}}^{n \text{ kpl}} = a^{nm} = a^{mn}$$

joten

(II)  $(a^m)^n = a^{mn}$

eli sanallisesti lausuttuna:

**Lause 2:** *Potenssi voidaan korottaa potenssiin siten, että eksponentit kerrotaan keskenään ja tulo pannaan alkuperäisen kantaluvin eksponentiksi.*

**Esim.** a)  $(x^3)^5 = x^{15}$     b)  $(2a^2b^3)^3 = 2^3(a^2)^3(b^3)^3 = 8a^6b^9$

Tämä lause voidaan yleistää. Niinpä on

$$[(a^m)^n]^p = a^{mnp}$$

Koska  $(a^m)^n = a^{mn}$  ja  $(a^n)^m = a^{nm}$  ja näiden yhtälöiden oikeat puolet ovat yhtäsuuret, niin

(III)  $(a^m)^n = (a^n)^m$

eli sanallisesti lausuttuna:

**Lause 3:** *Potenssin potenssissa saa eksponentit vaihtaa keskenään.*

(253–260)

Jos  $m > n$  ja  $a \neq 0$ , niin saadaan supistamalla  $n$  kertaa tekijällä  $a$ :

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdots a}^{m \text{ kpl}}}{\underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ kpl}}} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdots a}^{m-n \text{ kpl}}}{1} = a^{m-n}$$

Siis

(IV)  $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

eli sanallisesti lausuttuna:

**Lause 4:** *Samankantaiset potenssit voidaan jakaa keskenään siten, että jaettavan eksponentista vähennetään jakajan eksponentti ja erotus pannaan yhteisen kantaluvin eksponentiksi.*

**Esim.** a)  $\frac{b^9}{b^4}$     b)  $\frac{(x^3)^2}{x^3x^2} = \frac{x^6}{x^5} = x$  (261–265)

## 21 § 0:s ja negatiivinen potenssi

Kaava (IV) ja vastaava lause 4 pitävät paikkansa vain silloin, kun jaettavan eksponentti  $m$  on suurempi kuin jakajan eksponentti  $n$ . Jos näet  $m = n$ , niin  $m - n = 0$ , ja jos  $m < n$ , niin  $m - n < 0$ , eikä tällöin kaavan oikealla puolella ole mitään merkitystä. Laajennamme nyt potenssikäsitettä niin, että näissäkin tapauksissa kaava (IV) on voimassa.

Jos ensiksikin  $m = n$ , niin

$$\frac{a^m}{a^n} = 1$$

kun taas kaavasta (IV) saataisiin

$$\frac{a^m}{a^n} = a^0$$

Jotta kaavamme tällöinkin olisi voimassa, määritellään:

$$a^0 = 1$$

eli sanallisesti lausuttuna:

**Määritelmä:** Jokaisen nollasta eriävän luvun 0:s potenssi  $= 1$ .

Jos taas  $m < n$  ja siis  $n > m$ , niin supistamalla kaavan (IV) vasemmalla puolella olevaa murtolukua  $a^m$ :llä saadaan

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}$$

Kun merkitään  $n - m = p$  (siis  $p > 0$ ), niin on siis

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^p}$$

Koska  $m - n = -p$  (11 §, lause 2), niin kaava (IV) saisi tällöin muodon

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{-p}$$

Jotta kaava nytkin olisi voimassa, määritellään:

$$a^{-p} = \frac{1}{a^p}$$

eli sanallisesti lausuttuna:

**Määritelmä:** Luvun negatiivisilla potenssilla tarkoitetaan vastaavan positiivisen potenssin käänteislukua.

Määrittelevä yhtälö voidaan kirjoittaa myös muotoon

$$a^{-p} = \left(\frac{1}{a}\right)^p$$

(19 §, lause 2), joten *luvun negatiivinen potenssi = käänteisluvun vastaava positiivinen potenssi*.

**Esim. 1.** a)  $(x + 2)^0 = 1$ , edellyttäen että  $x \neq -2$  b)  $\left(\frac{3}{5}\right)^0 = 1$

**Esim. 2.** a)  $10^{-3} = \frac{1}{10^3} = 0,001$  b)  $\left(\frac{3}{5}\right)^{-1} = \left(\frac{5}{3}\right)^1 = \frac{5}{3}$

Voidaan todistaa, että §§:n 18–20 lauseet ovat voimassa silloinkin, kun jokin tai jotkin esiintyvistä eksponenteista ovat nollia tai negatiivisia.

**Esim.** 20 §:n lause 1 näytetään oikeaksi siinä tapauksessa, että toinen eksponentti on positiivinen ( $m$ ) ja toinen negatiivinen ( $-n$ ), seuraavasti:

$$a^m \cdot a^{-n} = a^m \cdot \frac{1}{a^n} = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} = a^{m+(-n)} \quad (266-277)$$

## POLYNOMIEN YHTEEN- JA VÄHENNYSLASKU

### 22 § Polynomikäsitel

Kun 11 §:ssä esitetyssä vähennyslaskun suorittamista koskevassa kaavassa vasen ja oikea puoli vaihdetaan keskenään, saadaan

$$a + (-b) = a - b$$

Toiselta puolen on luonnollisesti

$$a + (+b) = a + b$$

Näistä yhtälöistä näkyy, että jos lukuun on lisättävä toinen, niin voidaan sitä merkitä lyhyesti siten, että kirjoitetaan edellisen perään välittömästi jälkimmäinen etumerkkeineen. Vastaavasti voidaan menetellä silloinkin, kun on merkittävä suoritettavaksi useampien lukujen yhteenlasku. Niinpä esim.

$$(-a) + (-b) + (+c) + (-d) = -a - b + c - d$$

Oikealla puolella oleva lauseke merkitsee oikeastaan, että  $-a$ :sta on vähennettävä  $b$ , jäännökseen lisättävä  $c$  ja saadusta summasta vähennettävä  $d$ , mutta se voidaan tulkita myös — ja niin tavallisesti tehdäänkin — lukujen  $-a$ ,  $-b$ ,  $+c$  ja  $-d$  summaksi. Tällöin lausekkeessa esiintyviä merkkejä pidetään yhteenlaskettavien etumerkkeinä ja yhteenlaskumerkit on jätetty pois. Voidaan siis kirjoittaa

**Lause:** *Kun on merkittävä kahden tai useamman luvun summa, niin voidaan yhteenlaskumerkit jättää pois ja kirjoittaa vain luvut etumerkkeineen peräkkäin.*

Edellisessä lauseessa esitetyllä tavalla merkittyä summaa sanotaan *polynomiksi* ja sen yhteenlaskettavia polynomin *jäseniksi* eli *termeiksi*. Erikoisesti sanotaan kolmijäsenistä polynomia *trinomiksi*, kaksijäsenistä *binomiksi* ja yksijäsenistä *monomiksi*<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>Monomi ei kylläkään ole mikään summa, mutta on osoittautunut tarkoituksenmukaiseksi laskea sekin rajatapauksena polynomien joukkoon.



**Esim. 1.** Lauseketta  $2 - 5 - 3 + 8 - 4$  voidaan pitää lukujen 2,  $-5$ ,  $-3$ ,  $+8$  ja  $-4$  summana, joten sen arvo  $= -2$ .

**Esim. 2.**  $x^2 - 2x + 3$  on trinomi, joka on jäseniensä  $x^2$ ,  $-2x$  ja  $+3$  summa.

**Esim. 3.**  $\frac{1}{a+b} - c$  on binomi, jonka jäsenet ovat  $\frac{1}{a+b}$  ja  $-c$ .

Puhutaan myös jonkin kirjaimen, esim.  $x$ :n *polynomista* eli *polynomista*  $x$ :n *suhteen*. Tällaisen polynomin jäsenet ovat  $x$ :n ei-negatiivisia, so. positiivisia ja 0:nsia potensseja kerrottuina tietyillä luvuilla tai yleensä  $x$ :ää sisältämättömillä lausekkeilla, joita sanotaan jäsenien ja myös polynomin *kertoimiksi* eli *koeffisienteiksi*. Vastaavasti puhutaan myös polynomeista kahden tai useamman kirjaimen tai yleensä lausekkeen suhteen.

**Esim. 1.** Trinomi  $x^2 - 2x + 3$  on  $x$ :n polynomi, jonka kertoimet ovat 1,  $-2$  ja  $+3$ . Kertoimien määräämistä varten ajatellaan trinomi kirjoitetuksi muotoon  $1x^2 - 2x + 3x^0$ .

**Esim. 2.**  $\frac{1}{2}x^3 - x^2y^2 - 3xy^3 + y^4$  on  $x$ :n ja  $y$ :n polynomi, jonka kertoimet ovat  $\frac{1}{2}$ ,  $-1$ ,  $-3$  ja 1.

**Esim. 3.** Binomi  $ab^2c - \frac{1}{a}c^3$  on polynomi  $b$ :n ja  $c$ :n suhteen, kertoimina  $a$  ja  $-\frac{1}{a}$ . Se on myös pelkän  $c$ :n polynomi, jonka kertoimina ovat  $ab^2$  ja  $-\frac{1}{a}$ . Sitä vastoin se ei ole  $a$ :n polynomi.

**Esim. 4.**  $2\left(\frac{a}{b+c}\right)^2 - \frac{a}{b+c} + 3$  on lausekkeen  $\frac{a}{b+c}$  polynomi, jonka kertoimet ovat 2,  $-1$  ja  $+3$ .

Kahta polynomin jäsentä, jotka eroavat toisistaan korkeintaan kertoimiensa puolesta, sanotaan *samanmuotoisiksi*.

**Esim.**  $a$ :n ja  $x$ :n polynomissa  $x - 2x - ax + 3ax$  ovat kaksi ensimmäistä jäsentä samanmuotoisia ja samoin kaksi viimeistä. Jos sitä vastoin polynomi käsitetään pelkän  $x$ :n polynomiksi, niin kaikki jäsenet ovat samanmuotoisia, sillä eroavathan tällöin jäsenet toisistaan vain kertoimiensa 1,  $-2$ ,  $-a$  ja  $+3a$  puolesta.

Kaikkein yksinkertaisin ja samalla tärkein polynomimuoto on yhden tai useamman kirjaimen polynomi, jonka kertoimet ovat numerolukuja. Ja on huomattava, että hyvin usein käytetäänkin polynomikäsitettä tällaisessa ahtaamassa merkityksessä. Tällaisiin polynomeihin mekin seuraavassa pääasiassa rajoitumme, vaikka §§:ssä 23–33 esitettävät lauseet ovat voimassa yleiseenkin polynomikäsitteeseen nähden. (278–288)

## 23 § Polynomien yhteen- ja vähennyslasku

Samanmuotoisten jäsenten yhteenlasku eli yhdistäminen voidaan suorittaa käyttämällä hyväksi 13 §:n lausetta 3 käänteisessä muodossa.

**Esim. 1.**  $4x + 7x + 3x = (4 + 7 + 3)x = 14x$

**Esim. 2.**  $-5x + 3x - 2x = (-5 + 3 - 2)x = -4x$

**Esim. 3.**  $ay^2 - 2ay^2 + 3ay^2 - ay^2 = (1 - 2 + 3 - 1)ay^2 = 1ay^2 = ay^2$

**Esim. 4.** Jos binomia  $ax + b$  pidetään pelkän  $x$ :n polynomina, niin sen jäsenet ovat samanmuotoisia ja yhdistämällä ne saadaan summaksi  $x$ :n polynomi (monomi)  $(a+b)x$ .

**Lause 1:** *Polynomin samanmuotoiset jäsenet voidaan yhdistää yhdeksi näiden muotoiseksi jäseneksi panemalla sen kertoimeksi mainittujen jäsenien kertoimien summa.* (289–295)

Jos polynomin jäsenet eivät ole kaikki samanmuotoisia, niin ottamalla huomioon, että polynomi on jäseniensä summa, sen jäsenet voidaan ryhmitellä niin, että kuhunkin ryhmään tulee vain samanmuotoisia jäseniä, ja yhdistää sitten kunkin ryhmän jäsenet (10 §, lause).

**Esim. 1.**  $-y + z + 5y - x - 2y - 3z$   
 $= -x + (-y + 5y - 2y) + (z - 3z) = -x + 2y - 2z$

**Esim. 2.**  $4a + 6a^2 - 2a - 2 - 4a^3 - 3a + 5a^3 - 1$   
 $= (-4a^3 + 5a^3) + 6a^2 + (4a - 2a - 3a) + (-2 - 1)$   
 $= a^3 + 6a^2 - a - 3$

**Esim. 3.** Kun kirjaimien  $r$ ,  $s$  ja  $x$  polynomin

$$rx - 3sx - 1 + 2sx + 2r + 2$$

samanmuotoiset jäsenet yhdistetään, saadaan

$$rx - sx + 2r + 1$$

Jos polynomia pidetään pelkän  $x$ :n polynomina, niin ovat tässä kaksi ensimmäistä ja kaksi viimeistä jäsentä vielä keskenään samanmuotoisia, ja yhdistämällä ne saadaan  $x$ :n polynomi

$$(r - s)x + (2r + 1)$$

jonka kertoimet ovat  $r - s$  ja  $2r + 1$ .

Yleensä on tapana järjestää lopputuloksessa polynomin jäsenet *aakkosjärjestykseen*, kuten esimerkissä 1, tai jonkin kirjaimen *alenevien potenssien* mukaan, kuten esimerkissä 2. Myös voidaan jäsenet järjestää *ylenevien potenssien* mukaan, kuten esimerkissä 2, jos jäsenet kirjoitetaan päinvastaiseen järjestykseen. (296–309)

10 §:n lauseen perusteella voidaan kirjoittaa seuraava polynomien yhteenlaskusääntö:

**Lause 2:** *Polynomit lasketaan yhteen siten, että kirjoitetaan niiden jäsenet etumerkkeineen peräkkäin ja yhdistetään sitten samanmuotoiset jäsenet.*

**Esim.**  $(2a^2b - 4ab^2) + (3a^3 - 4a^2b) + (-a^3 - a^2b)$   
 $= 2a^2b - 4ab^2 + 3a^3 - 4a^2b - a^3 - a^2b = 2a^3 - 3a^2b - 4ab^2$  (310–316)

Edelleen seuraa 8 §:n lauseesta välittömästi

**Lause 3:** *Polynomin vastaluku eli ”vastapolynomi” saadaan muuttamalla polynomin merkit.*

**Esim.**  $-(x^3 - 2x^2 + 5x - 1) = -x^3 + 2x^2 - 5x + 1$

Tästä lauseesta ja 11 §:n lauseesta 1 seuraa polynomien vähennyslaskusääntö:

**Lause 4:** *Polynomista vähennetään toinen siten, että jälkimmäisen merkit muutetaan ja saatu polynomi lisätään edelliseen.*

$$\begin{aligned}\text{Esim. } (8x - 3y) - (3x - 2y + 1) &= (8x - 3y) + (-3x + 2y - 1) \\ &= 8x - 3y - 3x + 2y - 1 = 5x - y - 1\end{aligned}\quad (317-322)$$

Yhdistämällä lauseet 2—4 saadaan seuraava käytännöllinen sulku-  
merkkien poistamisääntö:

**Lause 5:** Jos sulkumerkkien edessä on  $-$ -merkki, niin se ja sulkumerkit voidaan poistaa, jos samalla muutetaan suluissa olevan polynomin merkit. Muussa tapauksessa voidaan sulkumerkit poistaa ilman muuta.

$$\begin{aligned}\text{Esim. 1. } -(-x - 2y + 5z) &= x + 2y - 5z \\ \text{Esim. 2. } (3a^2 - 2b) + (-a + b) - (3a^2 - 4a + 2b) \\ &= 3a^2 - 2b - a + b - 3a^2 + 4a - 2b = 3a - 3b\end{aligned}$$

Jos on ”sisäkkäisiä” sulkumerkkejä, niin ne poistetaan peräkkäin alkaen esim. sisimmistä.

$$\begin{aligned}\text{Esim. } a^2 - \{2a^2 - 1 - [-3a - (4a^2 - 2)]\} \\ &= a^2 - \{2a^2 - 1 - [-3a - 4a^2 + 2]\} \\ &= a^2 - \{2a^2 - 1 + 3a + 4a^2 - 2\} \\ &= a^2 - 2a^2 + 1 - 3a - 4a^2 + 2 = -5a^2 - 3a + 3\end{aligned}\quad (323-337)$$

## 24 § Polynomin aste

*Monomin asteella* eli *asteluvulla* joidenkin kirjaimien suhteen tarkoitetaan näiden kirjaimien eksponenttien summaa ko. monomissa.

**Esim.**  $2ax^3y^2$  on kuudetta astetta kaikkien siinä esiintyvien kirjaimien suhteen, viidettä astetta  $x$ :n ja  $y$ :n suhteen ja kolmatta astetta pelkän  $x$ :n suhteen. Myös voidaan sanoa, että ko. monomi on nollatta astetta  $z$ :n suhteen, sillä voidaanhan sen perään ajatella liitetyn tekijä  $z^0 = 1$ .

*Polynomin aste* eli *asteluku* taas on sama kuin sen ”korkeinta” astetta olevan jäsenen aste, sen jälkeen kun polynomin samanmuotoiset jäsenet on yhdistetty.

**Esim.**  $3x^3y + x^2y^3 - 2y^4$  on viidettä astetta  $x$ :n ja  $y$ :n suhteen ja kolmatta astetta pelkän  $x$ :n suhteen.

Jos polynomin kaikki jäsenet ovat samanasteisia joidenkin kirjaimien suhteen, niin polynomia sanotaan *homogeeniseksi* eli *tasa-asteiseksi* näiden kirjaimien suhteen.

**Esim.**  $a^2b - 5ab^2 + 2b^3$  on kolmannen asteen homogeeninen polynomi ( $a$ :n ja  $b$ :n suhteen). (338-340)

## POLYNOMIEN KERTOLASKU

### 25 § Monomien kertominen

Monomit kerrotaan keskenään ryhmittämällä tekijät (13 §, lause 1) siten, että kerrotaan ensin keskenään kertoimet ja samoin samankantaiset potenssit (20 §, lause 1).

$$\begin{aligned}
\text{Esim. 1. } & (3a^2bc^3)(-2a^4c^3)(-ab^2d) \\
& = [3 \cdot (-2) \cdot (-1)](a^2a^4a)(bb^2)(c^3c^3d) = 6a^7b^3c^6d \\
\text{Esim. 2. } & (3x^{m+1}y)(-2x^{m-1}y^n) = [3 \cdot (-2)](x^{m+1}x^{m-1})(yy^n) \\
& = -6x^{(m+1)+(m-1)}y^{1+n} = -6x^{2m}y^{1+n}
\end{aligned}
\tag{341–356}$$

## 26 § Monomin ja polynomin kertominen

Monomilla kerrotaan polynomi jäsenittäin, so. monomilla kerrotaan jokainen polynomin jäsen ja saadut tulot lasketaan yhteen (13 §, lause 2).

$$\begin{aligned}
\text{Esim. 1. } & 2x^2(x^2 - 3x + 5) = 2x^4 - 6x^3 + 10x^2 \\
\text{Esim. 2. } & -2a^2b(a^3 - 4a^2b + 2ab^2) = -2a^5b + 8a^4b^2 - 4a^3b^3 \\
\text{Esim. 3. } & 2x(x - y) - 3y(2x - 3y) = 2x^2 - 2xy - 6xy + 9y^2 = 2x^2 - 8xy + 9y^2
\end{aligned}$$

Tässä esimerkissä on annettua lauseketta pidetty tulojen  $2x(x-y)$  ja  $-3y(2x-3y)$  summana ja suoritettu ensin nämä kertolaskut. Sitten on saadut polynomit laskettu yhteen, so. niiden jäsenet on kirjoitettu peräkkäin etumerkkeineen ja yhdistetty lopuksi samanmuotoiset jäsenet.

Jos polynomilla on kerrottava monomi, niin vaihdantalain mukaan voidaan monomilla kertoa polynomi. Kertominen voidaan suorittaa myös siten, että jokaisella polynomin jäsenellä kerrotaan monomi ja saadut tulot lasketaan yhteen (13 §, lause 3).

