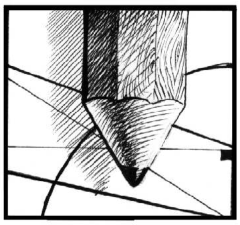

Matematiikkaa Venäjällä

Eemeli Blåsten
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Helsingin yliopisto

Kesäkuun viidentenä päivänä minulle soitettiin Suomen Matemaattisesta Yhdistyksestä ja kysyttiin kiinnostaisiko minua lähteä Venäjälle. Kyseessä oli Venäjällä jo kuuden vuoden ajan järjestetty kesäkoulu. Tämä oli ensimmäinen kerta, kun sinne kutsuttiin ulkomaalaisia. Sain pari tuntia myöhemmin sähköpostiviestin, jossa kerrottiin yksityiskohdat.

Kesäkoulu järjestetään Dubna-nimisessä ydintutkimuslaitoskaupungissa ja se kestää kymmenen päivää. Luennoitsijoiksi mainitaan Venäjän parhaita matemaatikoita, muun muuassa Anosov, Arnold ja Novikov. Viimeksimainittu on saanut Fieldsin Mitalin, mutta en silti tuntenut ketään heistä. Kesäkoulun tarkoituksena on herättää mielenkiinto matematiikan opiskelusta yliopistotasolla ja ketkä sopisivatkaan paremmin tähän tehtävään kuin ison maan huippumatemaatikot? Päätin lähteä matkaan.

Hankin viisumin ja varasin junamatkan Helsingistä Moskovaan ja takaisin. Kesäkoulun järjestäjät sanoivat hoitavansa matkan Moskovasta Dubnaan. Niinpä 18. heinäkuuta lähdin Moskovaan. Olin kolmen muun suomalaisen kanssa samassa hytissä. Matka kesti kolmetoista tuntia, joten oli paljon aikaa keskustella kaikesta. Mieleeni jäi lause “Venäjällä mikään ei toimi, mutta kaikki järjestyy.”

Seuraavana aamuna olin Moskovassa. Tuntui kuin olisin menettänyt lukutaitoni, sillä kaikki oli kirjoitettu kyrillisin aakkosin eikä missään ollut käännöksiä englanniksi tai miksikään muuksi kieleksi. Olin jo katsonut Google Earthista reitin valmiiksi ja kirjoittanut paperille metroasemien nimet. Toisin kuin Helsingissä, Moskovassa metroverkosto kattaa melkein koko kaupungin. Siellä on kymmenen koko kaupungin läpi kulkevaa linjaa ja yksi kehälinja, jota muut leikkaavat. Onnekseni reitti oli helppo eikä tarvinnut vaihtaa linjaa. Metroasemat olivat hienoja patsaineen ja marmorikäytävineen. Tunnin harhailun jälkeen saavuin Moskovan Matematiikan Jatkuvan Opetuksen Keskukseen, josta bussin oli määrä lähteä kohti Dubnaa. Loppumatka oli kuuma, sillä bussissa ei ollut ilmastointia. Yhdessä vaiheessa juutuimme risteykseen, koska joku oli pysäköinyt autonsa kulmaan eikä bussi mahtunut kääntymään. Illalla saavuin Dubnan rajalla olevaan konferenssikeskukseen ja tapasin Knutin Norjasta sekä Istvanin ja Plaulinin Unkarista.

Aamiainen oli jonkinlaista ravitsevaa siemensoppaa, leipää ja teetä. Ruokailun jälkeen Viktor Kleptsyn tuli esittäytymään. Hän oli eräs kesäkoulun järjestäjistä ja toimisi tulkkina, sillä melkein kaikki luennot olivat venäjäksi. Aluksi oli Uspenskin johdantoluento Gödelin epätäydellisyyslauseesta. Hän määritteli mitä tarkoitetaan logiikan kielellä, mitä ovat kaavat, lauseet, todistukset ja mitä eroa on totuudella ja todistettavuudella. Gödelin epätäydellisyyslause sanoo, että jos jonkin aksioomasysteemin ilmaisuvoima on tarpeeksi tehokas ilmaisemaan luonnollisten lukujen käsitteen, niin tässä systeemissä on lause, joka on tosi, mutta jota ei voida todistaa. Uspenski todisti tuloksen neljällä eri tavalla luentosarjan aikana. Seuraavaksi oli neljä pientä rinnakkaisluentoa, mutta missään ei mainittu asiasta mitään englanniksi, joten oli hyvä hetki ottaa kiinni junamatkan aikana kertyneitä univelkoja. Lounaan jälkeen oli kaksi isoa luentoa peräkkäin. Illalla ihmiset menivät ulos pelaamaan jalkapalloa ja lentopalloa.

