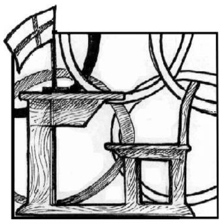

Matematiikkakilpailu opettajillekin?

Matti Lehtinen
Maanpuolustuskorkeakoulu

Matematiikkakilpailuja järjestetään kaikkialla maailmassa nuorten innostamiseksi matematiikan pariin. Yksi tärkeä lenkki kilpailujen tavoitteen saavuttamisessa on matematiikan opettaja. Jos opettaja ei tiedota kilpailumahdollisuudesta eikä osaa opastaa oppilaitaan kilpailumatematiikan pariin, ei kilpailujärjestelmä toimi. Suomessa ei ole aivan harvinaista, että tieto esimerkiksi lukion valtakunnallisista matematiikkakilpailuista pysähtyy opettajaan.

Mikä avuksi? Opettaja, joka on itse innostunut tehtävänratkaisu-urheilusta, on varmasti omiaan kannustamaan oppilaitaan ja tasoittamaan heidän tietään matematiikkakilpailun alkuun kivisentuntuisella saralla. Mutta opettajille ei ole omia kilpailuja. Opettajat kilpailevat monissa lajeissa: Opettaja-lehdestä voi lukea niin opettajien šakki- kuin sulkapalloturnauksistakin. Mutta otetaanpa kerran esimerkkiä Mongoliasta, maasta, joka johdonmukaisesti menestyy Kansainvälisissä matematiikkaolympialaisissa Suomea paremmin.

Mongolian kansallisissa matematiikkaolympialaisissa on kaksi kilpailua: oppilaiden ja opettajien. Opettajien kilpailussa palkintoina on kunnian lisäksi rahaa. Seuraavassa 43. Mongolian kansallisten matematiikkaolympialaisten, joita pidettiin Ulan Bataarissa 5. – 11. toukokuuta 2007, opettajien sarjan tehtävät. Opettajat ja oppilaat, lähettäkää ratkaisuehdotuksenne Solmuun. Entä kuka on aktiivinen ja organisoi ensimmäiset Suomen opettajien matematiikkakilpailut?

1. Kuinka monen joukon $\{1, 2, 3, \ldots, 5n\}$ osajoukon alkioiden summa on jaollinen viidellä?

2. On annettu 101 saman suoran janaa. Todista, että janojen joukossa on 11 sellaista, joilla on yhteinen piste tai 11 sellaista, joista millään kahdella ei ole yhteisiä pisteitä.

3. Olkoon p pariton alkuluku. Olkoon g primitiivijuuri mod p [pienin x, jolle $x^q \not\equiv 1 \pmod p$, kun $q < p-1$]. Määritä kaikki sellaiset p:n arvot, joille joukkojen $A = \{k^2+1 \mid 1 \le k \le \frac{p-1}{2}\}$ ja $B = \{g^m \mid 1 \le m \le \frac{p-1}{2}\}$ alkiot ovat samat $\pmod p$.

4. Todista: jos x, y ja z ovat luonnollisia lukuja ja $xy = z^2 + 1$, niin on olemassa kokonaisluvut a, b, c ja d niin, että $x = a^2 + b^2$, $y = c^2 + d^2$ ja $z = ac + bd$.

5. Piste P on tasasivuisen kolmion ABC ympäri piirretyn ympyrän piste. Osoita, että janat PA, PB ja PC voivat olla kolmion sivuja. Olkoon R kolmion ympäri piirretyn ympyrän säde ja d pisteen P ja mainitun ympyrän keskipisteen välimatka. Määritä konstruoidun kolmion ala.

6. Olkoon $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_s^{\alpha_s} \ge 2$. Oletetaan, että luvulle α ja kaikille i, $1 \le i \le s$, pätee $(p_i - 1) \not| \alpha$. Todista, että $n \mid \sum_{a \in \mathbb{Z}_n^*} a^\alpha$, missä $\mathbb{Z}_n^* = \{a \in \mathbb{Z}_n \mid (a, n) = 1\}$. [$(a, n)$ on lukujen a ja n suurin yhteinen tekijä].