## 27 § Polynomien kertominen

Polynomilla kerrotaan polynomi jäsenittäin, so. jokaisella kertojan jäsenellä kerrotaan jokainen kerrottavan jäsen ja saadut tulot lasketaan yhteen (13 §, lause 4). Samanmuotoiset jäsenet yhdistetään.

$$\begin{aligned}
\text{Esim. 1. } & (2a^3 - 3ab^2)(-a^2b + 6b^3) \\
& = -2a^5b + 12a^3b^3 + 3a^3b^3 - 18ab^5 \\
& = -2a^5b + 15a^3b^3 - 18ab^5
\end{aligned}$$

**Esim. 2.**  $(3x+2-x^2)(x^2-4-2x-5x^3)$ . Tässä voitaisiin menetellä niin kuin edellisessä esimerkissä, mutta silmällä pitäen lopussa toimitettavaa samanmuotoisten jäsenten yhdistämistä on käytännöllistä järjestää laskut seuraavasti (kertoja ja kerrottava järjestetään ensin  $x$ :n alenevien potenssien mukaan):

$$\begin{array}{r}
-5x^3 + \quad x^2 - 2x - 4 \\
-x^2 + \quad 3x + 2 \\
\hline
5x^5 - \quad x^4 + \quad 2x^3 + 4x^2 \\
\quad -15x^4 + \quad 3x^3 - 6x^2 - 12x \\
\quad \quad -10x^3 + 2x^2 - \quad 4x - 8 \\
\hline
5x^5 - 16x^4 - \quad 5x^3 \quad \quad -16x - 8
\end{array}$$

$$\text{Tulos on siis } 5x^5 - 16x^4 - 5x^3 - 16x - 8.
\tag{372–378}$$

## 28 § Erotuksen ja summan tulo

Laskemalla todetaan oikeaksi kaava

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

joka voidaan lausua sanallisesti

**Lause:** *Kahden luvun erotuksen ja summan tulo = näiden lukujen neliöiden erotus.*

**Esim. 1.**  $(x^2y - 5y^3)(x^2y + 5y^3) = (x^2y)^2 - (5y^3)^2 = x^4y^2 - 25y^6$

**Esim. 2.**  $(-n - 1)(-n + 1) = (-n)^2 - 1^2 = n^2 - 1$  (388–398)

## 29 § Polynomin neliö

Suorittamalla kertominen

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b)$$

saadaan tulos<sup>1</sup>:

(I)  $(\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2 + 2\mathbf{ab} + \mathbf{b}^2$

Sanallisesti voidaan tämä lausua seuraavasti:

**Lause 1:** *Binomin neliö = sen jäsenien neliöiden ja kaksinkertaisen tulon summa.*

**Esim. 1.**  $(x^3 + 3)^2 = (x^3)^2 + 2x^3 \cdot 3 + 3^2$   
 $= x^6 + 6x^3 + 9$

**Esim. 2.**  $(a - b)^2 = a^2 + 2a(-b) + (-b)^2$   
 $= a^2 - 2ab + b^2$  (399–425)

Viimeisessä esimerkissä nähtiin, että kun kaavaan (I) sijoitetaan  $b$ :n paikalle  $-b$ , niin saadaan kaava

(II)  $(\mathbf{a} - \mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2 - 2\mathbf{ab} + \mathbf{b}^2$

Edellinen lause voidaan yleistää. Olkoon esim. muodostettava trinomin neliö:

$$(a + b + c)^2 = (a + b + c)(a + b + c)$$

Kertomalla ensin ensimmäiset jäsenet keskenään, sitten toiset ja vihdoin kolmannet saadaan näiden tulojen summaksi  $a^2 + b^2 + c^2$ . Kun tämän jälkeen kerrotaan kertojan ensimmäisellä jäsenellä kerrottavan toinen jäsen ja sitten kertojan toisella jäsenellä kerrottavan ensimmäinen jäsen, saadaan näiden tulojen summaksi  $ab + ab = 2ab$ . Kun näin jatketaan edelleen, saadaan lopuksi

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

Tällä tavalla menettelemällä havaitaan, että on voimassa edellisen lauseen yleistys:

**Lause 2:** *Polynomin neliö = sen jäsenien neliöiden ja kaksinkertaisten kaksittaistulojen summa.*

---

<sup>1</sup>V a r o i t u s:  $(ab)^2 = a^2b^2$ , mutta  $(a + b)^2$  e i o l e  $= a^2 + b^2$ !

$$\begin{aligned}
\text{Esim. 3. } (x-1)^4 &= [(x-1)^2]^2 \\
&= (x^2-2x+1)^2 \\
&= x^4+4x^2+1-4x^3+2x^2-4x \\
&= x^4-4x^3+6x^2-4x+1
\end{aligned}$$

On kuitenkin huomattava, että tämä tehtävä voidaan ratkaista yksinkertaisemmin seuraavassa §:ssä esitettävällä keinolla.

(426–431)

### 30 § Pascalin kolmio

Laskemme nyt peräkkäin binomin  $a+b$  potensseja:

$$\begin{aligned}
(a+b)^1 &= a+b \\
&\quad \underline{a+b} \\
&\quad a^2+ab \\
&\quad \quad +ab+b^2 \\
(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2 \\
&\quad \underline{a+b} \\
&\quad a^3+2a^2b+ab^2 \\
&\quad \quad a^2b+2ab^2+b^3 \\
(a+b)^3 &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \\
&\quad \underline{a+b} \\
&\quad a^4+3a^3b+3a^2b^2+ab^3 \\
&\quad \quad a^3b+3a^2b^2+3ab^3+b^4 \\
(a+b)^4 &= a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4 \\
&\quad \text{-----}
\end{aligned}$$

Tästä laskusta käy ilmeiseksi

**Lause:** Kun  $(a+b)^n$  ”kehitetään” polynomiksi, saadaan  $n$ :nnen asteen homogeeninen polynomi, jonka kertoimet, kun polynomi järjestetään  $a$ :n alenevien potenssien mukaan, muodostavat ns. *Pascalin kolmion*  $n$ :nnen rivin:

$$\begin{array}{cccccccc}
& & & & 1 & & 1 & \\
& & & 1 & & 2 & & 1 \\
& & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
& 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
& \text{-----}
\end{array}$$

Tämä ”kolmio”, jota voidaan jatkaa alaspäin kuinka pitkälle tahansa, muodostetaan siten, että kahden vierekkäisen luvun summa kirjoitetaan aina niiden keskivälin alapuolelle ja kunkin rivin päihin pannaan luku 1.

(432–447)

## POLYNOMIEN JAKOLASKU

### 31 Monomien jako

Monomi jaetaan monomilla käsittelemällä merkittyä osamäärää murtolukuna (16 §) ja supistamalla sitten tätä mahdollisuuksien mukaan.

$$\text{Esim. 1. } \frac{8a^2x^6}{2ax^4} = \frac{4ax^2}{1} = 4ax^2$$

Tässä on supistettu 2:lla,  $a$ :lla ja  $x^4$ :llä (20 §, lause 4). Nimittäjäksi on saatu 1, joka on sitten voitu jättää pois.

$$\text{Esim. 2. } \frac{-12a^5b^3c^2}{18a^2b^3} = \frac{-2a^3c^2}{3} = -\frac{2}{3}a^3c^2$$

Tässä on supistettu 6:lla,  $a^2$ :lla ja  $b^3$ :lla, jolloin nimittäjäksi on tullut 3. Kun sitten vielä osoittajan kerroin  $-2$  on jaettu nimittäjällä 3, niin lopputulokseksi on saatu monomi, jonka kertoimenä on  $-\frac{2}{3}$ .

$$\text{Esim. 3. } \frac{3a^3b^2c^2}{2ab^5c^2d} = \frac{3a^2}{2b^3d}$$

Tässä on supistettu  $a$ :lla,  $b$ :lla ja  $c$ :lla. Tulokseksi saatiin nyt murtolauseke. Käyttämällä negatiivisia eksponentteja (21 §) tulos voitaisiin kirjoittaa myös muotoon  $\frac{3}{2}a^2b^{-3}d^{-1}$ . Näin ei kuitenkaan tavallisesti tehdä.

$$\text{Esim. 4. } \frac{xy(x+y)^3}{x+y} = xy(x+y)^2$$

Tässä on supistettu  $(x+y)$ :llä, jota on pidetty yhtenä lukuna, vaikka se muodoltaan onkin binomi. (448–461)

### 32 § Polynomin jako monomilla

Polynomi voidaan jakaa monomilla jäsenittäin, so. jokainen polynomin jäsen jaetaan monomilla ja osamäärät lasketaan yhteen (15 §, lause).

$$\text{Esim. 1. } \frac{6x^4y^3 - 2x^3y + 3x^2y^3}{2x^2y} = 3x^2y^2 - x + \frac{3}{2}y^2$$

$$\text{Esim. 2. } \frac{(a-1)^2 + a(a-1)}{a-1} = (a-1) + a = 2a - 1$$

$$\text{Esim. 3. } \frac{a^2 + b^2}{a} = a + \frac{b^2}{a}$$

Viimeisessä esimerkissä jäi osamäärän toisen jäsenen nimittäjään kirjain. Tällaisessa tapauksessa jako jätetään yleensä suorittamatta ja käsitellään alkuperäistä merkittyä osamäärää murtolukuna. (462–472)

### 33 § Polynomien jako

Polynomi jaetaan polynomilla samantapaisesti kuin kokonaisluku kokonaisluvulla. Seuraavien esimerkkien avulla selvitetään lähemmin, kuinka jako suoritetaan.

$$\text{Esim. 1. } (10a^3b + ab^3 + 6a^4 - 7a^2b^2) : (4ab + 2a^2 - b^2)$$

Lasku muodostuu seuraavaksi:

$$\begin{array}{r|l}
6a^4 + 10a^3b - 7a^2b^2 + ab^3 & 2a^2 + 4ab - b^2 \\
\mp 6a^4 \mp 12a^3b \pm 3a^2b^2 & 3a^2 - ab \\
\hline
- 2a^3b - 4a^2b^2 + ab^3 & \\
\pm 2a^3b \pm 4a^2b^2 \mp ab^3 & \\
\hline
0 & 
\end{array}$$

Ensin on jaettava ja jakaja järjestetty saman kirjaimen ( $a$ ) alenevien potenssien mukaan (olisi voitu järjestää myös ylenevien potenssien mukaan). Sitten on jaettavan ensimmäinen jäsen ( $6a^4$ ) jaettu jakajan ensimmäisellä jäsenellä ( $2a^2$ ) ja näin on saatu osamäärän ensimmäinen jäsen ( $3a^2$ ). Tällä on kerrottu jakaja ja tulo vähennetty jaettavasta (siis vähentäjän merkit on muutettu ja näin saatu polynomi lisätty vähennettävään). Täten on saatu ensimmäinen *jakojäännös*, joka on alemmaa astetta ( $a$ :n suhteen) kuin jaettava. Tämän jälkeen on jakojäännöksen ensimmäinen jäsen ( $-2a^3b$ ) jaettu jakajan ensimmäisellä jäsenellä ( $2a^2$ ) ja saatu siten osamäärän toinen jäsen ( $-ab$ ). Tällä on taas kerrottu jakaja ja tulo sitten vähennetty mainitusta jakojäännöksestä. Näin saatu toinen jakojäännös  $= 0$ .

Että saatu osamäärä on todellakin oikea, todetaan seuraavasti. Itse asiassa laskun kuluessa on jaettavasta tullut vähennetyksi

$$3a^2(2a^2 + 4ab - b^2) \text{ ja } -ab(2a^2 + 4ab - b^2)$$

eli yhteensä näiden summa, joka käyttämällä hyväksi 13 §:n lausetta 3 käänteisessä muodossa voidaan saattaa muotoon

$$(3a^2 - ab)(2a^2 + 4ab - b^2)$$

Koska saatu jäännös  $= 0$ , niin

$$6a^4 + 10a^3b - 7a^2b^2 + ab^3 = (3a^2 - ab)(2a^2 + 4ab - b^2)$$

Osamäärän määritelmän mukaan on siis  $3a^2 - ab$  todellakin haettu osamäärä.

**Esim. 2.**  $(x^4 - 3x^3 - x^2 - 1) : (x^2 + 1)$

Jaettavasta, joka on neljännen asteen polynomi  $x$ :n suhteen, puuttuu ensimmäisen asteen jäsen. Selvyyden vuoksi on syytä jättää tyhjä paikka tällaisen puuttuvan jäsenen paikalle, kun jaettava kirjoitetaan jakoa varten.

$$\begin{array}{r|l}
x^4 - 3x^3 - x^2 & -1 \\
\mp x^4 & \mp x^2 \\
\hline
-3x^3 - 2x^2 & -1 \\
\pm 3x^3 & \pm 3x \\
\hline
-2x^2 + 3x - 1 & \\
\pm 2x^2 & \pm 2 \\
\hline
3x + 1 & 
\end{array}$$



Viimeksi saatu jakojäännös on jo alempaa astetta kuin jakaja. Jos jakoa vielä jatkettaisiin, olisi seuraava osamäärän jäsen  $3x^{-1}$ . Ja jatkettaisiinpa jakoa sitten kuinka kauan tahansa, ei koskaan saataisi jakojäännöstä, joka  $= 0$ . Tavallisesti pysähdytäänkin silloin, kun on saatu jakojäännös, joka on alempaa astetta kuin jakaja. Esimerkissämme on tällöin ilmeisesti

$$(x^4 - 3x^3 - x^2 - 1) - (x^2 - 3x - 2)(x^2 + 1) = 3x + 1$$

eli

$$x^4 - 3x^3 - x^2 - 1 = (x^2 - 3x - 2)(x^2 + 1) + (3x + 1)$$

joka sisältää kokonaislukujen jakolaskusta tutun säännön:

$$jaettava = "osamäärä" \times jakaja + jakojäännös$$

Sana "osamäärä" on pantu lainausmerkkeihin siitä syystä, että ei ole kysymyksessä osamäärä sanan varsinaisessa merkityksessä. Tämä saadaan, kun viimeksi kirjoitetun yhtälön molemmat puolet jaetaan jakajalla  $x^2 + 1$ :

$$\frac{x^4 - 3x^3 - x^2 - 1}{x^2 + 1} = x^2 - 3x + 2 + \frac{3x + 1}{x^2 + 1}$$

Siis *täydellinen* osamäärä saadaan, kun äskenmainittuun *vaillinaiseen* osamäärään lisätään jakojäännöksen ja jakajan osamäärä (vrt. esim.  $\frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}$  eli  $4 + \frac{2}{3}$ ).

Jos jakoa suoritettaessa saadaan jakojäännös 0, niin on tapana sanoa, että *jako menee tasan*. Esimerkissä 1 jako meni tasan, kun taas esimerkissä 2 jako ei mennyt tasan. (473–489)

## ENSIMMÄISEN ASTEEN YHTÄLÖT

### Yhtälön sieventäminen

#### 34 § Ensimmäisen asteen yhtälön ratkaiseminen

Jo 4 §:ssä oli alustavasti esillä yhtälöt ja monin paikoin I luvussa oli yhtälöiden ratkaisemista koskevia harjoitustehtäviä. Ratkaisemisessa nojauttiin erotuksen, osamäärän ja suhteen määritelmiin. Kun nyt on tutustuttu polynomeilla laskemiseen, voidaan ryhtyä perusteellisemmin käsittelemään yhtälöiden ratkaisemista.

Kahta (ehdollista) yhtälöä sanotaan *yhtäpitäviksi*, jos niillä on samat juuret. Kun yhtälöä ryhdytään ratkaisemaan, sitä ensin *sievennetään*, so. yhtälöstä johdetaan yhä yksinkertaisempia ja yksinkertaisempia alkuperäisen kanssa yhtäpitäviä yhtälöitä. Yhtälön sieventäminen perustuu seuraavaan lauseeseen, jonka oikeus on ilmeinen.

**Lause 1:** *Alkuperäisen yhtälön kanssa yhtäpitävä yhtälö saadaan*

1) *jos yhtälön molempiin puoliin lisätään tai niistä vähennetään sama luku,*

2) jos yhtälö, so. yhtälön molemmat puolet, kerrotaan tai jaetaan samalla luvulla ( $\neq 0$ ).

**Esim. 1.**  $2x^2 + 4x - 3 = 5 + 2x^2$

Tässä esiintyy molemmilla puolilla sama jäsen  $2x^2$ . Se poistuu yhtälöstä, kun molempiin puoliin lisätään  $-2x^2$ . Tällöin saadaan

$$4x - 3 = 5$$

Kun tämän yhtälön molempiin puoliin lisätään  $+3$ , häviää  $-3$  vasemmalta puolelta ja oikealle puolelle ilmestyy sen vastaluku  $+3$ :

$$4x = 5 + 3$$

eli

$$4x = 8$$

Jakamalla tämä yhtälö 4:llä tullaan yhtälöön

$$x = 2$$

joka siis on yhtäpitävä alkuperäisen yhtälön kanssa ja ilmaisee suoraan, että yhtälön ainoa juuri on 2.

Tarkistaaksemme, onko ratkaisu oikein suoritettu, sijoitamme alkuperäiseen yhtälöön  $x$ :n paikalle saadun juuren 2. Suorittamalla laskut havaitaan, että yhtälö muuttuu tällöin identtiseksi  $13 = 13$ , joten yhtälö todellakin toteutuu.

Esimerkissämme ed. lauseen kohdan 1) mukaisesti suoritettut kaksi ensimmäistä sievennystoimitusta voidaan pukea seuraavaan käytännölliseen muotoon:

**Lause 2:** *Alkuperäisen yhtälön kanssa yhtäpitävä yhtälö saadaan*

a) *jos yhtälön molemmilla puolilla esiintyvä sama jäsen poistetaan,*

b) *jos jäsen siirretään toiselta puolelta toiselle ja samalla muutetaan sen merkki.*

**Esim. 2.**  $\frac{x-7}{6} + 1 = \frac{1-x}{4}$

Ensimmäinen sievennystoimenpide tässä yhtälössä on *nimittäjien poistaminen*. Sitä varten kerrotaan yhtälön molemmat puolet jäsenittäin nimittäjien pienimmällä yhteisellä jaettavalla 12:lla:

$$\frac{12(x-7)}{6} + 12 = \frac{12(1-x)}{4}$$

Kun ensimmäisessä ja viimeisessä jäsenessä suoritetaan supistaminen, saadaan

$$2(x - 7) + 12 = 3(1 - x)$$

*Poistamalla sulkumerkit*, so. suorittamalla merkityt kertolaskut, saadaan tästä edelleen

$$2x - 14 + 12 = 3 - 3x$$

Kun kaikki  $x$ :n sisältävät jäsenet siirretään vasemmalle ja muut oikealle puolelle (lause 2 b), tullaan yhtälöön

$$2x + 3x = 3 + 14 - 12$$

*Yhdistämällä samanmuotoiset jäsenet* saadaan

$$5x = 5$$

Kun vielä *yhtälö jaetaan  $x$ :n kertoimella 5:llä*, päädytään alkuperäisen yhtälön kanssa yhtäpitävään yhtälöön

$$x = 1$$

joten yhtälö onkin ratkaistu.

Kun *tarkistuksen* vuoksi saatu juuri 1 sijoitetaan alkuperäiseen yhtälöön, muuttuu se identtiseksi  $0 = 0$ , joten yhtälö todellakin toteutuu.

Viimeksi käsitellyssä esimerkissä tulivat kysymykseen kaikki tavalliset sieventämistoimitukset:

- 1) *Nimittäjien poistaminen* (yhtälö kerrotaan nimittäjien pyj:lla).
- 2) *Sulkumerkkien poistaminen* (suoritetaan merkityt laskut).
- 3) *Jäsenten siirtäminen* (tuntemattoman sisältävät jäsenet vasemmalle ja muut oikealle puolelle).
- 4) *Samanmuotoisten jäsenten yhdistäminen*.

Näin sieventämällä saadaan yhtälö *normaalimuotoon*. Sen vasemmalla puolella olevan polynomin astetta tuntemattoman suhteen sanotaan yhtälön *asteeksi* eli *asteluvuksi*. Kaikki tähän asti ratkaistut yhtälöt ovat olleet ensimmäistä astetta. Esim.  $x^2 = 4$  on toisen asteen yhtälö. Sillä on kaksi juurta:  $x = 2$  ja  $x = -2$ . Toistaiseksi rajoitumme käsittelemään yksinomaan ensimmäisen asteen yhtälöitä.

*Ensimmäisen asteen yhtälön normaalimuoto on*

$$\mathbf{ax = b}$$

jossa  $a$  ja  $b$  merkitsevät tunnettuja lukuja, joista  $a \neq 0$ . Kun tämä yhtälö jaetaan  $a$ :lla, saadaan esille yhtälön juuri

$$\mathbf{x = \frac{b}{a}}$$

Tähän tulokseen päästään edellisestä yhtälöstä myös suoraan osamäärän määritelmän perusteella. Tulos osoittaa, että *ensimmäisen asteen yhtälöllä on aina yksi juuri*.

Jos yllä esitettyssä normaalimuotoisessa yhtälössä  $x$ :n kerroin  $a = 0$ , joten yhtälö on

$$0 = b$$

niin se ei ole enää ensimmäistä astetta vaan nollatta. Jos tällöin  $b \neq 0$ , niin viimeksi kirjoitettu yhtälö ja siis myös sen kanssa yhtäpitävä alkuperäinen yhtälö on mahdottomuus, eikä yhtälöllä niin ollen ole yhtään juurta. Jos sitä vastoin  $b = 0$ , niin on kysymyksessä identtinen yhtälö  $0 = 0$ , joten kaikki luvut ovat tämän ja siis myös alkuperäisen yhtälön juuria.

**Esim. 3.**  $5(x^2 + 1) - (x - 2)^2 = (2x + 1)^2$

Tästä saadaan ensin poistamalla sulkumerkit

$$5x^2 + 5 - x^2 + 4x - 4 = 4x^2 + 4x + 1$$

Kun sitten molemmilla puolilla esiintyvä sama jäsen  $4x$  poistetaan ja  $x$ :n sisältävät jäsenet siirretään vasemmalle puolelle ja muut oikealle puolelle, saadaan

$$5x^2 - x^2 - 4x^2 = 1 - 5 + 4$$

Yhdistämällä tässä samanmuotoiset jäsenet tullaan identtiseen yhtälöön

$$0 = 0$$

Alkuperäinenkin yhtälö on siis identtinen, joten kaikki luvut ovat sen juuria.