Aamulla oli puuroa, leipää ja teetä. Tässä vaiheessa olin jo huomannut, että Venäjällä teellä on samanlainen asema kuin kahvilla Suomessa. Tapasin viidennen ja viimeisen ulkomaalaisen, Michaelin Luxembourgista. Seuraavaksi oli kaksi luentoa, lounas, kaksi luentoa, illallinen ja frisbeen heittoa Knutin ja Michaelin kanssa. Tästä muodostui kesäkoulun rutiini: aamiainen, kaksi tai kolme luentoa, lounas, kaksi luentoa, illallinen ja mahdollinen iltaohjelma, kuten elokuva, Tsaikovskia, muistelmapuhe Neuvostoliiton hajoamisesta ja niin edelleen. Koulun mielenkiintoisin anti oli kyllä luennot.

Kymmenen päivän aikana osallistuin 42:lle luennolle, jotka olivat 23:sta eri aiheesta. Aiheet olivat usealta eri matematiikan haaralta ja esitystapa oli jotakin yliopistoluentojen ja seminaarien väliltä. Laskuharjoituksia ei ollut. Tärkein havainto oli se, että oppilaat ja muut kuuntelijat kommentoivat, korjailivat ja kyselivät paljon enemmän kuin mitä olen nähnyt Suomessa. Mielenkiintoisia olivat Anisovin luennot eri huutokauppatyypeistä ja äänestyksistä, Paninin luennot Pythagoraan kolmikoiden luettelemisesta, Kirilovin fraktaaleja koskeva esitelmä, Yaschenkon pitkä luentosarja kryptografiasta, ketjumurtoluvuista ja elliptisistä käyristä, Kleptsynin todistus siitä, että vain muotoa $4k+1$ olevat alkuluvut voidaan esittää kahden neliön summana ja lopuksi Fieldsmitalisti Novikovin esitelmä diskreetistä kompleksianalyysistä kolmiohilalla. Eniten minuun vaikutti kuitenkin kolme eri luentosarjaa, joita kuvailen tarkemmin.

Uspenksyn esitelmä neljästä tavasta todistaa Gödelin epätäydellisyyslause oli järisyttävä ottaen huomioon, että Helsingin Yliopistolla käytetään kahden periodin pituinen kurssi vain yhden tavan esittämiseen. Ensimmäinen Uspenskyn esittämä todistus oli oleellisesti ottaen sama kuin mikä matematiikan laitoksen kurssilla käydään läpi. Siinä oli ajatuksena, että muodostetaan luonnollisten lukujen aksioomasysteemin avulla täsmällinen lause, joka sanoo "minua ei voi todistaa." Tämä lause on tosi, koska jos se olisi epätosi, niin se voitaisiin todistaa, jolloin se olisi tosi. Miksei sitten tehty lausetta, joka sanoo "minä olen epätosi", vanhaa valehtelijan paradoksia matkien? Sen takia, että todistuvuuden ja totuuden määritelmät eroavat. Todistuvuuden määritelmä on jossain määrin yksinkertaisempi, joten tästä ominaisuudesta voidaan puhua annetussa formaalissa kielessä. Jos haluttaisiin puhua totuudesta, pitäisi käyttää äärettömän pitkiä lauseita, mutta tämä aiheuttaisi ongelmia todistuvuuden määritelmään.