**Esim. 4.**  $x - a = \frac{a(x+1)}{2}$

Nimittäjän poistamiseksi yhtälö kerrotaan 2:lla ja samalla poistetaan sulkumerkit:

$$2x - 2a = ax + a$$

Tämän jälkeen siirretään  $x$ :n sisältävät jäsenet vasemmalle ja muut oikealle puolelle:

$$2x - ax = a + 2a$$

Kun nyt yhdistetään samanmuotoiset jäsenet, niin on huomattava, että vasenta puolta pidetään pelkän  $x$ :n polynomina (ks. 22 §), joten saadaan (23 §, lause 1)

$$(2 - a)x = 3a$$

Tämän ja siis myös alkuperäisen yhtälön juuri on

$$x = \frac{3a}{2 - a}$$

Kun  $a$ :lle annetaan mielivaltainen arvo, niin tästä saadaan vastaavan yhtälön juuri. Jos esimerkiksi  $a = 1$ , niin yhtälön juuri on

$$x = \frac{3 \cdot 1}{2 - 1} = 3$$

kun taas vastaava yhtälö on

$$x - 1 = \frac{x + 1}{2}$$

Poikkeuksen muodostaa kuitenkin arvo  $a = 2$ . Tällöin näet saadaan

$$x = \frac{3 \cdot 2}{2 - 2} = \frac{6}{0}$$

joka ei ole mikään luku. Tämä tulos on selitettävissä seuraavasti. Itse yhtälö on tällöin

$$x - 2 = x + 1$$

Kun sama jäsen  $x$  poistetaan molemmilta puolilta ja  $-2$  siirretään oikealle puolelle, tullaan mahdollottamaan yhtälöön  $0 = 3$ , joten yhtälöllä ei todellakaan ole mitään juurta.

**Esim. 5.**  $|4x + 7| = |x - 2|$

Kahden luvun itseisarvot ovat yhtäsuuret, kun luvut ovat joko yhtäsuuria tai toistensa vastalukuja. Siis annettu yhtälö toteutuu, kun jompikumpi seuraavasta kahdesta yhtälöstä on voimassa:

$$4x + 7 = x - 2$$

$$4x + 7 = -(x - 2)$$

Edellisen yhtälön juuri on  $x = -3$  ja ja jälkimmäisen  $x = -1$ . Nämä molemmat ovat niin ollen annettunkin yhtälön juuret.

Jos tarkistuksen vuoksi saadut juuret sijoitetaan alkuperäiseen yhtälöön, saadaan identtiset yhtälöt

$$|-5| = |-5| \text{ eli } 5 = 5 \text{ ja } |+3| = |-3| \text{ eli } 3 = 3$$

Ratkaisu on siis oikea.

(490–545)

### 35 § Sekalaisia probleemoja

Monenlaisia tehtäviä — *probleemoja* — voidaan ratkaista käyttämällä apuna yhtälöitä. Millä tavalla tämä tapahtuu, selviää seuraavassa käsiteltävistä esimerkeistä.

**Esim. 1.** Pullo ja korkki maksavat yhteensä 25 p. Pullo maksaa 20 p enemmän kuin korkki. Paljonko maksaa korkki?

Tähän vanhaan leikkisään kysymykseen saa tavallisesti vastauksen 5 p! Tutkimme, onko vastaus oikea, ratkaisemalla probleeman yhtälön avulla.

Olkoon kysytty korkin hinta  $x$  p. Pullon hinta on silloin  $x + 20$  p. Ja koska pullon ja korkin hinta yhteensä = 25 p, niin

$$(x + 20) + x = 25$$

Näin on muodostettu yhtälö, josta ratkaisemalla saadaan  $x$ :n arvo. Saamme ensin

$$2x = 5$$

joten  $x = 2\frac{1}{2}$  p. Ja niinhän onkin, kun asiaa tarkemmin ajattelee. Pullo maksaa näet tällöin  $2\frac{1}{2} + 20 = 22\frac{1}{2}$  p ja pullo ja korkki siis yhteensä  $22\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2} = 25$  p, kuten pitääkin.

**Esim. 2.** Henkilö lähti kävelemään maantietä nopeudella 6 km/t, ja 2 tuntia myöhemmin lähti samasta paikasta samaa tietä pitkin polkupyöräilijä ajaen 15 km/t. Kuinka kaukana ja kuinka pitkän ajan perästä pyöräilijä tavoitti jalkamiehen?

Pyöräilijä tavoittakoon jalkamiehen  $x$  tunnin kuluttua. Hän on tässä ajassa ajanut  $x \cdot 15 = 15x$  km. Koska jalkamies on ollut matkalla 2 t kauemmin eli  $x + 2$  t, hänen kulkemansa matka on  $(x + 2) \cdot 6 = 6(x + 2)$  km. Koska kumpikin on kulkenut saman matkan, niin on voimassa yhtälö

$$15x = 6(x + 2)$$

Tätä yhtälöä ratkaistaessa saadaan peräkkäin yhtälöt:

$$15x = 6x + 12$$

$$9x = 12$$

$$x = \frac{12}{9} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$$

Siis pyöräilijä sai jalkamiehen kiinni  $1\frac{1}{3}$  t eli 1 t 20 min kuluttua. Hän oli tässä ajassa ajanut  $1\frac{1}{3} \cdot 15 = \frac{4}{3} \cdot 5 = 20$  km. Siis pyöräilijä tavoitti jalkamiehen 20 km päässä ajettuaan 1 t 20 min.

**Esim. 3.** Luku 56 on jaettava kahteen osaan, jotka suhtautuvat toisiinsa kuten 3 : 5. Ratkaisemme tämän tehtävän kahdella eri tavalla:

1) Merkitään edellistä osaa  $x$ :llä, jolloin jälkimmäinen osa  $= 56 - x$ . Pitää siis olla voimassa verrannon

$$\frac{x}{56 - x} = \frac{3}{5}$$

Tästä yhtälöstä voidaan poistaa nimittäjät nojaamalla 17 §:n lauseeseen 1:

$$5x = 3(56 - x)$$

Ratkaisemalla tämä yhtälö saadaan  $x = 21$ . Koska  $56 - 21 = 35$ , niin haettavat osat ovat siis 21 ja 35.

Jos tarkistukseksi muodostetaan 21 : 35, niin supistamalla tätä suhdetta 7:llä havaitaan, että todellakin suhde  $= 3 : 5$ .

2) Sellaisia lukuja, jotka suhtautuvat toisiinsa kuten 3 : 5, ovat  $3x$  ja  $5x$ , olkoon  $x$  mikä luku tahansa. Nyt on määrättävä  $x$ :lle sellainen arvo, että osien summa  $= 56$ . Näin saadaan yhtälö

$$3x + 5x = 56$$

Tästä saadaan ratkaisemalla  $x = 7$ . Siis haettavat osat ovat  $3 \cdot 7 = 21$  ja  $5 \cdot 7 = 35$ .

**Esim. 4.** Luku  $k$  on jaettava kolmeen osaan, jotka suhtautuvat toisiinsa kuten  $a : b : c$ .

Tämä tehtävä voidaan ratkaista käyttämällä edellisen tehtävän jälkimmäistä ratkaisemiskeinoja.

Sellaisia lukuja, jotka suhtautuvat toisiinsa kuten  $a : b : c$  ovat  $ax$ ,  $bx$  ja  $cx$ , olkoon  $x$  mikä luku tahansa. Nyt on määrättävä  $x$ :lle sellainen arvo, että osien summa  $= k$ . Näin saadaan yhtälö

$$ax + bx + cx = k$$

Kun vasemmalla puolella olevan  $x$ :n polynomin jäsenet yhdistetään, saadaan

$$(a + b + c)x = k$$

josta edelleen

$$x = \frac{k}{a + b + c}$$

Kysytyt  $k$ :n osat saadaan kertomalla tämä vuorotellen  $a$ :lla,  $b$ :llä ja  $c$ :llä. Ne ovat siis

$$\frac{ak}{a + b + c} \quad \frac{bk}{a + b + c} \quad \frac{ck}{a + b + c}$$

Jos tarkistuksen vuoksi muodostetaan näiden lukujen suhteet ja supistetaan yhteisellä tekijällä  $\frac{k}{a + b + c}$ , niin saadaan todellakin  $a : b : c$ . Lukujen summaksi taas saadaan

$$\frac{ak + bk + ck}{a + b + c} = \frac{(a + b + c)k}{a + b + c} = k$$

kuten pitääkin.

Probleemaa ratkaistaessa yhtälön avulla tulevat siis kysymykseen seuraavat toimitukset:

1) *Tuntemattoman (x) valinta* (tuntemattomaksi on useimmiten mukavinta valita itse kysytty seikka, ei kuitenkaan aina (vrt. esim. 3 ja 4)).

2) *Yhtälön muodostaminen* (tuntemattoman ja tunnettujen lukujen avulla lasketaan probleemassa mainittuja seikkoja hyväksi käyttäen jokin asia kahdella eri tavalla ja kirjoitetaan tulokset yhtäsuuriksi).

3) *Yhtälön ratkaiseminen*

4) *Tarkistus* (yleensä on syytä tarkistaa, täyttääkö saatu tulos probleemassa asetetut ehdot, voidakseen varmistautua, että yhtälö on oikein muodostettu ja sen ratkaisu oikein suoritettu). (546–585)

### 36 § Prosenttilaskuja

Jos  $b$  on  $p$  %  $a$ :sta, toisin sanoen  $\frac{p}{100} a$ :sta, niin

$$b = \frac{pa}{100}$$

Kun tässä kaavassa esiintyvistä kolmesta kirjaimesta kaksi tunnetaan, niin kolmas voidaan laskea. *Prosenttiarvo*  $b$  saadaan suoraan kaavasta. *Prosenttiluvun*  $p$  ja *perusarvon*  $a$  laskemiseksi ratkaistaan yhtälö näiden kirjaimien suhteen. Nimittäjien poistamiseksi yhtälö kerrotaan 100:lla:

$$100b = pa$$

Tästä saadaankin sitten kaavat

$$p = \frac{100b}{a} \quad a = \frac{100b}{p}$$

**Esim. 1.** Kauppias antoi ostajalle 5 %:n alennuksen tavarann hinnasta. Mikä oli alennamaton hinta, jos ostaja maksoi tavarasta 11 mk 78 p?

Olkoon alennamaton hinta  $x$  p. Alennus on silloin  $\frac{5x}{100}$  p. Näin saamme yhtälön

$$x - \frac{5x}{100} = 1178$$

Tämän yhtälön juuri  $x = 1240$ . Siis alennamaton hinta oli 12 mk 40 p.

Tehtävä voidaan ratkaista seuraavallakin tavalla käyttämällä hyväksi edellä johdettua  $a$ :n kaavaa. Koska alennus oli 5 %, niin alennettu hinta  $b$  ( $= 1178$  p) on 95 % alennamattomasta hinnasta  $a$ . Mainitun kaavan mukaan saadaan suoraan

$$a = \frac{100 \cdot 1178}{95} = 1240$$

**Esim. 2.** Kuinka paljon on vettä lisättävä 16 kg:aan 12 % suolaliuosta, jotta liuos muuttuisi 10 %:ksi?

Olkoon lisättävä vesimäärä  $x$  kg. Liuosta tulee tällöin olemaan  $16 + x$  kg. Tässä on siis suolaa 10 % eli  $\frac{10(16 + x)}{100}$  kg. Koska alkuperäisessä liuoksessa oli suolaa 12 % eli  $\frac{12 \cdot 16}{100}$  kg ja suolamäärä on pysynyt muuttumattomana, niin on voimassa yhtälö

$$\frac{10(16 + x)}{100} = \frac{12 \cdot 16}{100}$$

Ratkaisemalla saadaan  $x = \frac{16}{5} = 3,2$ . Siis lisättävä vesimäärä on 3,2 kg.

**Esim. 3.** Eräänä vuonna nousi kahvin hinta  $p$  %. Kuinka monta prosenttia on perheen vähennettävä kahvin kulutusta, jotta kahvimenot pysyisivät ennallaan?

Oletetaan, että kahvikilon hinta on ollut  $a$  mk ja että perheen vuotuinen kahvin kulutus on ollut  $b$  kg. Tällöin ovat perheen vuotuiset kahvimenot olleet  $ba$  mk.

Kun sitten kahvin hinta nousee  $p$  %, niin uusi

$$\text{kilohinta} = \frac{(100+p)a}{100} \text{ mk}$$

Jos perhe vähentää kahvin kulutustaan  $x$  %, niin vuotuinen

$$\text{kahvin kulutus} = \frac{(100-x)b}{100} \text{ kg}$$

Tällöin ovat perheen vuotuiset kahvimenot

$$\frac{(100-x)b}{100} \cdot \frac{(100+p)a}{100} \text{ mk}$$

Jotta kahvimenot pysyisivät ennallaan, tulee siis olla voimassa yhtälön

$$\frac{(100-x)b}{100} \cdot \frac{(100+p)a}{100} = ba$$

Kun tämä yhtälö jaetaan  $b$ :llä ja  $a$ :lla, saadaan

$$\frac{100-x}{100} \cdot \frac{100+p}{100} = 1$$

Ratkaisemalla saadaan tästä

$$x = \frac{100p}{100+p}$$

joka on siis kysytty prosenttiluku.

$a$ :n ja  $b$ :n suuruudet eivät niin ollen vaikuta mitään tulokseen, mikä onkin ymmärrettävää ja minkä tehtävän sanamuotokin edellyttää. Jos tämä olisi otettu huomioon jo tehtävää ratkaisemaan ryhtyessä, niin olisi päästy hiukan yksinkertaisempaan laskuun seuraavasti.

Oletetaan, että kahvin kilohinta on ollut 100 mk ja vuotuinen kulutus 100 kg ja niin ollen vuotuiset kahvimenot

$$100 \cdot 100 \text{ mk} = 10\,000 \text{ mk}$$

Kun sitten kahvin hinta nousee  $p$  % ja kulutusta vähennetään  $x$  %, niin uusi kilohinta  $= 100 + p$  mk ja vuotuinen kulutus  $= 100 - x$  kg ja niin ollen vuotuiset kahvimenot

$$(100-x)(100+p) \text{ mk}$$

Jotta kahvimenot pysyisivät ennallaan, tulee siis olla voimassa yhtälön

$$(100-x)(100+p) = 10\,000$$

Ratkaisemalla saadaan tästä yhtälöstä sama tulos kuin edellä.

**(586–610)**

### 37 § Korko- ja diskonttolaskuja

Jos  $r$  on *korko*, jonka  $k$  mk:n *pääoma* tuottaa  $p$  %:n mukaan  $t$  v:ssä, niin on tunnetusti

$$(I) \quad r = \frac{kpt}{100}$$

Jos  $K$  on *kasvanut pääoma*, so. pääoma, joksi  $k$  mk kasvaa  $p$  %:n mukaan  $t$  v:ssä, niin on edelleen



$$(II) \quad K = k + \frac{kpt}{100}$$

Kummassakin kaavassa esiintyy neljä kirjainta. Jos kolme näistä tunnetaan, niin neljäs saadaan ratkaisemalla yhtälö sen suhteen.

**Esim.** Henkilö maksoi huhtik. 8 p:nä takaisin 1000 mk:n suuruisen lyhytaikaisen lainansa ja sille 6 %:n mukaan korkoa 12 mk 20 p. Milloin laina oli otettu?

Olkoon lainausaika  $x$  päivää  $= \frac{x}{360}$  vuotta.<sup>1</sup> Kaavan (I) mukaan saadaan yhtälö

$$12,20 = \frac{1000 \cdot 6 \cdot x}{100 \cdot 360}$$

Kun tämä yhtälö ratkaistaan, saadaan  $x = 73,2$ . Siis lainausaika oli 73 päivää  $= 2$  kk 13 päivää, joten laina oli otettu tammik. 25 p:nä. (611–618)

Oletetaan, että  $A$  on jäänyt  $B$ :lle velkaa  $K$  mk (esim. ostamistaan tavaroista) ja on sovittu siitä, että suoritus on tapahtuva  $t$  v:n (tavallisesti vuoden murto-osa) kuluttua *i l m a n k o r k o a*. Jos  $A$  sitten kuitenkin haluaa suorittaa velkansa heti, niin hänen ei tarvitse suorittaa velkaansa  $K$  mk täydellisenä, vaan tietty alennettu summa  $k$  mk, sillä saahan  $B$  tällöin saamistaan rahoista kysymyksessä olevan  $t$  v:n aikana tuloja esim. koron muodossa.  $K$ :ta sanotaan velan *tulevaksi arvoksi*,  $k$ :ta velan *nykyarvoksi* ja alennusta  $K - k$  *diskontoksi*. Viimeksimainitun laskemiseksi on olemassa kaksi hiukan eri tuloksiin johtavaa tapaa.

1) *Virallinen diskontto*. Jos lasketaan rahoille korkoa  $p$ , niin teoreettisesti ajatellen on  $k$  määrättävä niin suureksi, että se  $p$  %:n mukaan kasvaa  $t$  v:ssa  $K$  mk:ksi. Toisin sanoen  $k$  lasketaan yhtälöstä (II) ratkaisemalla se  $k$ :n suhteen. Näin saatavaa diskonttoa  $K - k$  sanotaan *viralliseksi diskontoksi*. Kun yhtälö (II) kirjoitetaan muotoon

$$(a) \quad K - k = \frac{kpt}{100}$$

niin nähdään, että *virallinen diskontto* = *velan nykyarvon  $k$  korko  $p$  %:n mukaan  $t$  v:ssa*.

2) *Kauppadiskontto*. Koska edellinen menettelytapa on hankala — pitäähän siinä  $k$ :n määrittämiseksi ratkaista yhtälö — niin käytännöllisessä liike-elämässä lasketaan diskontto yksinkertaisemmalla keinolla, joka johtaa melkein samaan lopputulokseen. Itse asiassa kaavaan (a) pannaan oikealle puolelle  $k$ :n paikalle  $K$  ja lasketaan siis diskontto  $K - k$ , jota nyt sanotaan *kauppadiskontoksi*, kaavasta

$$(b) \quad K - k = \frac{Kpt}{100}$$

Siis *kauppadiskontto* = *velan tulevan arvon  $K$  korko  $p$  %:n mukaan  $t$  v:ssa*.

Koska  $K > k$ , niin yhtälöiden (a) ja (b) oikeista puolista näkyy, että kauppadiskontto on aina hieman suurempi kuin virallinen diskontto. Mutta

---

<sup>1</sup>Koronlaskussa oletetaan joka kuukaudessa olevan 30 päivää ja siis vuodessa 360 päivää.

erotus on kuitenkin joka tapauksessa niin pieni verrattuna kysymyksessä oleviin summiin  $k$  ja  $K$ , että sillä ei ole mitään käytännöllistä merkitystä.

Kummassakin yhtälöstä (a) ja (b) esiintyy neljä kirjainta. Kun kolme näistä tunnetaan, niin neljäs saadaan ratkaisemalla asianomainen yhtälö tämän kirjaimen suhteen.

**Esim.** A. Aalto on ostanut B. Berneriltä tavaraa 2 400 mk:n arvosta, ja on sovittu siitä, että hinta suoritetaan 3 kk:n kuluttua ilman korkoa. Paljonko on Aallon suoritettava, jos hän maksaa tavarahan heti ja korkoa lasketaan 6 %:n mukaan?

1) Virallisen diskontton mukaan. Sijoittamalla yhtälöön (a)  $K = 2\,400$ ,  $p = 6$  ja  $t = \frac{3}{12}$  saadaan yhtälö

$$2\,400 - k = \frac{k \cdot 6 \cdot 3}{100 \cdot 12}$$

Ratkaisemalla tämä saadaan  $k = 2\,364,53$  mk. Tämä summa on siis Aallon heti suoritettava. Tällöin on

$$\text{virallinen diskontto} = 2\,400 \text{ mk} - 2\,364,53 \text{ mk} = 35,47 \text{ mk}$$

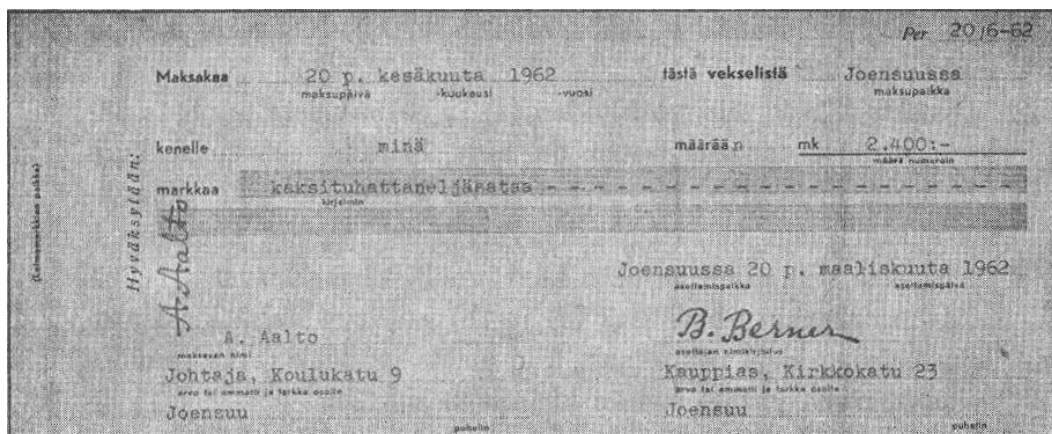
2) Kauppadiskontton mukaan. Kaavan (b) mukaan on

$$\text{kauppadiskontto} = 2\,400 - k = \frac{2\,400 \cdot 6 \cdot 3}{100 \cdot 12} = 36 \text{ mk}$$

$$\text{joten } k = 2\,400 \text{ mk} - 36 \text{ mk} = 2\,364 \text{ mk.}$$

Kauppadiskontto on siis 53 p suurempi kuin virallinen diskontto.

Käytännössä menetellään tavallisesti niin, että  $B$  asettaa  $A$ :n maksettavaksi  $t$  v:n kuluttua (ilman korkoa) erityiselle lomakkeelle kirjoitetun velkakirjan ns. *vekselin*, jonka  $A$  hyväksyy vekselin poikki kirjoittamallaan nimikirjoituksellaan. Jos nyt  $B$  haluaa rahat heti (ilman että  $A$  haluaa maksaa), niin hän myy vekselin esim. johonkin pankkiin, jolloin pankki antaa hänelle siitä vekselin nykyarvon eli ns. *diskontatun arvon*  $k$ , kun taas pankki määrääajan,  $t$  v:n, kuluttua saa  $A$ :lta vekselin tulevan eli *nimellisarvon*  $K$ .



Kuv. 4

*arvon*  $K$ . Vekselilaskuissa lasketaan diskontto kauppadiskontton mukaan ja käytetään siis kaavaa (b).

**Esim. 1.** Edellisessä esimerkissä puheena olleen kauppahinnan suoritus voidaan järjestää kuviossa 4 esitetyllä vekselillä. Jos Berner haluaa saada rahat heti, myy hän vekselin esim. pankkiin ja saa siis sieltä diskontatun arvon 2364 mk, edellyttäen että diskonttoprosentti on 6. 3 kk:n kuluttua on sitten Aallon maksettava pankkiin vekselin nimellisarvo 2400 mk.

**Esim. 2.** Helmik. 17 p:nä myytiin pankkiin ("diskontattiin") 5000 mk:n suuruinen vekseli, joka lankesi maksettavaksi toukok. 5 p:nä, ja saatiin siitä 4929 mk 58 p. Mikä oli diskonttoprosentti?

Merkitään kysyttyä diskonttoprosenttia  $x$ :llä. Aika helmik. 17 p:stä toukok. 5 p:ään on 78 p:ää. Kaavaan (b) sijoittamalla saadaan yhtälö

$$5\,000 - 4\,929,58 = \frac{5\,000 \cdot x \cdot 78}{100 \cdot 360}$$

josta laskuja suorittamalla saadaan ensin

$$70,42 = \frac{65x}{6}$$

ja sitten ratkaisemalla

$$x = \frac{6 \cdot 70,42}{65} = 6,5$$

Siis diskonttoprosentti oli 6,5.

(619–629)

### 38 § Arvopaperit (osakkeet ja obligaatiot)

Kun perustetaan osakeyhtiö, kootaan *osakepääoma*, jonka turvin yhtiö aloittaa toimintansa, "laskemalla liikkeelle", so. myymällä määrätyn hintaisia arvopapereita, *osakkeita*, joiden ostajat tulevat yhtiön omistajiksi, *osakkaiksi*. Osakas voi myydä osakkeitaan toisille. Riippuen ennen kaikkea yhtiön tuottaman voiton suuruudesta osakkeen myyntihinta eli *kurssi* voi paljonkin poiketa alkuperäisestä osakkeeseen merkitystä hinnasta, *nimellisarvosta*. Yhtiön vuosivoitosta jaetaan osakkeenomistajille *osinkoja*, joiden suuruus on yhtiökokouksen määräämä prosentti osakkeen *nimellisarvosta*.

(630–633)

Kun valtio, kunta tai suuri yhtiö haluaa suuren lainan, jota se ei voi saada yhdestä paikasta, se laskee liikkeelle suuren joukon *obligaatioita*, jotka ovat samalle summalle (obligaation *nimellisarvo*) kirjoitettuja velkakirjoja, joiden omistajille obligaatiolainan ottaja maksaa obligaatiossa määrätyn prosentin mukaista *nimellisarvosta* laskettua vuotuista korkoa. Obligaatioita voidaan myydä toiselle, ja *kurssi* ilmaisee tällöin, montako prosenttia myyntihinta on obligaation *nimellisarvosta*.

**Esim.** A oli ostanut 30 kpl 8 % obligaatioita kurssiin 105 ja maksanut niistä yhteensä 7875 mk. Kysytään:

- Mikä oli obligaatioiden nimellisarvo?
- Paljonko A sai obligaatioista vuosittain korkoa?
- Montako % A sai obligaatioihin sijoittamilleen rahoille vuotuista korkoa (oletetaan, että ensimmäinen obligaation koron maksu tapahtuu vuoden kuluttua oston jälkeen)?

Yhden obligaation ostohinta oli  $7875 : 30 = 262,5$  mk. Toiselta puolen, jos obligaation nimellisarvo on  $x$  mk, niin ostohinta oli 105 % tästä. Siis

$$\frac{105x}{100} = 262,5$$

Ratkaisemalla tämä yhtälö saadaan obligaation nimellisarvoksi  $x = 250$  mk.

Obligaatiosta maksettiin vuosittain korkoa 8 % nimellisarvosta eli

$$\frac{250 \cdot 8}{100} = 20 \text{ mk}$$

30 obligaation korko oli siis  $30 \cdot 20 = 600$  mk.

Jos  $A$  sai obligatioihin sijoittamilleen rahoille vuotuista korkoa  $x$  %, niin on voimassa yhtälö

$$\frac{7875x}{100} = 600$$

Ratkaisemalla saadaan tästä yhden desimaalin tarkkuudella  $x = 7,6$ , joka siis on kysytty prosenttiluku.

*Vastaus:* a) 250 mk b) 600 mk c) 7,6 %.

**(634–637)**

## POLYNOMIEN JAOLLISUUSOPPI

## 39 § Peruskäsitteitä

Kuten muistetaan, oli laskennossa murtoluvuilla laskettaessa kokonaislukujen jaollisuusopilla tärkeä sija. Samoin on meidän vastaavasti perehdyttävä polynomien jaollisuusoppiin, ennen kuin ryhdymme selvittämään laskujen suorittamista *murtolausekkeilla*, joiden osoittaja ja nimittäjä ovat polynomeja.

Jos jaettaessa polynomi toisella jako menee tasan, niin sanotaan, että edellinen polynomi on *jaollinen* jälkimmäisellä eli jälkimmäinen polynomi on edellisen tekijä.<sup>1</sup> Ensin mainittu polynomi voidaan tällöin esittää tämän tekijän ja jaossa osamääräksi saadun polynomin tulona. Jokainen polynomi on ilmeisesti jaollinen  $\pm 1$ :llä, itsellään ja vastapolynomillaan. Jos polynomi tämän lisäksi ei ole jaollinen millään muulla polynomilla, sitä sanotaan *jaottomaksi*. Päinvastaisessa tapauksessa polynomia sanotaan *jaolliseksi*. Sen jaotonta tekijää ( $\neq \pm 1$ ) sanotaan *alkutekijäksi*. Kun polynomi on esitetty alkutekijäin tulona, niin polynomi on ”jaettu alkutekijöihinsä”.

**Esim. 1.**  $x + y + z, a^2 + b^2, m$  ja 3 ovat jaottomia polynomeja.

**Esim. 2.** Polynomi  $ab + ac$  on jaollinen  $a$ :lla. Onhan näet

$$\frac{ab + ac}{a} = b + c$$

so. jako menee tasan. Osamäärän määritelmän mukaan on siis

$$ab + ac = a(b + c)$$

Koska oikealla puolella olevat tekijät ovat jaottomia, niin polynomi on näin jaettu alkutekijöihinsä.

## 40 § Polynomien jako alkutekijöihin

On kyllä olemassa yleisiä menetelmiä tämän tehtävän ratkaisemiseksi, mutta niillä on niiden hankaluuden takia pääasiassa vain teoreettinen merkitys. Käytännössä esiintyvissä tapauksissa yleensä selvittääinkin seuraavassa esitettäviä erikoismenetelmiä käyttäen.

<sup>1</sup>Kun jaollisuusopissa puhumme polynomista, niin tarkoitamme aina joidenkin kirjaimien polynomia, jonka kertoimet ovat kokonaislukuja (vrt. 22 §).

Kun ryhdytään jakamaan annettua polynomia alkutekijöihin, niin on *aina ensin tarkastettava, onko polynomin jäsenillä yhteinen tekijä* ( $\neq \pm 1$ ). Jos tällainen on, niin se erotetaan tekijäksi ja toiseksi tekijäksi kirjoitetaan tietenkin se polynomi, joka saadaan jakamalla annettu polynomi mainitulla yhteisellä tekijällä. Edellisessä §:ssä käsiteltiin jo yksi tällainen esimerkki (esim. 2).

**Esim. 1.**  $4x^3 - 8x^2y^2 + 6x^3y^2$ . Kun polynomin jäsenien yhteinen tekijä  $2x^2y$  erotetaan, saadaan  $2x^2y(2x - 4y + 3xy)$ . Näin on polynomi jaettu alkutekijöihinsä, jotka ovat siis 2,  $x$ ,  $y$  ja  $2x - 4y + 3xy$ .

**Esim. 2.**  $a(a + b) + 2(a + b)^2$ . Kun tämän binomin jäsenien yhteinen tekijä  $a + b$  erotetaan, saadaan

$$(a + b)[a + 2(a + b)] = (a + b)(3a + 2b)$$

Binomin alkutekijät ovat siis  $a + b$  ja  $3a + 2b$ .

(638–647)

Kun 29 §:n kaavoissa (I) ja (II) vasemmat ja oikeat puolet vaihdetaan keskenään, saadaan

$$\begin{aligned} a^2 + 2ab + b^2 &= (a + b)^2 \\ a^2 - 2ab + b^2 &= (a - b)^2 \end{aligned}$$

Näiden sisältö voidaan lausua sanallisesti seuraavasti:

**Lause 1:** *Jos trinomi on kahden luvun neliöiden summa lisättynä (vähennettynä) samojen lukujen kaksinkertaisella tulolla, niin trinomi = mainittujen lukujen summan (erotuksen) neliö.*

Tätä lausetta eli edellä olevia kaavoja hyväksi käyttäen voidaan trinomi usein jakaa tekijöihin.

**Esim. 3.**  $x^4 + 4x^2y + 4y^2 = (x^2)^2 + 2 \cdot x \cdot 2y + (2y)^2 = (x^2 + 2y)^2$

**Esim. 4.**  $3k^4 - 6k^3 + 3k^2$ . Tässä on jäsenillä yhteinen tekijä  $3k^2$ , joka täytyy ensin erottaa. Näin saadaan  $3k^2(k^2 - 2k + 1)$ . Viimeiseen tekijään voidaan nyt soveltaa edellinen lause, joten saadaan lopullisesti  $3k^2(k - 1)^2$ .

**Esim. 5.**  $2ab - a^2 - b^2$ . Tämän trinomin vastatrinomi on edellisen lauseen edellyttämää muotoa, jonka vuoksi menetellään seuraavasti:

$$2ab - a^2 - b^2 = -(-2ab + a^2 + b^2) = -(a - b)^2 \quad (648-660)$$

Kun 28 §:ssä esitettyssä kaavassa vasen ja oikea puoli vaihdetaan keskenään, saadaan

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

Sanoin voidaan tämän kaavan sisältö lausua seuraavasti:

**Lause 2:** *Jos binomi on kahden luvun neliöiden erotus, niin binomi = näiden lukujen erotuksen ja summan tulo.*

Tätä lausetta hyväksi käyttäen voidaan binomi usein jakaa tekijöihin.

**Esim. 6.**  $9x^2 - 1 = (3x)^2 - 1^2 = (3x - 1)(3x + 1)$

**Esim. 7.**  $2ax^6 - 8a^3x^2 = 2ax^2(x^4 - 4a^2)$   
 $= 2ax^2[(x^2)^2 - (2a)^2]$   
 $= 2ax^2(x^2 - 2a)(x^2 + 2a)$

Edelliseen lauseeseen nojaten voidaan aina hajoittaa kahden tekijän tuloksi muotoa  $a^n - b^n$  oleva binomi, kun  $n$  on parillinen luku. Jos erikoisesti  $n$  on luvun 2 potenssi, siis 2, 4, 8, 16 jne., niin binomi voidaan tätä lausetta hyväksi käyttäen jakaa alkutekijöihin (esim. 8).

**Esim. 8.**  $a^4 - b^4 = (a^2)^2 - (b^2)^2 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2)$   
 $a^4 - b^4$  on täten jaettu alkutekijöihin. On näet huomattava, että kaikki muotoa  $a^n + b^n$  olevat binomit ovat jaottomia, kun  $n$  on luvun 2 potenssi.

**Esim. 9.**  $a^6 - b^6 = (a^3)^2 - (b^3)^2 = (a^3 - b^3)(a^3 + b^3)$   
Molemmat saadun tulon tekijät ovat vielä jaollisia, kuten seuraavassa näemme (esim. 12).  
**(661–674)**

Harjoitustehtävän 386 mukaan on

$$\begin{aligned} a^3 - b^3 &= (a - b)(a^2 + ab + b^2) \\ a^5 - b^5 &= (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4) \end{aligned}$$

Tarkastelemalla näissä jälkimmäisen tekijän muotoa saamme aiheen otak-  
sua, että yleisesti on

$$(I) \quad a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

Tämä kaava samoin kuin sen äsken mainitut erikoistapaukset todistetaan oikeaksi yksinkertaisimmin suorittamalla oikealla puolella merkitty kertolasku ja toteamalla, että tuloksi saadaan vasemmalla puolella oleva binomi:

$$\begin{array}{r} a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1} \\ a - b \\ \hline a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \dots + ab^{n-1} \\ - a^{n-1}b - a^{n-2}b^2 - \dots - ab^{n-1} - b^n \\ \hline a^n \qquad \qquad \qquad -b^n \end{array}$$

Todistetun kaavan perusteella voidaan kirjoittaa

**Lause 3:**  $a^n - b^n$  on jaollinen  $(a - b)$ :llä  $a$  i  $n$  a.

Jos  $n$  on pariton luku ja edelliseen kaavaan sijoitetaan  $b$ :n paikalle  $-b$ , saadaan kaava (ks. 18 §, lause 1):

$$(II) \quad a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots - ab^{n-2} + b^{n-1})$$

Kaavan oikealla puolella toisena tekijänä olevan polynomin merkit ovat vuorotellen  $+$  ja  $-$ . Tämän kaavan perusteella voidaan kirjoittaa

**Lause 4:**  $a^n + b^n$  on jaollinen  $(a + b)$ :llä, jos  $n$  on pariton luku.

Jos  $n$  on pariton alkuluku, niin kaavat (I) ja (II) esittävät binomeja  $a^n - b^n$  ja  $a^n + b^n$  alkutekijöihin jaettuna, minkä todistaminen jätetään suorittamatta. Jos sitä vastoin  $n$  on pariton yhdistetty luku, so. jaollinen,

niin jälkimmäiset tekijät ovat jaollisia. Binomin alkutekijöihin jakamisen tällaisissa tapauksissa jätämme käsittelemättä.

Ko. kaavojen muistaminen on kylläkin hyödyllistä, mutta ei välttämätöntä. Voidaanhan näet toinen tekijä kulloinkin esillä olevassa tapauksessa muodostaa jakamalla binomi  $a^n - b^n$  tai  $a^n + b^n$  vastaavasti  $(a-b)$ :llä tai  $(a+b)$ :llä, jolloin osamääräksi saadaan tuo tekijä (vrt. harj.teht. 480—482).

**Esim. 10.**  $x^3 + 8 = x^3 + 2^3 = (x+2)(x^2 - x \cdot 2 + 2^2) = (x+2)(x^2 - 2x + 4)$

**Esim. 11.**  $x^6 - x = x(x^5 - 1^5) = x(x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$

**Esim. 12.** Esimerkissä 9 saatiin lausetta 2 hyväksi käyttäen

$$a^6 - b^6 = (a^3 - b^3)(a^3 + b^3)$$

Kun oikealla puolella olevat tekijät jaetaan edelleen tekijöihin lauseita 3 ja 4 tai vastaavia kaavoja hyväksi käyttäen, saadaan  $a^6 - b^6$  jaetuksi alkutekijöihin:

$$a^6 - b^6 = (a-b)(a+b)(a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2) \quad (675-686)$$

Joskus voidaan menetellä siten, että polynomin jäsenet ensin sopivasti ryhmitellään ja jaetaan ryhmät ensin tekijöihin ja näin saatuun summaan sovelletaan jokin edellä puheena olleista keinoista.

**Esim. 13.**  $x^3 + x^2 + x + 1 = (x^3 + x^2) + (x + 1) = x^2(x+1) + (x+1)$ . Tämän summan molemmilla yhteenlaskettavilla on yhteinen tekijä  $x+1$ . Kun se erotetaan tekijäksi, saadaan  $(x+1)(x^2 + 1)$ .

**Esim. 14.**  $a^2 - b^2 - c^2 + 2bc = a^2 - (b^2 + c^2 - 2bc) = a^2 - (b-c)^2$   
 $= [a - (b-c)][a + (b-c)] = (a-b+c)(a+b-c)$

**Esim. 15.**  $a^2 - b^2 + ac + bc = (a^2 - b^2) + (ac + bc) = (a-b)(a+b) + c(a+b)$   
 $= (a+b)(a-b+c) \quad (687-697)$

## 41 § Pienin yhteinen jaettava

Polynomien *pienintä yhteistä jaettavaa* (pyj.) ei voida määritellä samalla tavalla kuin laskennossa tehtiin kokonaislukuihin nähden, koska polynomeja ei voida verrata toisiinsa suuruuden puolesta. Sen sijaan määritellään seuraavasti — näin olisi voitu laskennossakin tehdä

**Määritelmä:** *Polynomien pyj. on polynomi, joka voidaan jakaa tasan ko. polynomeilla ja jolla on mahdollisimman vähän alkutekijöitä.*

Polynomien pyj. haetaan samalla tavalla kuin kokonaislukujen. Siis polynomit jaetaan alkutekijöihinsä ja muodostetaan sitten tulo, jonka tekijöiksi otetaan kutakin alkutekijää niin monta kuin sitä esiintyy siinä polynomissa, jossa sitä on eniten.

**Esim. 1.** Haettava monomien  $12a^3b$  ja  $8a^2b^3c$  pyj.

$$\begin{array}{l} 12a^3b = 2^2 \cdot 3a^3b \\ 8a^2b^3c = 2^3a^2b^3c \\ \hline \text{pyj.} = 2^3 \cdot 3a^3b^3c = 24a^3b^3c \end{array}$$



**Esim. 2.** Haettava polynomien  $x^4 - x^2$ ,  $-x^3 + 2x^2 - x$  ja  $3x^5 - 3x^2$  pyj.

$$\begin{aligned} x^4 - x^2 &= x^2(x^2 - 1) = x^2(x - 1)(x + 1) \\ -x^3 + 2x^2 - x &= -x(x^2 - 2x + 1) = -x(x - 1)^2 \\ 3x^5 - 3x^2 &= 3x^2(x^3 - 1) = 3x^2(x - 1)(x^2 + x + 1) \\ \text{pyj.} &= 3x^2(x - 1)^2(x + 1)(x^2 + x + 1) \end{aligned} \quad (698-718)$$

## MURTOLAUSEKKEILLA LASKEMINEN

### 42 § Supistaminen

Murtolauseketta supistetaan (ks. 16 §) osoittajan ja nimittäjän yhteisellä tekijällä,<sup>1</sup> mikä merkitsee sitä, että osoittaja ja nimittäjä jaetaan tällä tekijällä, toisin sanoen tämä tekijä poistetaan osoittajasta ja nimittäjästä. Yleensä on tarpeellista ennen supistamista jakaa osoittaja ja nimittäjä alkutekijöihin, ellei niin ole jo valmiiksi tehty.

**Esim. 1.**  $\frac{6a^2b^4c^2}{8a^3bc^2} = \frac{3b3}{4a}$

Tässä on supistettu osoittajan ja nimittäjän yhteisillä tekijöillä 2,  $a^2$ ,  $b$  ja  $c^2$ .

**Esim. 2.**  $\frac{ax - ay}{x^2 - y^2} = \frac{a(x - y)}{(x - y)(x + y)} = \frac{a}{x + y}$ . Supistettu on siis  $(x - y)$ :llä.

Supistaminen ja yleensä murtolausekkeiden sieventämisen ja niillä laskemisen yhteydessä joudutaan usein käyttämään hyväksi seuraavaa lausetta, joka on välitön seuraus 14 §:n lauseesta 2:

**Lause:** *Murtolausekkeen arvo jää muuttumatta,*

1) *jos muutetaan osoittajan  $t$  a i nimittäjän merkki ja samalla myös itse murtolausekkeen merkki,*

2) *jos muutetaan  $s$  e k ä osoittajan e t t ä nimittäjän merkki.*

**Esim. 1.**  $-\frac{-x^2 - x + 1}{2} = \frac{x^2 + x - 1}{2}$

On huomattava, että koska tässä osoittaja on polynomi, niin sen merkin muuttaminen tapahtui siten, että muutettiin polynomin *k a i k k i e n* jäsenien merkit.