Toinen todistus perustui algoritmiteorian erääseen kiintopistelauseeseen: "Jos A on algoritmi, joka on määritelty mille tahansa rekursiivista funktiota kuvaavalle ohjelmankoodille ja joka antaa tuloksena rekursiivista funktiota kuvaavan ohjelmakoodin, niin A:lla on kiintopiste. Siis on olemassa ohjelma, jonka A muuntaa ohjelmaksi, joka tekee täsmälleen saman kuin alkuperäinen ohjelma." Gödelin epätäydellisyyslause saadaan numeroimalla kaikki ohjelmat P_0, P_1, P_2, jne... ja tarkastelemalla algoritmia a, joka antaa tulokseksi ensimmäisen ohjelman $a(P)$, jolle voidaan todistaa annetussa formaalissa kielessä, että se ei ole ekvivalentti P:n kanssa. Jos a olisi määritelty kaikille ohjelmille, niin kiintopistelauseen nojalla olisi ohjelma P, joka olisi ekvivalentti tuloksen $a(P)$ kanssa, mutta a:n määritelmän nojalla tämä on mahdotonta. Siispä on olemassa rekursiivista funktiota kuvaava ohjelma Q, jolle ei voida todistaa sen epäekvivalenssia minkään muun ohjelman kanssa. Otetaan nyt jokin ohjelma P, joka ei ole ekvivalentti Q:n kanssa. Rekursiivisten funktioiden määritelmä on sellainen, että on mahdollista muodostaa kyseisessä formaalissa kielessä lause "Q ei ole ekvivalentti P:n kanssa." Tätä lausetta ei siis voida todistaa, vaikka se on tosi.

Kolmas todistus perustuu erääseen paradoksiin. Ensimmäisessä todistuksessa ikään kuin käytettiin hyödyksi vanhaa valehtelijan paradoksia "minä valehtelen", ja tässä käytetään seuraavaa paradoksaalista määritelmää: "olkoon n pienin luonnollinen luku, jota ei voida määritellä alle kahdellakymmenellä sanalla." Edellisessä lauseessa on alle kaksikymmentä sanaa, ja se määrittelee luvun n. Seuraavaksi alettiin määrittelemään tarkemmin erilaisia käsitteitä, jotta saataisiin paradoksia vastaava ristiriita mikäli kaikki todet lauseet voitaisiin todistaa. En muista tarkemmin tätä enkä viimeistäkään todistusta, joka perustuu siihen, ettei voida tehdä algoritmia, joka tarkistaa kaikista ohjelmista pysähtyvätkö ne kaikilla syötteillä.

Toiseksi mielenkiintoisin luento oli ehdottomasti Gusein-Zaden, ja sen aihe oli Brownin liike. Aihe on hyvin vaikea jos keskittyy teknisiin yksityiskohtiin. Ajatuksena oli tarkastella kaksi- ja kolmiulotteisella ruudukolla tapahtuvaa satunnaiskulkua, jossa jokaisella ajanhetkellä kulkijalla on yhtä suuri todennäköisyys siirtyä mihin tahansa viereiseen ruutuun. Seuraavaksi annettiin ruutujen koon pienentyä ja rajaprosessin jälkeen siirryttiin tarkastelemaan jatkuvaa satunnaisliikettä kaksi- ja kolmiulotteisessa avaruudessa. Tässä ei siis kiinnitetty huomiota rajaprosessin yksityiskohtiin. Tarkoituksena oli etsiä vastaus kysymykseen: "millä todennäköisyydellä kulkija palaa jossakin vaiheessa takaisin aloituspisteeseen?" Oikeastaan, koska piste on nollamittainen joukko avaruudessa, on todennäköisyys nolla. Siispä siirryttiin kysymään millä todennäköisyydellä kulkija palaa takaisin origokeskiseen r-säteiseen palloon.