**Esim. 2.**  $\frac{a(a - b)}{b(b - a)} = -\frac{a(a - b)}{b(a - b)} = -\frac{a}{b}$

Tässä on ennen supistamista pantu nimittäjässä tekijän  $b - a$  paikalle sen vastaluku  $a - b$ , jolloin nimittäjän merkki on muuttunut, ja tämän takia on murtolausekkeen eteen pantu  $-$ merkki. (719-735)

---

<sup>1</sup>V a r o i t u s: Esim. murtolauseketta  $\frac{ab + c}{ac}$  ei saa "supistaa"  $a$ :lla eikä  $c$ :llä, sillä nämä ovat kylläkin nimittäjän *t e k i j ö i t ä*, mutta eivät osoittajan.  $a$  on vain osoittajan *y h t e e n l a s k e t t a v a n* tekijä ja  $c$  on osoittajan *y h t e e n l a s k e t t a v a*

### 43 § Yhteen- ja vähennyslasku

Murtolausekkeiden yhteenlasku suoritetaan kuten murtolukujen (ks. 16 §). Jos yhteenlaskettavat murtolausekkeet ovat *erinimisiä*, niin ne tehdään ensin *samannimisiksi*. *Yhteiseksi nimittäjäksi* valitaan nimittäjien pyj., ja kukin murtolauseke lavennetaan sitten sillä osamäärällä, joka saadaan, kun yhteinen nimittäjä jaetaan murtolausekkeen omalla nimittäjällä. Tämän jälkeen osoittajat lasketaan yhteen ja summa pannaan osoittajaksi sekä yhteinen nimittäjä nimittäjäksi. Lopuksi näin saatu murtolauseke supistetaan — mikäli mahdollista.

Jos on kysymyksessä murtolausekkeiden vähennyslasku tai yleensä polynomi, jonka jäsenet ovat murtolausekkeitä, joiden etumerkkien joukossa esiintyy myös  $-$ merkkejä, niin sitten kun murtolausekkeet on tehty samannimisiksi, ” $-$ merkit siirretään murtolausekkeiden edestä osoittajiin”, so. muutetaan  $-$ merkillä varustettujen murtolausekkeiden ja niiden osoittajien merkit (ed§, lause). Tämän jälkeen suoritetaan osoittajien yhteenlasku.

$$\text{Esim. 1. } \frac{a}{b} - \frac{b}{a} + 1 = \frac{a^2}{ab} - \frac{b^2}{ab} + \frac{ab}{ab} = \frac{a^2 - b^2 + ab}{ab}$$

Tavallisesti kirjoitetaan kolmas lauseke heti ensimmäisen jäljestä, so. suoritetaan samalla kertaa samannimisiksi teko,  $-$ merkkien siirto ja osoittajien yhteenlasku (vrt. seur. esimerkkejä).

$$\begin{aligned} \text{Esim. 2. } \frac{3x-4a}{6a^2} - \frac{2x-a}{4a^2} - \frac{1}{3a} &= \frac{2(3x-4a) - 3(2x-a) - 4a}{12a^2} \\ &= \frac{6x-8a-6x+3a-4a}{12a^2} = \frac{-9a}{12a^2} = -\frac{3}{4a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Esim. 3. } \frac{3x-1}{x^2-1} - \frac{2x-1}{x^2-x} &= \frac{3x-1}{(x-1)(x+1)} - \frac{2x-1}{x(x-1)} \\ &= \frac{x(3x-1) - (x+1)(2x-1)}{x(x-1)(x+1)} = \frac{3x^2 - x - 2x^2 + x - 2x + 1}{x(x-1)(x+1)} \\ &= \frac{x^2 - 2x + 1}{x(x-1)(x+1)} = \frac{(x-1)^2}{x(x-1)(x+1)} = \frac{x-1}{x(x+1)} = \frac{x-1}{x^2+x} \quad (736-762) \end{aligned}$$

### 44 § Kerto- ja jakolasku

Kuten 16 §:ssä näytettiin, murtolausekkeiden kertominen ja jakaminen suoritetaan niin kuin laskennon murtolukuopissa, siis kertolaskussa osoittajat kerrotaan keskenään ja nimittäjät keskenään ja jakolaskussa jaettava ja jakajan käänteisluku kerrotaan keskenään. On muistettava ennen kertomisten suorittamista supistaa — mikäli mahdollista.

$$\text{Esim. 1. } \frac{4a^2}{b^2c} \cdot \frac{ab}{6c} = \frac{4a^2 \cdot ab}{b^2c \cdot 6c} = \frac{2a^3}{3bc^2}$$

$$\text{Esim. 2. } (x+y) \cdot \frac{2y}{x} \cdot \frac{x^2}{x^2-y^2} = \frac{(x+y) \cdot 2y \cdot x^2}{x(x-y)(x+y)} = \frac{2xy}{x-y}$$

$$\begin{aligned}\text{Esim. 3. } \frac{ab-b}{3a^2} : \frac{1-a^2}{6ab} &= \frac{b(a-1)}{3a^2} \cdot \frac{6ab}{(1-a)(1+a)} \\ &= -\frac{b(1-a) \cdot 6ab}{3a^2 \cdot (1-a)(1+a)} = -\frac{2b^2}{a(1+a)} = -\frac{2b^2}{a+a^2}\end{aligned}\quad (763-779)$$

## 45 § Rationaalisten lausekkeiden sieventäminen

Jokaista lauseketta, joka saadaan toimittamalla numeroluvuilla ja kirjaimilla yhteen-, vähennys, kerto- ja jakolaskuja, sanotaan (näiden kirjaimien) *rationaaliseksi lausekkeeksi*. Edellä esitettyjä laskumenetelmiä käyttäen voidaan tällainen lauseke aina saattaa kysymyksessä olevien kirjaimien polynomin muotoon tai kahden polynomin osamäärän muotoon. Lausekkeen saatamista tällaiseen tai johonkin muuhun yksinkertaiseen muotoon sanotaan lausekkeen *sieventämiseksi*. Joskus voidaan katsoa makuasiaksi, mitä lausekkeen yksinkertaisimmista muodoista on pidettävä ”sievimpänä”.

**Esim. 1.** Jos rationaalista lauseketta sievennettäessä on saatu tulokseksi  $(x+1)^3$  eli  $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ , niin edellistä pidetään sievimpänä, se kun ensiksikin on lyhyempi ja toiseksi siitä näkyy lausekkeen erikoisominaisuus, kuutiomuoto. Vastaavista syistä, joskaan ei enää yhtä painavasti, pidetään lauseketta  $(x-1)^2$  sievimpänä kuin trinomia  $x^2 - 2x + 1$ .

**Esim. 2.** Makuasia on, kumpaa lausekkeista

$$\frac{x+1}{x} \text{ ja } 1 + \frac{1}{x}$$

pidetään sievimpänä.

**Esim. 3.** Kun rationaalista lauseketta

$$\frac{a+b}{a-b} - 4 \left( 1 - \frac{a}{a+b} \right) \left( 1 + \frac{b}{a-b} \right)$$

sievennetään toimittamalla merkityt laskut asianmukaisessa järjestyksessä, saadaan peräkkäin:

$$\begin{aligned}&= \frac{a+b}{a-b} - 4 \cdot \frac{a+b-a}{a+b} \cdot \frac{a-b+b}{a-b} \\&= \frac{a+b}{a-b} - \frac{4ab}{(a+b)(a-b)} = \frac{(a+b)^2 - 4ab}{(a+b)(a-b)} \\&= \frac{a^2 + 2ab + b^2 - 4ab}{(a+b)(a-b)} = \frac{a^2 - 2ab + b^2}{(a+b)(a-b)} \\&= \frac{(a-b)^2}{(a+b)(a-b)} = \frac{a-b}{a+b}\end{aligned}\quad (780-800)$$

## ENSIMMÄISEN ASTEEN YHTÄLÖT (jatkoa)

### 46 § Nimittäjien poistaminen

Käsitlemme nyt nimittäjien poistamista yhtälöstä, kun nimittäjinä esiintyy tuntemattoman ja tunnettujen kirjaimien polynomeja. Nimittäjät

poistetaan tällöin periaatteessa samalla tavalla kuin nimittäjien ollessa numerolukuja (34 §, esim. 2): kerrotaan yhtälö nimittäjien pyj:lla, jolloin nimittäjät supistuvat pois.

**Esim. 1.** 
$$\frac{3}{2x+4} - \frac{5x-7}{x^2-4} + \frac{7}{2x} = 0$$

Jaetaan ensin nimittäjät alkutekijöihin:

$$\frac{3}{2(x+2)} - \frac{5x-7}{(x-2)(x+2)} + \frac{7}{2x} = 0$$

Nimittäjien pyj. =  $2x(x-2)(x+2)$ . Kerrotaan tällä yhtälö jäsenittäin ja suoritetaan samalla murtolausekkeiden supistamiset:

$$3x(x-2) - 2x(5x-7) + 7(x-2)(x+2) = 0$$

Kun poistetaan sulkumerkit, saadaan ensin

$$3x^2 - 6x - 10x^2 + 14x + 7x^2 - 28 = 0$$

ja sitten edelleen yhdistämällä samanmuotoiset jäsenet ja siirtämällä tunnettu jäsen oikealle puolelle:

$$8x = 28$$

Siis

$$x = \frac{28}{8} = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}$$

Yhtälön juuri on niin ollen  $x = 3\frac{1}{2}$ .

Jos tarkistuksen vuoksi saatu juuri sijoitetaan yhtälöön, havaitaan, että se toteutuu.

**Esim. 2.** 
$$\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} = \frac{3x+1}{x^2-1}$$

Kun yhtälö kerrotaan nimittäjien pyj:lla  $(x-1)(x+1)$ , niin nimittäjät supistuvat pois:

$$(x+1)^2 - (x-1)^2 = 3x+1$$

Suorittamalla vasemmalla puolella laskut saadaan

$$4x = 3x+1$$

Tämän yhtälön juuri on  $x = 1$ .

Kun saatu  $x$ :n arvo sijoitetaan alkuperäiseen yhtälöön, havaitaan, että yhtälö ei toteudukaan. Sen ensimmäisen ja viimeisen jäsenen nimittäjät tulevat näet  $= 0$  eikä näillä jäsenillä ole mitään arvoa.

Tällainen tapaus, jossa yhtälöllä ei ole juurta, tulee siis kysymykseen silloin, kun saadulla  $x$ :n arvolla jokin yhtälön nimittäjä  $= 0$ .<sup>1</sup> Toisenlainen tapaus, jossa myöskään yhtälöllä ei ole juurta, esiintyy silloin, kun yhtälöä sievennettäessä siitä häviää tuntematon ja päädytään mahdottomaan yhtälöön: kaksi erisuurta lukua ovat yhtäsuuria (ks. harj.teht. 504 ja 526 sekä 34 §, esim. 4). (801–837)

---

<sup>1</sup>Tällöin on myös nimittäjien pyj.  $= 0$ , joten nimittäjiä poistettaessa yhtälö tulee kerrotuksi 0:lla. Näin on selitettävissä se, että ko. laatuinen  $x$ :n arvo voi toteuttaa loppuyhtälön, vaikka ei toteutakaan alkuperäistä yhtälöä.

## 47 § Yhtälöpari ja kaksi tuntematonta

Jos tarkastellaan ensimmäisen asteen yhtälöä, jossa on kaksi tuntematonta  $x$  ja  $y$ , esim.

$$3x - 2y = 6$$

niin havaitaan, että sillä on äärettömän monta juuriparia. Itse asiassa, jos yhtälöön sijoitetaan esim.  $x$ :lle mikä arvo tahansa, niin ratkaisemalla saatu yhtälö  $y$ :n suhteen saadaan aina  $y$  määräytyksi niin, että yhtälö toteutuu.

Jos sitä vastoin vaaditaan, että samojen tuntemattomien arvojen on toteutettava edellisen lisäksi jokin toinenkin ensimmäisen asteen yhtälö, esim.

$$4x + 2y = 1$$

niin saadaan yleensä tuntemattomille täysin määrätyt arvot. Tällöin on kysymyksessä *yhtälöpari*

$$(1) \quad \begin{cases} 3x - 2y = 6 \\ 4x + 2y = 1 \end{cases}$$

Tämän yhtälöparin ratkaiseminen tapahtuu siten, että ensin *eliminoidaan* toinen tuntematon, millä tarkoitetaan sitä, että yhtälöistä johdetaan sellainen uusi yhtälö, josta puuttuu mainittu tuntematon. Esimerkissämme saadaan  $y$  eliminoiduksi yksinkertaisesti siten, että yhtälöiden vasemmat puolet lasketaan yhteen ja samoin oikeat eli, kuten lyhyesti sanotaan, *yhtälöt lasketaan yhteen*. Saadaanhan näin:

$$7x = 7$$

Tämä yhtälö ja kumpi tahansa alkuperäisestä yhtälöistä, esim. edellinen, muodostavat yhtälöparin

$$(2) \quad \begin{cases} 3x - 2y = 6 \\ 7x = 7 \end{cases}$$

joka on yhtäpitävä alkuperäisen yhtälöparin (1) kanssa, so. molemmilla yhtälöpareilla on samat juuret. Näillä yhtälöpareilla on näet ensiksikin ensimmäiset yhtälöt samat. Edelleen yhtälöparin (2) jälkimmäinen yhtälö, joka on yhtälöiden (1) summa, toteutuu, jos yhtälöt (1) ovat voimassa. Ja samoin yhtälöparin (1) jälkimmäinen yhtälö toteutuu, jos yhtälöpari (2) on voimassa, sillä mainittu yhtälö saadaan vähentämällä yhtälöparin (2) jälkimmäisestä yhtälöstä edellinen.

Yhtälöpari (2) on nyt helppo ratkaista. Jälkimmäisestä yhtälöstä, jossa on vain yksi tuntematon, saadaan  $x = 1$ . Kun tämä sijoitetaan edelliseen yhtälöön, saadaan yhtälö

$$3 - 2y = 6$$

ja tästä edelleen ratkaisemalla  $y = -1\frac{1}{2}$ . Siis yhtälöparin (2) ja niin ollen yhtälöparin (1) ainoa ratkaisu on  $x = 1, y = -1\frac{1}{2}$ .

**Esim. 2.** 
$$\begin{cases} 5x + 6y = 7 \\ 7x + 4y = 12 \end{cases}$$

Yhtälöpari (1) oli sikäli erikoinen, että  $y$ :n kertoimet olivat yhtälöissä toistensa vastalukuja. Tämän erikoisuuden takia saatiin  $y$  eliminoiduksi laskemalla yhtälöt yhteen. Jotta nytkin voisimme menetellä samoin, kerromme annetut yhtälöt sellaisilla luvuilla, että uudessa yhtälöparissa  $y$ :n kertoimet tulevat toistensa vastaluvuiksi. Näin tapahtuu, kun esim. edellinen yhtälö kerrotaan  $-2$ :lla ja jälkimmäinen  $3$ :lla. Tällöin saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases} -10x - 12y = -14 \\ 21x + 12y = 36 \end{cases}$$

joka ilmeisesti on yhtäpitävä alkuperäisen parin kanssa.<sup>1</sup> Kun nyt nämä yhtälöt lasketaan yhteen, saadaan

$$11x = 22$$

josta seuraa  $x = 2$ . Sijoitetaan tämä  $x$ :n paikalle alkuperäisen yhtälöparin ensimmäiseen yhtälöön, joka on yhtäpitävä uuden yhtälöparin ensimmäisen yhtälön kanssa. Näin saadaan yhtälö

$$10 + 6y = 7$$

josta ratkaisemalla tulee  $y = -\frac{1}{2}$ . Siis alkuperäisen yhtälöparin ratkaisu on  $x = 2, y = -\frac{1}{2}$ .

Viimeksi käsitellyn yhtälöparin ratkaiseminen voidaan järjestää käytännöllisesti seuraavasti.

$$\begin{array}{rcl} \begin{cases} 5x + 6y = 7 \\ 7x + 4y = 12 \end{cases} & \left| \begin{array}{l} -2 \\ 3 \end{array} \right. & \\ \hline \begin{cases} -10x - 12y = -14 \\ 21x + 12y = 36 \end{cases} & & \\ \hline 11x & = & 22 \\ x & = & \frac{22}{11} = 2 \\ 5 \cdot 2 + 6y & = & 7 \\ 6y & = & -3 \\ y & = & -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2} \end{array}$$

Alkuperäisen yhtälöparin perään on merkitty pystyviivan taakse ne luvut, joilla yhtälöt on kerrottu  $y$ :n eliminoimista varten.

Edellä selitettyä eliminoimismenetelmää sanotaan *yhteenlaskukeinoksi*. Välistä on mukavaa käyttää ns. *sijoituskeinoa*, jolla tarkoitetaan sitä, että

---

<sup>1</sup>Ne luvut, joilla alkuperäiset yhtälöt on kerrottava, ovat ne osamäärät, jotka saadaan, kun  $y$ :n kertoimien pyj. jaetaan kertoimilla. Kun lisäksi näin määrättyjen kertojen etumerkit valitaan sopivasti, tulee täten uuteen yhtälöpariin  $y$ :n kertoimiksi mainittu pyj. ja sen vastaluku. Menettely muistuttaa siis suuresti murtolukujen tekemistä samannimisiksi.

toinen yhtälö ratkaistaan toisen tuntemattoman suhteen ja saatu arvo sijoitetaan tämän tuntemattoman paikalle toiseen yhtälöön. Näin saadaan yhtälö, jossa on vain yksi tuntematon. Tämä keino on suositeltava erikoisesti silloin, kun toinen yhtälö on jo valmiiksi ratkaistu toisen tuntemattoman suhteen.

**Esim. 3.** 
$$\begin{cases} 3x + 2y = 12 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$$

Kun jälkimmäisen yhtälön ilmaisema  $y$ :n arvo sijoitetaan  $y$ :n paikalle edelliseen yhtälöön, saadaan

$$3x + 2(2x - 1) = 12$$

josta edelleen ratkaisemalla tulee  $x = 2$ . Kun tämä sitten sijoitetaan toiseen annettuista yhtälöistä, saadaan  $y = 3$ . Siis juuripari on  $x = 2, y = 3$ . (838–861)

**Esim. 4.** 
$$\begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 1 \\ \frac{x}{b} - \frac{y}{a} = 1 \end{cases}$$

Ensin poistetaan nimittäjät kertomalla kumpikin yhtälö tulolla  $ab$ . Sitten eliminoidaan  $y$ . Lasku muodostuu seuraavaksi.

$$\begin{aligned} (A) \quad & \begin{cases} bx - ay = ab \\ ax - by = ab \end{cases} \quad \left| \begin{array}{r} -b \\ a \end{array} \right| \begin{array}{r} -a \\ b \end{array} \\ & \begin{cases} -b^2x + aby = -ab^2 \\ a^2x - aby = a^2b \end{cases} \\ & \hline & (a^2 - b^2)x = a^2b - ab^2 \\ & x = \frac{a^2b - ab^2}{a^2 - b^2} = \frac{ab(a - b)}{(a - b)(a + b)} = \frac{ab}{a + b} \end{aligned}$$

Kun saatu  $x$ :n arvo sijoitettaisiin johonkin edellisistä yhtälöistä, saataisiin siitä ratkaisemalla  $y$ :n arvo. Tätä menettelytapaa käytettiin edellisissä esimerkeissä. Nyt on kenties mukavampaa määrätä  $y$ :n arvo vastaavalla tavalla kuin äsken  $x$ , siis eliminoimalla  $x$  yhtälöparista (A). Yhtälöparin viereen, toisen pystyviivan taakse, on merkitty ne luvut, joilla yhtälöt eliminoimista varten kerrotaan. Lasku muodostuu seuraavaksi.

$$\begin{aligned} & \begin{cases} -abx + a^2y = -a^2b \\ abx - b^2y = ab^2 \end{cases} \\ & \hline & (a^2 - b^2)y = -a^2b + ab^2 \\ & y = \frac{-a^2b + ab^2}{a^2 - b^2} = \frac{-ab(a - b)}{(a - b)(a + b)} = -\frac{ab}{a + b} \end{aligned}$$

Yhtälöparin ratkaisu on siis  $x = \frac{ab}{a + b}, y = -\frac{ab}{a + b}$  (862–869)

## 48 § Probleemoja

Kun probleemoja ratkaistaessa käytetään kahta tuntematonta, tulee muodostaa kaksi yhtälöä, jotka tuntemattomat toteuttavat. Tämä yhtälöpari on sitten ratkaistava.

**Esim. 1.** Mikä on se kaksinumeroinen luku, jolla on sellainen ominaisuus, että kun se jaetaan 6:lla, saadaan sen numeroiden summa, ja kun siitä vähennetään 9, saadaan luku, jolla on samat numerot, mutta päinvastaisessa järjestyksessä?

Olkoon kymmenien numero  $x$  ja ykkösten  $y$ . Siis itse luku on  $10x+y$ . Saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases} \frac{10x+y}{6} = x+y \\ 10x+y-9 = 10y+x \end{cases}$$

Nämä yhtälöt saadaan sieventämällä muotoon

$$\begin{cases} 4x-5y = 0 \\ x-y = 1 \end{cases}$$

Kun jälkimmäinen yhtälö kerrotaan  $-5$ :llä ja lisätään edelliseen yhtälöön, eliminoidaan  $y$  ja saadaan  $-x = -5$ , joten  $x = 5$ . Kun tämä arvo sitten sijoitetaan jälkimmäiseen yhtälöön (yksinkertaisempi kuin edellinen), saadaan siitä ratkaisemalla  $y = 4$ . Siis kysytty luku on 54.