Ongelman täsmälliseksi muotoilemiseksi määrittelimme funktion $P(x, y, z)$, joka kertoo millä todennäköisyydellä pisteestä (x, y, z) päästään r-säteiseen origokeskiseen palloon. Tälle on kohtuullista olettaa, että $0 \leq P \leq 1$ kaikkialla ja $P = 1$ r-säteisessä origokeskisessä pallossa. Lisäksi tuntui järkevältä olettaa, että P riippuu vain etäisyydestä origoon, eikä napakulmasta. Itse asiassa tämä ominaisuus todistettiin oikeaksi ruudukolla, joten rajaprosessin myötä se siirtyisi P:lle. Kolmas ominaisuus oli tärkein. Tarkastelimme mielivaltaista pistettä a_0 avaruudessa, ja se keskipisteenä olevaa r_0 säteistä palloa. Symmetrian perusteella oletettiin, että todennäköisyys päästä keskipisteestä ympyrän kehän mielivaltaiselle pisteelle on vakio. Kokonaistodennäköisyyden kaavan perusteella saatiin siis, että $P(a_0)$ on yhtä suuri kuin keskiarvo luvuista $P(x, y, z)$, missä (x, y, z) käy läpi annetun pallon. Tämä on analyysissä hyvin tunnettu ominaisuus. Sitä kutsutaan funktion P harmonisuudeksi. Tarkastelemalla P:n Taylor-kehitelmää saimme, että P:n toisen kertaluvun osittaisderivaattojen summa on aina nolla. Muodostunut yhtälö, eli $\Delta P = 0$, on nimeltään Laplacen yhtälö. Tässä merkitsimme $\Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2$, missä viimeistä termiä ei ole kaksiulotteisessa tapauksessa. Koska P riippui vain etäisyydestä R origoon, niin määrittelimme $P(x, y, z) = G(R)$. Tämän jälkeen Laplacen yhtälö sai muodon $G''(R)+(n-1)/R \cdot G'(R) = 0$, missä n on ulottuvuus. Tasossa siis $G'' + G'/R = 0$. Tämän yhtälön ainoa alkuehdot toteuttava ratkaisu on vakiofunktio $G \equiv 1$. Kolmiulotteisessa avaruudessa saatiin ratkaisuiksi $G(R) = C_1/R + C_2$ joten piti analysoida lisää ruudukkomallia, jotta nähtäisiin, että $G \longrightarrow 0$, kun R kasvaa rajatta. Muiden alkuehtojen kanssa saimme, että $G(R) = r/R$, missä r on alkuperäisen origokeskisen pallon säde. Siis tasossa aina päädytään alkupisteeseen, kun taas kolmiulotteisessa avaruudessa todennäköisyys pienenee etäisyyden kasvaessa.

Viimeisin luento, jonka kuvailen, oli pedagogisesti tärkein. Tihomirovin esitelmän nimi oli "lyhyt matematiikan kurssi." Sen aiheena oli Venäjän yliopiston kahden ensimmäisen vuoden opintojen ne tärkeimmät asiat, joita tarvitaan melkein joka tutkimusalalla. Nämä olivat lineaariset yhtälöt, toisen asteen pinnat, epälineaaristen yhtälöiden ratkaiseminen ja differentiaalilaskenta. Lisäksi näitä käsiteltiin eri ulottuvuuksissa: suoralla, tasossa, mielivaltaisen moniulotteisessa avaruudessa ja ääretönulotteisessa avaruudessa. Esimerkkinä ääretönulotteisesta avaruudesta mainittiin ℓ_2, jonka pisteet ovat muotoa $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$, missä ajatuksena on, että $\mathbf{x}$:n "etäisyys" origoon on äärellinen. Tavallisessa n-ulotteisessa avaruudessa etäisyys origoon, *normi*, on $\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$. Vastaavalla ajatuksella ääretönulotteisen avaruuden normi on $\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots}$, eli ℓ_2 sisältää ne pisteet, joilla $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots < \infty$.

Lineaarisista yhtälöistä Tihomirov antoi esimerkin $Ax = b$, missä A ja b olivat reaalilukuja. Tässä on kolme tapausta. Jos A ei ole nolla, niin on tasan yksi ratkaisu. Jos $A = b = 0$, niin on äärettömän monta ratkaisua ja jos $A = 0$, $b \neq 0$, niin ei ole yhtäkään ratkaisua. Tasossa ja n-ulotteisessa avaruudessa näimme vastaavan ilmiön, kun tulkitsimme, että A on $n \times n$-matriisi ja b on $n \times 1$-sarakematriisi, eli vektori. Äärellisulotteisissa tapauksissa olisimme yhtä hyvin voineet sanoa, että A on lineaarikuvaus, eli $A(\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y}) = \alpha A(\mathbf{x})+\beta A(\mathbf{y})$ kaikilla reaaliluvuilla α, β ja n-ulotteisen avaruuden pisteillä $\mathbf{x}$ ja $\mathbf{y}$. Ääretönulotteisessa tapauksessa Tihomirov kertoi vastaavan tuloksen olevan totta, mikäli A:lle oletettaisiin yksi lisäominaisuus. Tämä tulos tunnetaan nimellä Fredholmin vaihtoehdot (Fredholm alternative), ja se sanoo, että mikäli $A = I + C$, missä I on identtinen operaattori ja C on kompakti lineaarinen operaattori, niin yhtälöllä $A(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ on joko ratkaisu kaikilla $\mathbf{b}$ tai yhtälöllä $A(\mathbf{x}) = 0$ on epätriviaali ratkaisu.