**Esim. 2.** Määrättävä luvut  $A$  ja  $B$  siten, että seuraava yhtälö on identtinen:

$$\frac{A}{(x-1)(x+2)} + \frac{B}{(x-1)(x-2)} = \frac{A+B}{x^2-1} + \frac{1}{(x+1)(x^2-4)}$$

Kerrotaan ensin yhtälö nimittäjien pyj:lla  $(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$ :

$$A(x+1)(x-2) + B(x+1)(x+2) = (A+B)(x-2)(x+2) + (x-1)$$

Suorittamalla kertomisia saadaan tästä edelleen

$$A(x^2 - x - 2) + B(x^2 + 3x + 2) = (A+B)(x^2 - 4) + x - 1$$

Kun vielä poistetaan sulut ja siirretään jäsenet vasemmalle puolelle sekä yhdistetään  $x$ :n suhteen samanmuotoiset jäsenet, tullaan yhtälöön

$$(-A + 3B - 1)x + (2A + 6B + 1) = 0$$

Tämä ja siis myös alkuperäinen yhtälö on identtinen silloin, kun vasemmalla puolella kumpikin sulkulauseke = 0:

$$\begin{cases} -A + 3B - 1 = 0 \\ 2A + 6B + 1 = 0 \end{cases}$$

Tästä yhtälöparista saadaan ratkaisemalla  $A = -\frac{3}{4}$ ,  $B = \frac{1}{12}$ . (870–890)



## 49 § Juurikäsite

**Määritelmä:**  $\sqrt[n]{a}$  (" $n$ :s juuri  $a$ :sta") tarkoittaa lukua, jonka  $n$ :s potenssi on  $a$ .

$n$  on nimeltään juuren *indeksi* ja  $a$  *juurrettava*. Toista juurta sanotaan tavallisesti *neliöjuureksi* ja kolmatta juurta *kuutiojuureksi*. Neliöjuuren indeksi jätetään merkitsemättä.

Juuren määritelmän mukaan on siis aina

$$(\sqrt[n]{a})^n = a$$

Toisin sanoen  $\sqrt[n]{a}$  on yhtälön

$$x^n = a$$

juuri.

**Esim. 1.** a)  $\sqrt[3]{8} = 2$ , sillä  $2^3 = 8$

b)  $\sqrt[3]{-8} = -2$ , sillä  $(-2)^3 = -8$

**Esim. 2.** a)  $\sqrt{4} = +2$  ja  $-2$ , sillä  $(\pm 2)^2 = 4$

b)  $\sqrt{-4}$  ei ole mikään luku, sillä luvun neliö on aina  $\geq 0$

**Esim. 3.**  $\sqrt{0} = 0$ , sillä  $0^2 = 0$

Rajoitumme tässä luvussa käsittelemään vain neliöjuuria, joilla onkin käytännössä suurin merkitys. Esimerkkejä 2 ja 3 ajatellen<sup>1</sup> voimme päätellä, että

1) *positiivisen luvun neliöjuurella on kaksi arvoa, jotka ovat toistensa vastalukuja,*

2) *negatiivisen luvun neliöjuurella ei ole yhtään arvoa,*

3) *nollan neliöjuuri on nolla.*

Näin on asianlaita ilmeisesti muihinkin parillisiin juuriin nähden. Parittomilla juurilla taas on aina yksi arvo (vrt. esim. 1).

Vaikkakin siis esim.  $\sqrt{4}$  oikeastaan tarkoittaa sekä  $+2$  että  $-2$ , niin tavalisesti käsitetään sen merkitsevän edellistä, kun taas jälkimmäistä merkitään  $-\sqrt{4}$ :llä. Jos halutaan korostaa, että molemmat arvot ovat kysymyksessä, merkitään  $\pm\sqrt{4}$ . (891–908)

---

<sup>1</sup>Vrt. myös seur. §:ää.

## 50 § Irrationaaliset luvut

Kun ajatellaan, mikä on luvun  $\sqrt{2}$  arvo, niin ensiksikin on selvää, että se ei ole mikään kokonaisluku. Mutta se ei voi olla myöskään murtoluku. Jos näet olisi

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

jossa oikealla puolella oleva murtoluku oletetaan jo supistetuksi ja  $q > 1$ , niin olisi neliöjuuren määritelmän mukaan tämän murtoluvun neliö  $= 2$  ja siis

$$\frac{p^2}{q^2} = 2$$

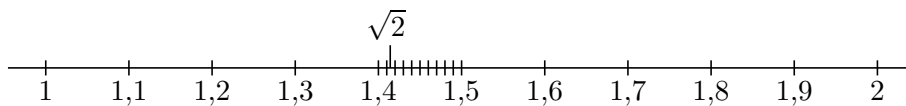
Tämä on kuitenkin mahdotonta, koska vasemmalla puolella on supistumaton murtoluku, joka ei ole kokonaisluku.

Vaikkakaan siis  $\sqrt{2}$  ei ole kokonais- eikä murtoluku, löydetään sille niin tarkkoja ”likiarvoja” kuin halutaan esim. desimaalilukujen joukosta seuraavalla tavalla.

Koska ensiksikin  $1^2 = 1 < 2$  ja  $2^2 = 4 > 2$ , niin on

$$1 < \sqrt{2} < 2$$

Jaamme nyt lukusuoralla lukujen 1 ja 2 välin 10:een yhtäsuureen osaan (kuv. 5) ja tutkimme, missä näistä osista  $\sqrt{2}$  on. Sitä varten muodostetaan



Kuv. 5

jakopisteiden vastinlukujen neliöt ja verrataan niitä lukuun 2. Havaitaan, että  $1,4^2 = 1,96 < 2$ , mutta  $1,5^2 = 2,25 > 2$ . Siis

$$1,4 < \sqrt{2} < 1,5$$

Jakamalla taas vastaavasti lukujen 1,4 ja 1,5 väli 10:een yhtäsuureen osaan huomataan kokeilemalla, että  $1,41^2 = 1,9881 < 2$ , mutta  $1,42^2 = 2,0164 > 2$ , joten

$$1,41 < \sqrt{2} < 1,42$$

Kun näin jatketaan edelleen, saadaan peräkkäin

$$\begin{aligned} 1,414 &< \sqrt{2} < 1,415 \\ 1,4142 &< \sqrt{2} < 1,4143 \\ \text{-----} \end{aligned}$$

Saatujen ”epäyhtälöiden” vasemmalla puolella olevia lukuja, jotka ovat  $< \sqrt{2}$ , sanotaan  $\sqrt{2}$ :n *alalikiarvoiksi* ja oikealla puolella olevia, jotka ovat

$> \sqrt{2}$ , sen *ylälikiarvoiksi*. Jokaisen tällaisen likiarvon virhe on pienempi kuin viimeistä numeroa vastaava yksikkö.

Kun edellä esitettyä menettelyä ajatellaan jatketuksi rajattomasti, joudutaan päättymättömään desimaalilukuun, joka esittää  $\sqrt{2}$ :

$$\sqrt{2} = 1,4142 \dots$$

Tämä desimaaliluku on jaksoton, sillä jaksolliset päättymättömät desimaaliluvut voidaan muuttaa murtoluvuiksi, jollainen  $\sqrt{2}$  ei ole.

Positiivisia ja negatiivisia kokonais- ja murtolukuja ja nollaa olemme nimittäneet *rationaalisiksi* eli *rationaaliluvuiksi* (5 §). Lukuja, joita kuten  $\sqrt{2}$  voidaan esittää päättymättömien, jaksottomien desimaalilukujen avulla, sanotaan *irrationaalisiksi* eli *irrationaaliluvuiksi*. Rationaali- ja irrationaalilukujen yhteinen nimitys on *reaaliluku*.<sup>1</sup> Kaikkien reaalilukujen ääretöntä joukkoa sanotaan *reaaliseksi lukualueeksi*.

Samalla tavalla kuin edellä osoitettiin  $\sqrt{2}$ :sta voidaan näyttää, että jokaisen kokonaisluvun neliöjuuri on irrationaalinen, ellei luku ole jonkin kokonaisluvun neliö. Mutta irrationaalilukuja on muitakin kuin juuret. Niinpä on sellainen esim. ympyrän kehän ja halkaisijan suhde  $\pi = 3,14159 \dots$

Jo silloin, kun käsitelimme vain rationaalilukuja, totesimme, että *jokaista lukua vastaa määrätty piste lukusuoralla* (7 §). Vasta nyt, kun irrationaaliluvut on otettu käytäntöön, voimme sanoa, että kääntäen *jokaista pistettä lukusuoralla vastaa määrätty luku*.

Koska irrationaaliluvut voidaan ilmaista kuinka tarkoilla rationaalisilla likiarvoilla tahansa, niin voidaan päätellä, että kaikki ne laskulait, jotka olemme aikaisemmin havainneet oikeiksi rationaalilukuihin nähden, ilmeisesti pitävät paikkansa myös, kun on kysymyksessä laskutoimitusten suorittaminen yleensä reaaliluvuilla. (909–911)

## 51 § Neliöjuurien sieventäminen

Usein voidaan neliöjuuri saattaa yksinkertaisempaan muotoon nojaamalla kaavaan

$$\sqrt{a^2b} = a\sqrt{b}$$

joka voidaan sanoin tulkita seuraavasti:

**Lause:** *Neliöjuuren alta voidaan tekijä siirtää neliöjuuren eteen, jos siitä samalla otetaan neliöjuuri.*

*Neliöjuuren edestä voidaan tekijä siirtää neliöjuuren alle, jos se samalla korotetaan neliöön.*

---

<sup>1</sup>Oppikirjan II osassa laajennetaan vielä lukukäsitettä ottamalla käytäntöön ns. *imaginaariset luvut*. Tällaisiin johdutaan, kun käsitetään luvuiksi myös negatiivisten lukujen neliöjuuret. Niinpä on ”imaginaarinen yksikkö”  $i = \sqrt{-1}$ .

Todistaaksemme kaavan oikeaksi meidän tarvitsee neliöjuuren määritelmän mukaan vain näyttää, että kaavan oikeana puolena olevan luvun neliö = vasemmalla puolella oleva juurrettava. Näin onkin:

$$(a\sqrt{b})^2 = a^2(\sqrt{b})^2 = a^2b$$

**Esim. 1.**  $\sqrt{32} = \sqrt{16 \cdot 2} = 4\sqrt{2}$

**Esim. 2.**  $n\sqrt{\frac{m}{n}} = \sqrt{n^2 \cdot \frac{m}{n}} = \sqrt{mn}$

**Esim. 3.** Kun neliön sivu =  $s$ , niin kuinka suuri on lävistäjä  $l$ ?

Suorakulmaisesta kolmiosta, jonka hypotenuusana on neliön lävistäjä ja kateetteina neliön kaksi sivua, saadaan Pythagoraan lauseen avulla

$$l^2 = s^2 + s^2 = 2s^2,$$

joten neliöjuuren määritelmän mukaan

$$l = \sqrt{2s^2}$$

Edellisen lauseen perusteella voidaan kirjoittaa

$$l = s\sqrt{2}$$

Jos on laskettava sellaisen murtoluvun arvo, jonka nimittäjänä on irrationaalinen neliöjuuri, niin laskun helpottamiseksi on edullista ”poistaa neliöjuuri nimittäjästä” laventamalla murtoluku tällä neliöjuurella.

**Esim. 4.** Laskettava neliön sivun pituus  $s$ , kun neliön lävistäjä = 1 m. Esimerkissä 3 saadun tuloksen perusteella on

$$s = \frac{l}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{1,4142...}$$

Sen sijaan, että suorittaisimme tämän ikävän jaon, poistamme neliöjuuren nimittäjästä laventamalla murtolukua  $\sqrt{2}$ :lla:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1,4142...}{2} = 0,7071 \dots$$

Näin tuli lasku perin yksinkertaiseksi, ja tulokseksi saatiin neljän desimaalin tarkkuudella  $s = 0,7071$  m. (912–925)

## 52 § Neliöjuuren arvon laskeminen

Ed. §:n lauseen mukaan on

$$\sqrt{100a} = 10\sqrt{a}$$

Koska luvun kertominen 10:llä ja 100:lla tapahtuu siten, että desimaalipilkua siirretään vastaavasti yksi ja kaksi numeroa oikealle, niin tästä yhtälöstä voidaan päätellä:

Jos juurrettavan desimaalipilkua siirretään **k a k s i** numeroa oikealle, niin neliöjuuren arvo muuttuu vain siinä suhteessa, että sen desimaalipilkku

siirtyy yhden numeron oikealle. Vastaavasti tapahtuu siirrettäessä desimaalipilkua vasemmalle.

**Esim.** Kuten seuraavassa laskemalla toteamme, viiden numeron tarkkuudella on

$$\sqrt{2238,9} = 47,317$$

Äsken sanotun perusteella tästä voidaan päätätä, että samalla tarkkuudella on

$$\begin{array}{ll} \sqrt{223890} = 473,17 & \sqrt{22,389} = 4,7317 \\ \sqrt{22389000} = 4731,7 & \sqrt{0,22389} = 0,47317 \\ \sqrt{2238900000} = 47317 & \sqrt{0,0022389} = 0,047317 \end{array}$$

Se kokeilemiskeino, jolla 50 §:ssä johdimme  $\sqrt{2}$ :n likiarvoja, on kovin hankala. Esitämme nyt huomattavasti käyttökelpoisemman menetelmän. Menetelmää teoreettisesti perustelematta laskemme sitä käyttäen edellisessä esimerkissä mainitun neliöjuuren.

$$\begin{array}{r} \sqrt{22|38,|90|} \\ 16 \\ \hline 638 \\ 609 \\ \hline 2990 \\ 2829 \\ \hline 16100 \\ 9461 \\ \hline 663900 \\ 662389 \\ \hline 1511 \end{array} = 47,317$$

Käytetty menetelmä, joka hiukan muistuttaa tavallista kokonaislukujen jakolaskua, on seuraava:

1) Juurrettava on jaettu desimaalipilkusta lähtien molempiin suuntiin *kaksinumeroisiin luokkiin*. Jos juurrettavan kokonaisosan numeroiden luku on pariton, niin ensimmäiseen luokkaan tulee vain yksi numero. Desimaalien perään voidaan liittää tarpeellinen määrä nollia.

2) Neliöjuuren *ensimmäinen numero* (4) on suurin yksinumeroinen luku, jonka neliö sisältyy ensimmäiseen luokkaan. Ensimmäisen luokan ja mainitun neliön erotus jatkettuna<sup>1</sup> toisella luokalla on *ensimmäinen jäännös* (638), ja neliön tekijäin (4 ja 4) summa on *ensimmäinen summa* (8).

3) Neliöjuuren *toinen numero* (7) on suurin sellainen yksinumeroinen luku, että sen ja sillä jatkettun ensimmäisen summan (87) tulo sisältyy ensimmäiseen jäännökseen. Ensimmäisen jäännöksen ja tämän tulon erotus jatkettuna kolmannella luokalla on *toinen jäännös* (2998), ja tulon tekijäin

<sup>1</sup>Kun lukua 6 jatketaan luvulla 38, niin tarkoitetaan sillä, että luvun 6 perään kirjoitetaan luku 38, joten saadaan luku 638.

summa on *toinen summa* (94). Jne. Desimaalipilkku on pantu sitten, kun viimeinen kokonaisten muodostama luokka on käytetty.

**Esim.**  $\sqrt{364}$  laskettava kolmen desimaalin tarkkuudella.

|                          |                    |
|--------------------------|--------------------|
| $\sqrt{3 64}$            | $= 19,078$         |
| $\frac{1}{264}$          | $\frac{1}{29}$     |
| $\frac{261}{30000}$      | $\frac{9}{3807}$   |
| $\frac{26649}{335100}$   | $\frac{7}{38148}$  |
| $\frac{305184}{2991600}$ | $\frac{8}{381567}$ |

Kun tulokseen oli laskettu kolme desimaalia, saatiin 19,078. Mutta koska seuraava desimaali olisi 7, viimeinen desimaali on korotettava. Tulos on siis

$$\sqrt{364} = 19,079 \qquad \qquad \qquad (\mathbf{926-949})$$

### 53 § Funktiokäsite

Jos suureen arvo riippuu jonkin määrätyn lain mukaan toisen muuttuvan suureen arvosta, niin edellistä sanotaan jälkimmäisen *funktioksi* ja jälkimmäistä funktion *argumentiksi*. Funktiota sanotaan myös *riippuvaksi muuttujaksi* ja argumenttia taas *riippumattomaksi muuttujaksi* eli lyhyesti *muuttujaksi*. *Vakioksi* eli *konstantiksi* sanotaan suuretta, jonka arvo on muuttumaton tahi käsiteltävänä olevan kysymyksen yhteydessä pidetään muuttumattomana.

**Esim. 1.** Neliön ala  $y$  on sen sivun  $x$  funktio.  $y$ :n  $x$ :stä riippuvuuslaki voidaan tällöin ilmaista lyhyesti yhtälön  $y = x^2$  muodossa. Jos muuttujalle eli argumentille  $x$  annetaan esim. arvo 2 m, niin funktio  $y$  saa arvon 4 m<sup>2</sup>. Jos taas  $x = 0,6$  cm, niin  $y = 0,36$  cm<sup>2</sup>.

**Esim. 2.** Luvut  $0, 3, -4, \frac{1}{2}, \sqrt{5}$  jne. ovat vakioita eli konstantteja. Sellainen on myös ympyrän kehän ja halkaisijan suhde  $\pi = 3,14159 \dots$

**Esim. 3.** Liikkeen tapahtuessa tasaisella nopeudella  $v$ , kuljettu matka  $s$  on ajan  $t$  funktio.  $v$  on tällöin vakio.  $s$ :n  $t$ :stä riippuvuuslaki voidaan nyt ilmaista tunnetusti yhtälön  $s = vt$  avulla.

**Esim. 4.**  $y = 2x + 1$ ,  $y = x^2 + 3x - 5$ ,  $y = \sqrt{x}$  jne., yleensä yhtälöt, joissa  $y$  on merkitty yhtäsuureksi kuin jokin  $x$ :n sisältävä matemaattinen lauseke, määrittelevät  $y$ :n  $x$ :n funktioksi. Vieläpä sellainenkin kuin esim.  $y = 2$  voidaan tarpeen tullen käsittää argumentin  $x$  funktioksi, sellaiseksi nimittäin, joka kaikilla argumentin arvoilla saa saman arvon 2. Tällainen funktion rajatapaus on siis itse asiassa vakio.

Muuttujan polynomeja sanotaan *kokonaisiksi funktioiksi*. Nämä ovat erikoistapauksia *rationaalisista funktioista*, joiksi sanotaan kaikkia muuttujan rationaalisia lausekkeita (45 §). Vielä yleisempi funktioluokka on *algebraaliset funktiot*, joita muodostettaessa voidaan suorittaa muuttujalla, paitsi ”rationaalisia laskutoimituksia”, myös juurenottoja.

**Esim.**  $x^2$ ,  $3x - \frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{x}$ ,  $\frac{x^2 + \sqrt{2}}{x - 1}$ ,  $\sqrt{x}$ ,  $x + \sqrt[3]{x^2 + 5}$  ovat algebrallisia funktioita ja sitä paitsi neljä ensimmäistä niistä rationaalisia ja kaksi ensimmäistä kokonaisia funktioita.

Kaikki edellä esitetyt funktiot ovat olleet *yhden muuttujan funktioita*. Jos suorakulmion vierekkäiset sivut ovat  $x$  ja  $y$ , niin sen ala  $z = xy$ .  $z$  on siis *kahden muuttujan  $x$  ja  $y$  funktio*. Edelleen on esim.  $u = x^2 + yz$  *kolmen muuttujan  $x$ ,  $y$  ja  $z$  funktio*, jne. Seuraavassa rajoitumme käsittelemään vain yhden muuttujan funktioita.

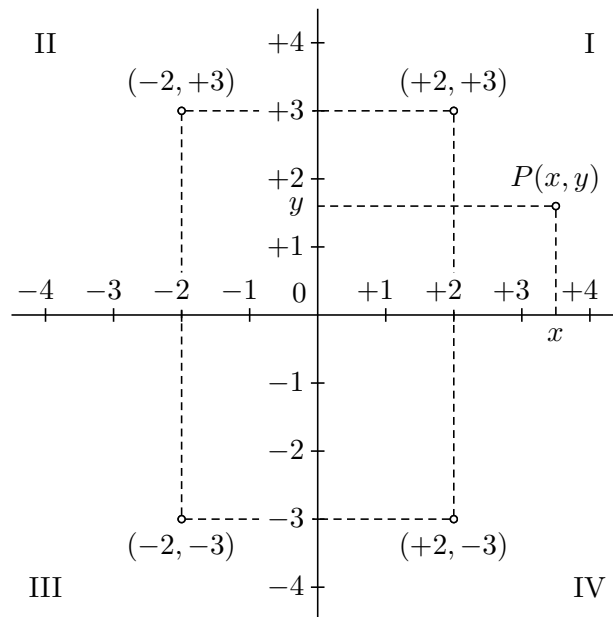
Vielä on ns. *empiiriset* eli *kokemusperäiset funktiot*, joita ei voida ilmaista minään matemaattisena lausekkeena.

**Esim.** Monet luonnonilmiöt (esim. ulkolämpötila) ja tilastolliset seikat (esim. Suomen asukasluku) ovat ajan empiirisiä funktioita, joiden ajasta riippuvuuslaki voidaan vain perästä päin todeta tekemällä havaintoja. (950–954)

## 54 § Koordinaatisto

Olemme nähneet (7 ja 50 §), kuinka kutakin reaalitykua vastaamaan voidaan säätää määrätty suoran ("lukusuoran") piste, ja kääntäen. Nyt osoitamme, kuinka reaalisten lukuparien ja tason pisteiden välille voidaan säätää samanlainen vastaavaisuus.

Tässä tarkoituksessa piirretään kaksi lukusuoraa kohtisuoraan toisiaan vastaan siten, että niiden 0-pisteet yhtyvät (kuv. 6). Näin syntynyttä "ristikkoa" sanotaan *koordinaatistoksi* ja molempia lukusuoria *koordinaattiakseleiksi*. Erikoisesti sanotaan toista akselia, joka tavallisesti piirretään vaakasuoraan (positiivisten lukujen vastinpisteet oikealla puolella), *abskissa-akseliksi* ja toista, pystysuoraa (positiivisten lukujen vastinpisteet yläpuolella), *ordinaatta-akseliksi*. Akselin yhtymäkohta on nimeltään *alkupiste* eli *origo*.



Kuv. 6

Olkoon nyt  $P$  jokin koordinaatiston tasoon kuuluva piste. Piirretään  $P$ :stä kohtisuorat koordinaattiakseleita vastaan. Vastatkoon abskissa-akselilla olevaa kantapistettä luku  $x$  ja ordinaatta-akselilla vastaavasti luku  $y$  (kuviossa on  $x = +3\frac{1}{2}, y = +1\frac{3}{4}$ ). Näitä lukuja sanotaan  $P$ :n *koordinaateiksi* ja erikoisesti  $x$ :ää  $P$ :n *abskissaksi* ja  $y$ :tä sen *ordinaataksi*. Näin ilmeisesti *jokaista*

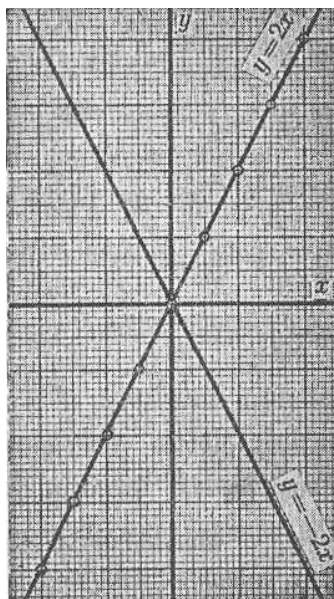


koordinaatiston tason pistettä vastaa määrätty lukupari  $(x, y)$ , ja kääntäen. Kuviossa on esitetty myös ”pisteet”  $(+2, +3)$ ,  $(-2, +3)$ ,  $(-2, -3)$  ja  $(+2, -3)$ .

Koordinaattiakselit jakavat tason neljään *neljännekseen*, joista I:ssä pisteen abskissa ja ordinaatta ovat molemmat positiivisia ja III:ssa taas molemmat negatiivisia, kun taas II:ssa on abskissa negatiivinen ja ordinaatta positiivinen ja IV:ssä päinvastoin. (955–960)

## 55 § Funktion kuvaaja

Kun halutaan saada selvä kuva siitä, kuinka funktion arvo muuttuu argumentin muuttuessa, voidaan tehdä taulukko, jonka yhteen sarakkeeseen merkitään joukko argumentin  $x$  arvoja ja viereiseen sarakkeeseen vastaavat funktion  $y$  arvot. Huomattavasti havainnollisempi kuva funktiosta saadaan kuitenkin esittämällä se *graafisesti* eli piirtämällä koordinaatistoon funktion *kuvaaja*, jolla tarkoitetaan pisteen  $(x, y)$  uraa.<sup>1</sup> Abskissa-akselia sanotaan tällöin tavallisesti *x-akseliksi*. ja ordinaatta-akselia *y-akseliksi*.



Kuv. 7

| $x$             | $y$ |
|-----------------|-----|
| -2              | -4  |
| $-1\frac{1}{2}$ | -3  |
| -1              | -2  |
| $-\frac{1}{2}$  | -1  |
| 0               | 0   |
| $\frac{1}{2}$   | 1   |
| 1               | 2   |
| $1\frac{1}{2}$  | 3   |
| 2               | 4   |

**Esim.**  $y = 2x$

Vieressä olevassa taulukossa on esitetty joukko argumentin  $x$  arvoja ja vastaavat funktion  $y$  arvot. Näitä lukupareja  $(x, y)$  vastaavat pisteet on sitten merkitty koordinaatistoon (kuv. 7). Havaitaan, että ne ovat samalla origon kautta kulkevalla suoralla. Ja voidaan todeta, että niin on aina asian laita, määrätäänkö kuinka paljon tahansa uusia pisteitä. Mainittu suora on siis funktiomme kuvaaja.

Kuvioon on piirretty myös funktion  $y = -2x$  kuvaaja. Se on suora, joka sijaitsee edellisen suoran kanssa symmetrisesti  $x$ -akselin suhteen. Tämä seuraa

yksinkertaisesti siitä, että samaa argumentin arvoa vastaavat kysymyksessä olevien funktioiden arvot ovat toistensa vastalukuja, joten vastaavat pisteet  $(x, y)$  ovat symmetrisessä asennossa  $x$ -akselin suhteen. (961, 962)

## 56 § $y=kx$

Kun edellisessä §:ssä piirsimme tämän funktion kuvaajat tapauksissa  $k = 2$  ja  $k = -2$ , kävi ilmeiseksi, että ne ovat origon kautta kulkevia suoria.

<sup>1</sup>Mukavinta on suorittaa piirros ns. millimetripaperille. Yksiköksi valitaan tällöin tavallisesti 1 cm.

Todistamme nyt sitovasti, että näin on asian laita, olkoon  $k$ :lla mikä arvo tahansa.

**Lause 1:** *Funktion  $y = kx$  kuvaaja on aina origon kautta kulkeva suora, jonka kaltevuuskulma  $\alpha$   $x$ -akselin suhteen määräytyy yhtälöstä*

$$(A) \quad \tan \alpha = |k|$$

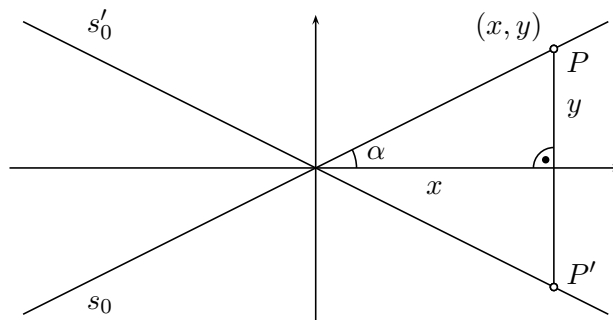
*Suora (oikealle siirryttäessä)*

1) *nousee, jos  $k$  on positiivinen*

2) *laskee, jos  $k$  on negatiivinen*

3) *yhtyy  $x$ -akseliin, jos  $k = 0$*

Jos ensiksi  $k = 0$  ja siis  $y = 0$  kaikilla  $x$ :n arvoilla, niin kuvaaja on selvästi itse  $x$ -akseli. Sen kaltevuuskulma  $\alpha = 0$ , mikä on sopusoinnussa yhtälön (A) kanssa.



Kuv. 8

Oletamme sitten, että  $k$  on positiivinen ja siis  $|k| = k$ . Piirretään origon kautta suora  $s_0$ , jonka kaltevuuskulma  $x$ -akselin suhteen  $= \alpha$  ja joka sijaitsee koordinaatiston I:ssä ja III:ssä neljänneksessä (kuv. 8). Tämän suoran pisteet  $(x, y)$  ja vain ne täyttävät ehdon

$$\frac{y}{x} = \tan \alpha = k$$

eli

$$y = kx$$

Suora  $s_0$  on niin ollen funktion  $y = kx$  kuvaaja.

Jos vihdoinkin  $k$  on negatiivinen, äsken tarkastellun  $k$ :n vastaluku, niin funktion kuvaaja on suora  $s'_0$ , joka sijaitsee suoran  $s_0$  kanssa symmetrisesti  $x$ -akselin suhteen. Tämä seuraa yksinkertaisesti siitä, että samaa argumentin arvoa vastaavat ko. kahden funktion arvot ovat toistensa vastalukuja, joten vastaavat kuvaajien pisteet  $P$  ja  $P'$  ovat symmetrisessä asennossa  $x$ -akselin suhteen.

Oikealle siirryttäessä suora  $s_0$  "nousee" ja  $s'_0$  "laskee", kuten väitös edellyttää.

Funktion  $y = kx$  kuvaajasuora eli, kuten lyhyesti sanotaan, ”suora  $y = kx$ ” voidaan piirtää siten, että annetaan  $x$ :lle jokin arvo ( $\neq 0$ ) ja lasketaan vastaava  $y$ :n arvo sekä piirretään sitten suora näin määrätyn pisteen  $(x, y)$  ja origon kautta.

Lukua  $k$  sanotaan suoran  $y = kx$  *kulmakertoimeksi* eli *kulmakoeffisientiksi*. Mitä suurempi  $|k|$  on, sitä suurempi on kaltevuuskulma  $\alpha$ , toisin sanoen, sitä jyrkemmin suora nousee tai laskee.

Koska edellisen lauseen mukaan  $x$ :n suuretessa  $kx$  suurenee tai pienenee sen mukaan, onko  $k$  positiivinen vai negatiivinen, niin voidaan kirjoittaa

**Lause 2:** Jos  $a > b$ , niin

- 1)  $ka > kb$ , jos  $k$  on positiivinen
- 2)  $ka < kb$ , ” ” ” negatiivinen

Olko  $x_1$  ja  $x_2$  kaksi mielivaltaista argumentin arvoa ja  $y_1$  ja  $y_2$  vastaavat funktion arvot, joten

$$y_1 = kx_1, \quad y_2 = kx_2$$

Jakamalla edellinen yhtälö jälkimmäisellä saadaan verranto

$$y_1 : y_2 = x_1 : x_2$$

Tämä tulos ilmaistaan sanomalla, että funktion  $kx$  arvot ovat suoraa  $n$  verrannolliset vastaaviin argumentin arvoihin eli lyhyesti: *funktio  $kx$  on suoraan verrannollinen argumenttiin*.

**Esim.** Jos kappale liikkuu tasaisella nopeudella  $v$  (vakio), niin matka  $s$  ajan  $t$  funktiona on

$$s = vt$$

Matka on siis suoraan verrannollinen aikaan.

(963–968)

## 57 § $y=kx+b$

Ed. §:n lause 1, joka koskee erikoistapausta  $b = 0$ , voidaan yleistää seuraavasti:

**Lause 1:** Funktion  $y = kx + b$  kuvaaja on suora, joka leikkaa  $y$ -akselin pisteessä  $b$  ja jonka kaltevuuskulma  $\alpha$   $x$ -akselin suhteen määräytyy yhtälöstä

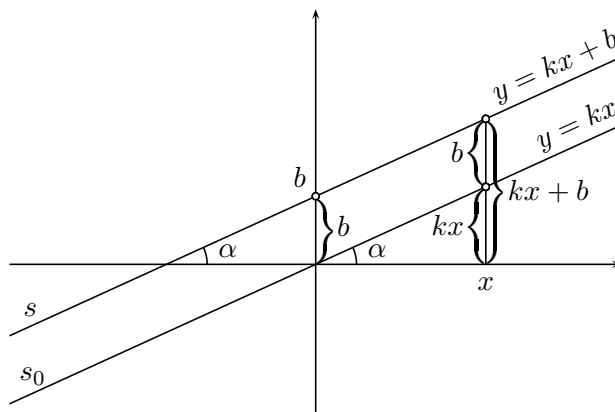
$$\tan \alpha = |k|$$

*Suora (oikealle siirryttäessä)*

- 1) nousee, jos  $k$  on positiivinen
- 2) laskee, jos  $k$  on negatiivinen
- 3) on  $x$ -akselin suuntainen, jos  $k = 0$

Tämä yleinen lause seuraa äsken mainitusta erikoistapausta koskevasta lauseesta yksinkertaisesti seuraavasti.

Kutakin  $x$ :n arvoa vastaava funktion  $y = kx + b$  kuvaajan  $s$  piste saadaan, kun funktion  $y = kx$  kuvaajasuoran  $s_0$  samaa  $x$ :n arvoa vastaavaa pistettä



Kuv. 9

siirretään matka  $b$  ylöspäin, jos  $b$  on positiivinen (kuv. 9), tai alaspäin, jos  $b$  on negatiivinen.  $s$  on siis  $s_0$ :n suuntainen suora ja leikkaa  $y$ -akselia pisteessä  $b$ .

$s$ :n piirtäminen voidaan suorittaa siten, että viimeksi mainitun pisteen lisäksi määrätään jokin toinen sen piste ja piirretään sitten suora näiden pisteiden kautta.  $x$ :n kerrointa  $k$  sanotaan yleisessäkin tapauksessa kulmakertoimeksi.

Edellisestä lauseesta seuraa välittömästi

**Lause 2:** Suorat  $y = k_1x + b_1$  ja  $y = k_2x + b_2$  ovat yhdensuuntaiset silloin ja vain silloin, kun  $k_1 = k_2$ . (969–990)

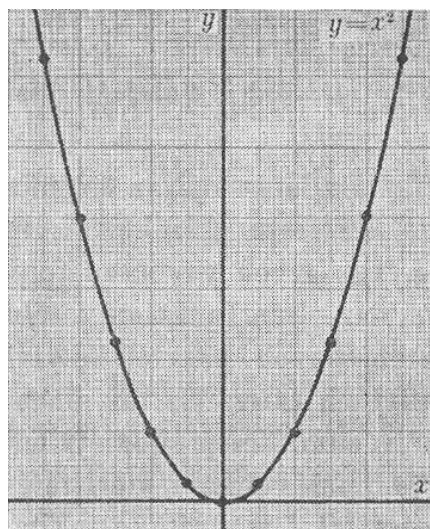
## 58 § $y = ax^2$

Piirrämme tämän funktion kuvaajan tapauksessa  $a = 1$ . Siinä tarkoituksessa annamme  $x$ :lle joukon arvoja ja laskemme vastaavat  $y$ :n arvot. Näin saadaan kuvion 10 vierellä oleva taulukko. Vastaavat pisteet  $(x, y)$  merkitään sitten koordinaatistoon ja piirretään niiden kautta mahdollisimman luonnollinen ja sileä käyrä (kuv. 10). Tämä esittää funktiomme kuvaajaa. Jos laskemalla määrätään lisää kuvaajan pisteitä, nähdään, että ne ovat piirretyllä käyrällä.

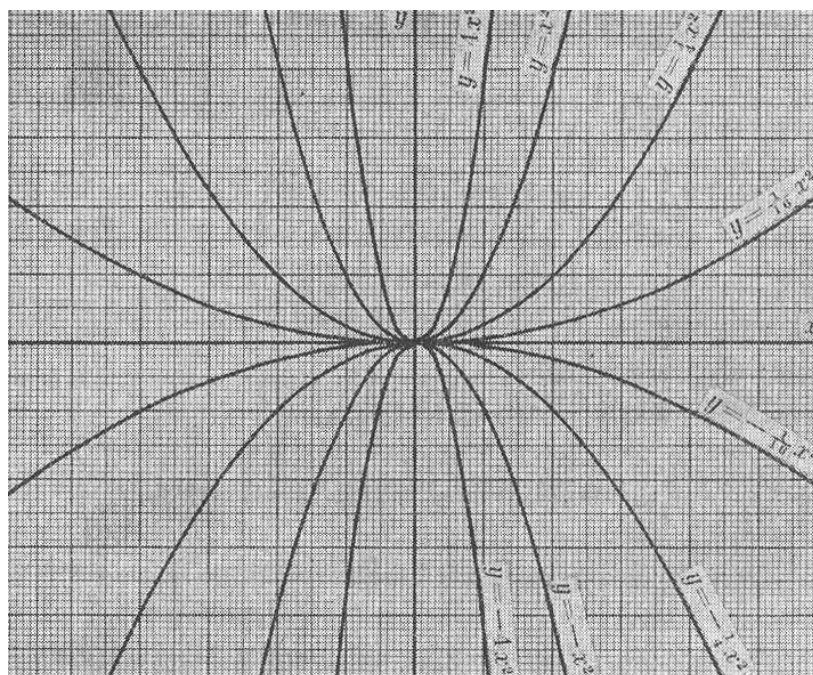
Funktion  $y = ax^2$  kuvaajaa sanotaan *parabeliksi*. Tämä käyrä on symmetrinen  $y$ -akselin suhteen, mikä voidaan päättää siitä, että kahta  $x$ :n arvoa, jotka ovat toistensa vastalukuja, vastaa sama  $y$ :n arvo. Tätä symmetrisyyssakselia sanotaan parabelin *akseliksi* ja sillä oleva parabelin piste, joka on origossa, on nimeltään parabelin *huippu*.

Kun  $x = 0$ , niin  $y = 0$ . Kun sitten  $|x|$  ja siis  $x^2$  suurenee, niin  $y$  suurenee, jos  $a > 0$  ja pienenee, jos  $a < 0$ .  $y$ :n suureneminen tai pieneminen on sitä nopeampaa mitä suurempi  $|a|$  on. Kahta  $a$ :n arvoa, jotka ovat toistensa vastalukuja, vastaavien funktioiden kuvaajat ovat symmetrisiä  $x$ -akselin suhteen, sillä niiden samaa abskissaa vastaavat ordinaatat ovat toistensa vas-

| $x$       | $y$  |
|-----------|------|
| 0         | 0    |
| $\pm 0,5$ | 0,25 |
| $\pm 1$   | 1    |
| $\pm 1,5$ | 2,25 |
| $\pm 2$   | 4    |
| $\pm 2,5$ | 6,25 |



Kuv. 10



Kuv. 11

talukuja. Kuviossa 11 esitetään näytteeksi samassa koordinaatistossa arvoja  $a = \pm 4, \pm 1, \pm \frac{1}{4}, \pm \frac{1}{16}$  vastaavat parabelit.

Edellä esitetyllä keinolla piirretään muunlaistenkin funktioiden kuvaajat. Käyrän pisteitä määrätään niin tiheässä, että käyrä voidaan hyvin niiden

kautta piirtää. Sellaisissa paikoissa, joissa käyrä on kaarevampi, on yleensä syytä määrätä pisteitä tiheämmässä kuin vähemmän kaarevissa kohdissa. On huomattava, että algebrallisten funktioiden kuvaajat ovat yleensä yksinkertaisia ja kauniita, sileitä käyriä, ilman ”äkkimutkia”.

Olkoot  $x_1$  ja  $x_2$  kaksi mielivaltaista argumentin arvoa ja  $y_1$  ja  $y_2$  vastaavat funktion arvot, joten

$$y_1 = ax_1^2, \quad y_2 = ax_2^2$$

Jakamalla edellinen yhtälö jälkimmäisellä saadaan verranto

$$y_1 : y_2 = x_1^2 : x_2^2$$

Tämä tulos ilmaistaan lyhyesti: *funktio  $ax^2$  on suoraan verrannollinen argumentin neliöön.*

**Esim.** Ympyrän ala  $A$  säteen  $r$  funktiona on

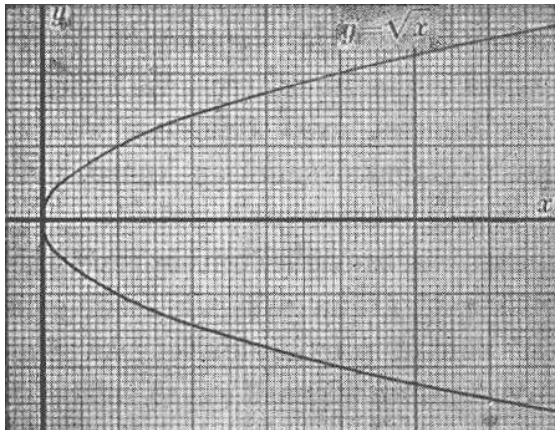
$$A = \pi r^2$$

Ympyrän ala on siis suoraan verrannollinen säteen neliöön.

(991–1005)

## 59 § $y = \sqrt{x}$

Sen sijaan, että antaisimme  $x$ :lle arvoja ja laskisimme vastaavat  $y$ :n arvot, on tällä kertaa mukavampaa tehdä päinvastoin. Onhan näet  $x = y^2$  ja neliöön korottaminen on helpompaa kuin neliöjuuren ottaminen. Mutta tällä tavalla ilmeisesti joudumme piirtämään käyrän, joka on yhtenevä kuviossa 10 esitetyn parabelin kanssa. Ainoa ero on siinä, että paraboli nyt



Kuv. 12

”aukeaa” oikealle (kuv. 12), kun taas mainittu paraboli aukeaa ylöspäin.