Toisesta aiheesta, toisen asteen pinnoista, emme puhuneet suoraan, vaan tarkastelimme useamman muuttujan toisen asteen polynomeja. Yksiulotteisessa tapauksessa polynomi oli muotoa $Q(x) = ax^2 + bx + c$. Siirryimme uuteen muuttujaan $y = xb/(2a)$, jolloin saimme $Q = ay^2 + c'$, missä c' oli vakio. Toisen ulottuvuuden tapauksessa $Q(x) = a_1x_1^2 + 2a_2x_1x_2 + a_3x_2^2$. Tässä oli jätetty alempiasteiset termit huomioimatta. Tällöinkin oli olemassa kääntyvä lineaarinen muuttujanvaihto $\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{x})$, jolla $Q = \lambda_1y_1^2 + \lambda_2y_2^2$, missä kertoimet λ_1 ja λ_2 olivat vakioita. Vastaavasti n-ulotteisessa avaruudessa saimme $Q = \lambda_1y_1^2 + \lambda_2y_2^2 + \ldots + \lambda_ny_n^2$. Ääretönulotteisessa tapauksessa tarkastelimme yllämainitun ℓ_2:n pisteitä. Määrittelimme Q:n äärettömän summan $Q(\mathbf{x}) = \sum a_{ij}x_ix_j$ avulla, missä $\sum a_{ij}^2$ on äärellinen. Tihomirovin mukaan oli myös totta, että on olemassa muuttujanvaihto, jonka avulla $Q = \sum \lambda_iy_i^2$.

Epälineaaristen yhtälöiden ratkaisemisesta Tihomirov kertoi vain erään numeerisen algoritmin. Perusajatuksena oli kysymys: "mitä jos yhtälöä kuvaava funktio olisikin lineaarinen?" Tihomirov kertoi, että jos nollakohdan alkuarvaus on x_0, niin funktion arvo ensimmäisessä pisteessä on $f(x_0)$. Jos f olisi lineaarinen ja sen kulmakerroin olisi λ, niin oikea nollakohta olisi $x_0 - \lambda^{-1}f(x_0)$. Tämän toteamiseksi riittää tarkastella kulmakertoimen määritelmää. Edellisestä saimme algoritmin $x_{n+1} = x_n - \lambda^{-1}f(x_n)$. Se muistuttaa Newtonin menetelmää, jossa onkin $\lambda = f'(x_n)$. Tässä tapauksessa λ oli kuitenkin vakio. Seuraavaksi Tihomirov todisti kaikissa äärellisulotteisissa tapauksissa, että eräillä f:n ehdoilla algoritmi suppenee aina johonkin tietyn etäisyyden päässä olevaan nollakohtaan. Ääretönulotteisessa tapauksessa sama on totta, kunhan tulkitaan mitä f, λ ja x ovat. Tihomirov antoi esimerkin, jossa "pisteinä" tai muuttujina pidettiin välillä $[a, b]$ jatkuvia funktioita. Näiden välinen "etäisyys" määriteltiin funktioiden erotuksen itseisarvon maksimina, eli $\mathrm{dist}(g, h) = \max |g(x) - h(x)|$. Algoritmissa esiintyvä f korvattiin epälineaarisella operaattorilla

$f[y](x) = y(x) - y_a - \int g(t, y(t))dt$ ja λ korvattiin identtisellä kuvauksella. Tässä siis y oli välillä $[a, b]$ jatkuva funktio, kuten myöskin $f[y]$, ja $f[y]$ sai pisteessä x ylläolevan kaavan mukaisen arvon $f[y](x)$. Osoittautui, että tämä operaattori toteuttaa vaaditut ehdot. Tästä seurasi, että alkuarvo-ongelmalla $y'(x) = g(x, y(x))$, $y(a) = y_a$ on aina ratkaisu, joka on määritelty välillä $[a, a + \epsilon]$ jollakin positiivisella ϵ. Kaiken tämän jälkeen Tihomirovilla ei ollut aikaa puhua differentiaalilaskennasta.

Loppumatka meni yllättävän hyvin. Bussi Dubnasta Moskovaan ei juuttunut mihinkään ja matka kesti vain kolme tai neljä tuntia. Junani lähtöön oli vielä viisi tuntia aikaa, joten kävin parin kesäkoulun järjestäjän kanssa turistikierroksella Kremlinin ympäri. Illalla menin junaan ja aamupäivällä olin takaisin Suomessa. Kiitän matkan rahoittajia ja järjestäjiä erinomaisesta kesäkoulusta.