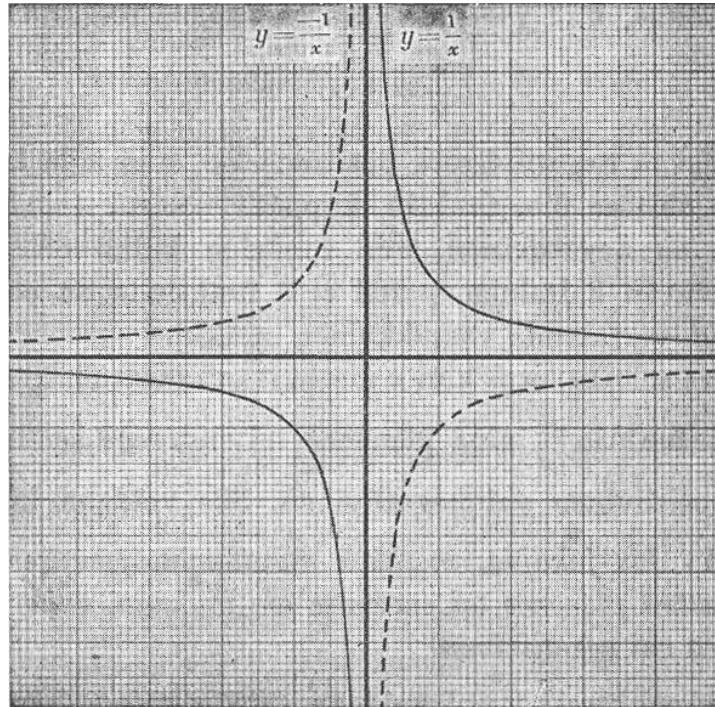
Kuviosta näkyy havainnollisesti  $x$ :n arvojen lukumäärään nähden ennestään tuntemamme tosiasia: kutakin  $x$ :n arvoa vastaa kaksi, yksi tai ei yhtään funktion arvoa sen mukaan, onko  $x$  positiivinen, nolla vai negatiivinen. Funktion kaksi arvoa ensin mainitussa tapauksessa ovat toistensa vastalukuja.

Tällaisia funktioita, jotka voivat saada samalla muuttujan arvolla kaksi arvoa (ei useampia), sanotaan *kaksikäsitteisiksi* funktioiksi. Niitä funktioita taas, jotka eivät koskaan saa useampia kuin yhden arvon, sanotaan *yksikäsitteisiksi* funktioiksi. Tällaisia ovat mm. kaikki rationaalifunktiot. Vastaavalla tavalla määritellään *kolmikäsitteiset* funktiot jne.

(1006–1009)

## 60 § $y = \frac{a}{x}$

Kuviossa 13 esitetään tämän funktion kuvaajat tapauksissa  $a = 1$  (yhtenäinen viiva) ja  $a = -1$  (katkoviiva). Ne on piirretty 58 §:ssä käytetyllä keinolla ( $x$ :lle on annettu arvot  $\pm\frac{1}{5}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{2}, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5$  ja laskettu vastaavat  $y$ :n arvot).



Kuv. 13

Kysymyksessä oleva käyrä, olipa vakiolla  $a$  mikä arvo tahansa, on nimeltään *hyperbeli*. Se on kaksiosainen eli, kuten tavallisesti sanotaan, *kaksihaarainen*. Kun siirrytään jompaakumpaa haaraa pitkin kauemmaksi ja kauemmaksi, niin käyrä lähenee rajattomasti koordinaattiakselia. Koordinaattiakseleja sanotaan tämän ominaisuuden takia hyperbelin *asymptooteiksi*.

Tarkastelemme nyt lähemmin funktion *kulkua*, so. funktion muuttumista argumentin muuttuessa. Oletamme ensin, että  $a$  on positiivinen. Kun tällöin  $x$  "kasvaa" rajattomasti eli, kuten on tapana merkitä,  $x \rightarrow +\infty$  (luettava:  $x$  lähenee +ääretöntä), niin (vrt. kuviota)  $y \rightarrow 0$  alituisesti pieneten ja positiivisena pysyen. Kun taas  $x$  pienenee rajattomasti eli  $x \rightarrow -\infty$ , niin  $y \rightarrow 0$  alituisesti kasvaen ja negatiivisena pysyen. Kun edelleen  $x \rightarrow 0$  "positiiviselta puolelta", niin  $y \rightarrow +\infty$ , ja kun  $x \rightarrow 0$  "negatiiviselta puolelta", niin  $y \rightarrow -\infty$ . Tätä on tapana merkitä myös

$$\frac{a}{0} = \pm\infty$$

Kun  $x$  kasvaa negatiivisesta positiiviseksi, niin sillä hetkellä, jolloin se ohittaa 0:n, funktio ”hyppää”  $-\infty$ :stä  $+\infty$ :ään.

Kun  $a$  on negatiivinen, niin funktion kulku on muuten edellä kuvatuskaltaisen, paitsi että funktiolla on edelliseen tapaukseen verrattuna vastakainen merkki.

Kuviosta selviää, että kun  $x$  merkkiään muuttamatta suurenee, niin funktio  $\frac{a}{x}$  aina pienenee tai suurenee sen mukaan, onko  $a$  positiivinen vai negatiivinen. Siis voidaan kirjoittaa

**Lause 1:** *Jos jakajaa, merkkiä muuttamatta, suurennetaan, niin osamäärä pienenee tai suurenee sen mukaan, onko jaettava positiivinen vai negatiivinen.*

Erikoistapauksessa  $a = 1$  voidaan tämän lauseen sisältö pukea muotoon:

**Lause 2:** *Suuremmalla kahdesta samanmerkkisestä luvusta on pienempi käänteisarvo kuin pienemmällä.*

Olko  $x_1$  ja  $x_2$  kaksi mielivaltaista argumentin arvoa ja  $y_1$  ja  $y_2$  vastaavat funktion arvot, joten

$$y_1 = \frac{a}{x_1}, \quad y_2 = \frac{a}{x_2}$$

Jakamalla edellinen yhtälö jälkimmäisellä saadaan verranto

$$y_1 : y_2 = \frac{1}{x_1} : \frac{1}{x_2} \quad \text{eli} \quad y_1 : y_2 = x_2 : x_1$$

Tämä tulos ilmaistaan sanomalla, että funktion  $\frac{a}{x}$  arvot ovat k ä ä n t ä -  
e n verrannolliset vastaaviin argumentin arvoihin eli lyhyesti: *funktio  $\frac{a}{x}$  on  
k ä ä n t ä e n verrannollinen argumenttiin.*

**Esim.** Jos kappale liikkuu tasaisella nopeudella tietyn matkan  $s$  (vakio), niin matkaan tarvittava aika  $t$  nopeuden  $v$  funktiona on

$$t = \frac{s}{v}$$

Aika on siis kääntäen verrannollinen nopeuteen (vrt. esimerkkiä 56 §:ssä).

(1010, 1011)

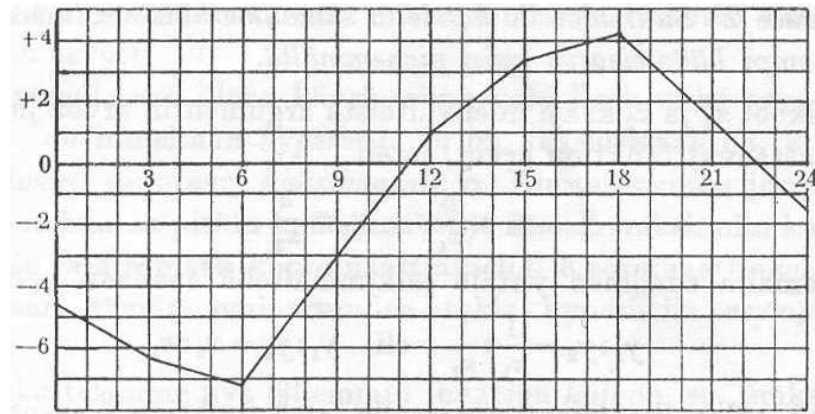
## 61 § Empiirisen funktion kuvaaja

Empiirisen funktion esittämistä graafisesti selitämme seuraavan esimerkin avulla. Eräessä paikassa mitattiin huhtikuun 28 p:nä ulkolämpötila vuorokauden kuluessa 3 tunnin väliajoin. Tulokset ovat esitettyinä alla olevassa taulukossa.

|           |              |              |              |              |              |              |              |              |              |
|-----------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| Klo       | 0            | 3            | 6            | 9            | 12           | 15           | 18           | 21           | 24           |
| Lämpötila | $-4,6^\circ$ | $-6,3^\circ$ | $-7,2^\circ$ | $-3,0^\circ$ | $+1,0^\circ$ | $+3,3^\circ$ | $+4,2^\circ$ | $+1,4^\circ$ | $-1,5^\circ$ |



Otetaan aika abskissaksi ja lämpötila ordinaataksi ja merkitään taulukossa esiintyvät 9 lukuparia koordinaatistoon. Kysymyksessä olevan vuorokauden lämpötilaa ajan funktiona esittävä käyrä kulkee silloin näiden pisteiden kautta. Kun emme tunne lämpötilaa mainittujen kellomäärien väliajoilla,

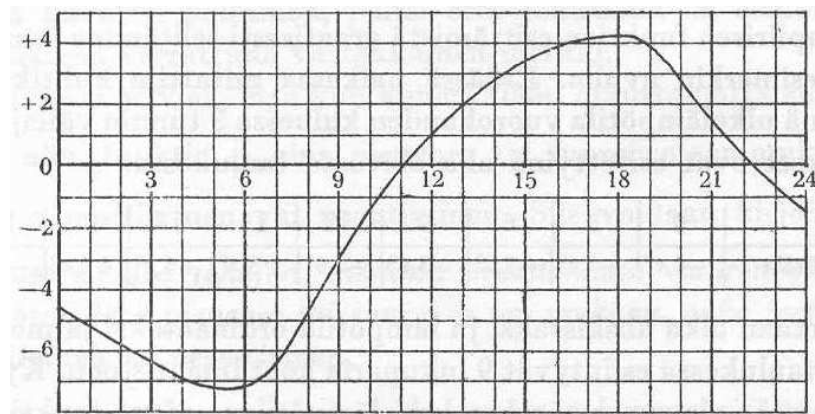


Kuv. 14

niin voidaan käyrä piirtää vain likimääräisesti. Tällöin käytetään jompaa-kumpaa seuraavasta kahdesta menettelytavasta.

Toisessa keinossa yksinkertaisesti yhdistetään saadut pisteet janoilla ja ajatellaan siis paremman tiedon puutteessa, että lämpötila väliaikoina on muuttunut ”suoraviivaisesti”. Näin saadaan kuviossa 14 esitetty murtoviiva lämpötilan kuvaajaksi.

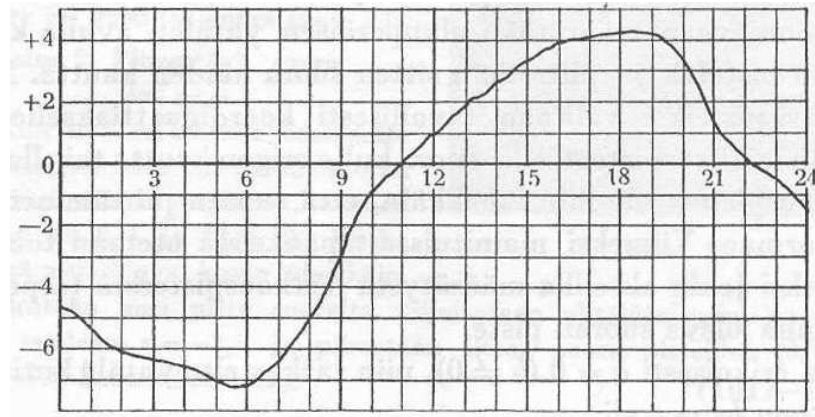
Toinen keino taas perustuu siihen, että otaksutaan lämpötilan kuvaajan olevan mahdollisimman yksinkertaisen ja luonnollisen sileän käyrän, joka kulkee kysymyksessä olevien pisteiden kautta. Kuvaajan piirtäminen näin on tietysti jossakin määrin mielivaltaista, mutta kun piirtäminen harkiten



Kuv. 15

tehdään, niin eivät yleensä edes eri henkilöiden piirrokset paljonkaan eroa toisistaan, elleivät tunnetut pisteet ole kovin harvassa ja epäsäännöllisesti. Kuviossa 15 oleva sileä käyrä on näin piirretty.

Tällä kertaa on meillä tilaisuus tarkistaa, missä määrin edellä esitetyt käyrät poikkeavat oikeasta kuvaajasta, joka on nähtävissä kuviossa 16. Tä-



Kuv. 16

mä käyrä on saatu siten, että samassa paikassa, jossa havaittiin taulukossa olevat lämpötilat, oli toiminnassa ns. termografi, joka on sellainen kelloko-neistolla toimiva koje, jossa kynä automaattisesti suoraan piirtää paperille lämpötilakäyrän. (1012–1016)

## 62 § Ensimmäisen asteen yhtälön kuvaaja

Yhtälö

$$ax + by = c$$

jossa  $a$ ,  $b$  ja  $c$  merkitsevät vakioita ja  $b \neq 0$  määrittelee  $y$ :n argumentin  $x$  funktioksi. Kun näet  $x$ :lle annetaan jokin arvo, niin vastaava  $y$ :n arvo saadaan ratkaisemalla yhtälö  $y$ :n suhteen.  $y$ :tä sanotaan tällöin  $x$ :n *ratkai-semattomaksi funktioksi*.

Jos edellä oleva yhtälö ratkaistaan  $y$ :n suhteen, saadaan  $y$  lausutuksi  $x$ :n *ratkaistuna funktiona*:

$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$$

Funktion kuvaaja on siis suora (57 §, lause 1). Tätä suoraa sanomme alussa mainitun *yhtälön kuvaajaksi* ja yhtälöä ko. *suoran yhtälöksi*.

Suoran piirtämiseksi ei yhtälöä yleensä saateta ratkaistuun muotoon, vaan määrätään alkuperäisen yhtälön avulla kaksi suoran pistettä ja piirretään sitten suora näiden kautta. Mainituiksi pisteiksi valitaan tavallisesti koor-dinaattiakselien ja suoran leikkauspisteet, ellei suora kulje origon kautta

tai elleivät leikkauspisteet ole niin lähekkäin, että suoran piirtäminen on epävarmaa. Viimeksi mainituissa tapauksissa otetaan toiseksi pisteeksi jokin akselilla määrätystä leikkauspisteestä tarpeeksi kaukana oleva suoran piste.

Jos erikoisesti  $a = 0$  ( $b \neq 0$ ), niin tarkasteltu yhtälö kutistuu muotoon  $by = c$  eli

$$y = \frac{c}{b}$$

Yhtälön kuvaaja on tällöin  $x$ -akselin suuntainen suora, joka leikkaa  $y$ -akselin pisteessä  $\frac{c}{b}$ . Jos taas  $b = 0$  ( $a \neq 0$ ), niin meillä on yhtälö  $ax = c$  eli

$$x = \frac{c}{a}$$

jonka kuvaaja on vastaavasti ilmeisesti  $y$ -akselin suuntainen suora, joka leikkaa  $x$ -akselin pisteessä  $\frac{c}{a}$ .

Näin on havaittu oikeaksi

**Lause:** Ensimmäisen asteen yhtälön

$$ax + by = c$$

kuvaaja on aina suora.

**Esim. 1.** Piirrettävä suora

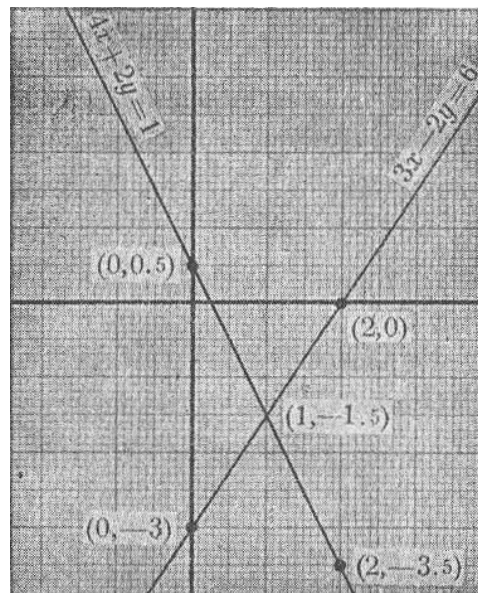
$$3x - 2y = 6$$

Suoran ja  $y$ -akselin leikkauspiste saadaan, kun yhtälöön sijoitetaan  $x = 0$ . Tällöin on  $y = -3$ , joten mainittu leikkauspiste on  $(0, -3)$ . Panemalla päinvastoin  $y = 0$ , saadaan  $x = 2$ , joten suoran ja  $x$ -akselin leikkauspiste on  $(2, 0)$ . Pisteiden  $(0, -3)$  ja  $(2, 0)$  kautta piirretty suora on vaadittu suora (kuv. 17).

**Esim. 2.** Piirrettävä suora

$$4x + 2y = 1$$

Kun nyt määrätään edellisessä esimerkissä esitetyllä tavalla suoran ja akselien leikkauspisteet, saadaan niiksi  $(0, 0,5)$  ja  $(0,25, 0)$ . Koska nämä pisteet ovat kovin lähekkäin, määrätään uusi piste suoralta. Sijoitetaan yhtälöön esim.  $x = 2$ , jolloin saadaan  $y = -3,5$ , ja piirretään sitten suora pisteiden  $(0, 0,5)$  ja  $(2, -3,5)$  kautta (kuv. 17).



Kuv. 17

(1017–1025)

## 63 § Ensimmäisen asteen yhtälöparin graafinen ratkaisemien

47 §:ssä olemme nähneet, miten yhtälöpari

$$(I) \quad \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

ratkaistaan *algebrallisesti*. Nyt näytämme, miten sama yhtälöpari ratkaistaan *graafisesti*.

Koska sellainen piste  $(x, y)$ , jonka koordinaatit toteuttavat molemmat yllä olevat yhtälöt, on kummankin yhtälön kuvaajasuoralla, niin se on näiden suorien leikkauspiste. Siis yhtälöparin ratkaisemiseksi graafisesti tarvitsee vain piirtää molemmat suorat, jolloin leikkauspisteen koordinaatit ovat haettu juuripari.

**Esim.**

$$\begin{cases} 3x - 2y = 6 \\ 4x + 2y = 1 \end{cases}$$

Näiden yhtälöiden kuvaajasuorien piirtämisen olemme selittäneet edellisen §:n esimerkeissä (kuv. 17). Kuten kuviosta näkyy on suorien leikkauspiste  $(1, -1,5)$ , joten yhtälön juuripari on  $x = 1$ ,  $y = -1,5$ . Saman tuloksen saimme algebrallisesti 47 §:ssä.

(1026–1033)

## 64 § Yhtälöparin ratkaisujen lukumäärä

Edellisessä §:ssä esitetystä ratkaisumenetelmästä seuraa välittömästi

**Lause 1:** *Yhtälöparilla (I) on ratkaisuja*

- |                      |                                  |
|----------------------|----------------------------------|
| 1) yksi,             | jos kuvaajat leikkaavat toisensa |
| 2) ei yhtään,        | ” ” ovat yhdensuuntaiset         |
| 3) äärettömän monta, | ” ” yhtyvät                      |

Sanoaksemme tämän lauseen ”algebran kielellä”, kirjoitamme yhtälöt (I) ratkaistuun muotoon:<sup>1</sup>

$$\begin{cases} y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b} \\ y = -\frac{a'}{b'}x + \frac{c'}{b'} \end{cases}$$

Näiden suorien yhdensuuntaisuusehto on

$$-\frac{a}{b} = -\frac{a'}{b'}$$

(57 §, lause 2). Kun tässä muutamme molempien puolien merkit ja vaihdamme keskenään saadun verrannon keskimmäiset jäsenet (17 §, lause 2), saamme yhdensuuntaisuusehdon muotoon

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$$

---

<sup>1</sup>Oletamme, että  $b$  ja  $b' \neq 0$ .

Suorien yhtymisehdoksi tulee tämän lisäksi  $\frac{c}{b} = \frac{c'}{b'}$  eli

$$\frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

Lause 1 voidaan siis esittää algebrallisessa muodossa seuraavasti:

**Lause 2:** *Yhtälöparilla (I) on ratkaisuja*

- 1) *yksi*,                      jos  $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$
- 2) *ei yhtään*,                ”  $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$
- 3) *äärettömän monta*,    ”  $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$

Jos tapauksessa 3) yhtäsuuria suhteita merkitään  $k$ :lla, niin

$$a = ka', \quad b = kb', \quad c = kc'$$

mistä näkyy, että edellinen yhtälöistä (I) saadaan tällöin kertomalla jälkimmäinen  $k$ :lla.

**Esim.** Millä lukujen  $m$  ja  $n$  arvoilla seuraavalla yhtälöparilla on ratkaisuja 1) yksi, 2) ei yhtään, 3) äärettömän monta:

$$\begin{cases} (m^2 - 3)x + my = m + n \\ (2m - 1)x + 2y = m \end{cases}$$

Edellisen lauseen mukaan on kysymyksessä tapaus 2) tai 3) silloin, kun on voimassa verranto

$$\frac{m^2 - 3}{2m - 1} = \frac{m}{2}$$

Kirjoittamalla keskimmäisten jäsenten tulo = äärimmäisten jäsenten tulo (17 §, lause 1) saadaan yhtälö

$$2m^2 - 6 = 2m^2 - m$$

Tämän juuri on  $m = 6$ . Siis tapaus 1) on kysymyksessä, kun  $m \neq 6$ .

Jos  $m = 6$ , niin mainitusta kahdesta mahdollisuudesta on kysymyksessä tapaus 3) silloin, kun on voimassa verranto

$$\frac{m}{2} = \frac{m+n}{m} \quad \text{eli} \quad \frac{6}{2} = \frac{6+n}{6}$$

Tämän yhtälän juuri on  $n = 12$ .

Siis yhtälöparilla on ratkaisuja:

- 1) yksi,                      jos  $m \neq 6$
- 2) ei yhtään,                ”  $m = 6, n \neq 12$
- 3) äärettömän monta,    ”  $m = 6, n = 12$

(1034–1037)